Sommersemester 2015

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD Dr. Erhard Hexel
Mathematik mit Maple für IN

Übungsserie 5

Differential- und Integralrechnung für Funktionen f: R->R mit Maple

1. Grenzwerte und Stetigkeit

> $restart$

> $f := x \to \ln(\text{abs}(x)) : 'f(x)' = f(x)$

> $g := x \to \frac{1}{x} : 'g(x)' = g(x)$

Verlauf der Funktionen f(x) und g(x) in einer Umgebung von x=0:

> $with(plots) :$

> $plot([f(x), g(x)], x = -3..3, y = -6..6, color = [red, blue])$

Grenzwertverhalten der Funktionen f(x) und g(x) für x->0:

> $Limit(f(x), x = 0) = limit(f(x), x = 0)$

> $Limit(g(x), x = 0) = limit(g(x), x = 0)$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert von g(x) für x->0:

> $Limit(g(x), x = 0, left) = limit(g(x), x = 0, left)$

> $Limit(g(x), x = 0, right) = limit(g(x), x = 0, right)$

Der **iscont**-Befehl ermöglicht die Untersuchung einer Funktion in einem gegebenen Intervall auf **Stetigkeit,** und mit dem **discont**-Befehl lassen sich **Unstetigkeitsstellen** auffinden:

> $restart$

> $f := x \to \frac{\sin(x)}{x}$

> $plot(f(x), x = -8..8)$

> $iscont(f(x), x = 0..infinity)$ *# im offenen Intervall (0, ∞)*

> $iscont(f(x), x = -1..1)$ *# im offenen Intervall (-1,1)*

> $discont(f(x), x)$

Behebung der gefundenen Unstetigkeitsstelle von f(x) durch Modifikation von f(x):

> $limit(f(x), x = 0)$

> $f := x \to piecewise\left(x \neq 0, \frac{\sin(x)}{x}, x = 0, 1\right) : 'f(x)' = f(x)$

> $iscont(f(x), x = -1..1)$

2. Ableitungen und Differenzierbarkeit

Ableitung einer Funktion f(x):

Für die Berechnung der (ersten) Ableitung von Funktion f(x) stehen in Maple die Befehle **D** und **diff** bereit. Mit **D(f)** erhält man die Ableitung als Funktion und mit **diff(f(x),x)** dagegen als Term.

> $restart$

> $f := x \to x^2 + \frac{1}{x}$

> $'D(f)(x)' = D(f)(x)$

> $with(plots):$

> $plot([f(x), D(f)(x)], x=-4..4, y=-10..10, color=[green, red])$

Der **showtangent**-Befehl im Zusatzpaket **student** ermöglicht die graphische Darstellung der Tangente an die Kurve y=f(x) an gegebener Stelle x (hier: x=1).

> $with(student)$

> $showtangent(f(x), x=1, x=-4..4, y=-10..10)$

Ableitungen höherer Ordnung:

> $restart$

> $f := x \to \ln(x)$

Zweite Ableitung von f(x):

> $'D(D(f))(x)' = D(D(f))(x)$

> $'(D@@2)(f)(x)' = (D@@2)(f)(x)$

Höhere Ableitungen von f(x):

> **for** n **from** 0 **to** 5 **do** $print('n'=n, '(D@@n)(f)(x)' = (D@@n)(f)(x))$ **end do**

3. Kurvendiskussion

Zur Nullstellenbestimmung und Untersuchung von Unstetigkeitsstellen einer Funktion f(x) sei auf die Befehle **solve**, **RootOf**, **discont** und **limit** verwiesen.

> $restart:$

> $f := x \to \exp(-x) \cdot \sin(x) : 'f(x)' = f(x)$

> $plot(f(x), x=-4..2, y=-8..8)$

Näherungsweise Bestimmung **lokaler Extremwertstellen** der Funktion f(x) im Intervall [-4,2]:

> $x1 := fsolve(D(f)(x), x=-4..0)$

> $is(D(D(f))(x1) > 0)$ *# x1 ist lokale Minimalstelle*

> $x2 := fsolve(D(f)(x), x=0..2)$

> $is(D(D(f))(x2) < 0)$ *# x2 ist lokale Maximalstelle*

Bestimmung **globaler Extremwertstellen** von f(x) im Intervall [-4,2]:

> $minimize(f(x), x=-4..2, location)$

> $maximize(f(x), x=-4..2, location)$

Bestimmung der **Wendepunkte** von f(x) im Intervall [-4,2]:

> $x3 := fsolve(D(D(f))(x), x=-4..0)$

> $is((D@@3)(f)(x3) \neq 0)$ *# x3 ist Wendepunkt*

> $x4 := fsolve(D(D(f))(x), x=0..2)$

> $is((D@@3)(f)(x4) \neq 0)$ *# x4 ist Wendepunkt*

4. Taylorentwicklung und Potenzreihen

Der **taylor**-Befehl erzeugt die Entwicklung einer Funktion f(x) in eine **Taylorreihe**. Die Standardentwicklung liefert ein Polynom 5. Grades mit Restglied:

> $restart : with(plots):$

> $f := x \to \ln(x+1)$

> $t := taylor(\ln(x+1), x=0)$ *# Entwicklungsstelle x=0, Standardentwicklung*

> $t := taylor(\ln(x+1), x=0, 10)$
  # *Entwicklungsstelle x=0, Entwicklung in Polynom 9. Grades*

Der **convert**-Befehl ermöglicht die Abtrennung des Restgliedes:

> $convert(t, polynom)$

Definition des **Taylorpolynoms** T(x) als Funktion in Abhängigkeit vom Grad n:

> $T := n \rightarrow unapply(convert(taylor(f(x), x=0, n+1), polynom), x)$

> $'T(5)(x)' = T(5)(x)$

> $plot([f(x), T(1)(x), T(2)(x), T(3)(x)], x=-1..2, color=[red, blue, green, orange])$

Eine **Potenzreihe**:

> $restart:$

> $a := k \rightarrow \frac{2^k \cdot (x-3)^k}{3^k \cdot k^2}$

> $Sum(a(k), k=1..infinity)$

Bestimmung des **Konvergenzintervall**s der Potenzreihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums (oder eventuell Wurzelkriteriums):

> $q := simplify\left(\frac{a(k+1)}{a(k)}\right)$

> $gw := limit(\mathrm{abs}(q), k=infinity)$

> $K := solve(gw < 1, x)$

Untersuchung der Randpunkte des offenen Intervalls K auf Konvergenz:

> $x := \frac{3}{2};\ b := k \rightarrow simplify(a(k)) : 'b(k)' = b(k)$

> $Sum(b(k), k=1..infinity) = sum(b(k), k=1..infinity)$

> $x := \frac{9}{2};\ c := k \rightarrow simplify(a(k)) : 'c(k)' = c(k)$

> $Sum(c(k), k=1..infinity) = sum(c(k), k=1..infinity)$

Welcher der Randpunkte von K gehört folglich zum Konvergenzintervall?

5. Berechnung von Integralen

Der **int**-Befehl führt die **Berechnung der Stammfunktion** einer Funktion f(x) aus:

> $restart$

> $Int(x^n, x) = int(x^n, x)$

> $Int\left(\frac{1}{x}, x\right) = int\left(\frac{1}{x}, x\right)$ # *das Ergebnis ist für reelles x falsch*

> $\mathrm{Re}\left(Int\left(\frac{1}{x}, x\right)\right) = \mathrm{Re}\left(int\left(\frac{1}{x}, x\right)\right)$

> $Int(\sin(x), x) = int(\sin(x), x)$

> $Int\left(\frac{1}{1+x^2}, x\right) = int\left(\frac{1}{1+x^2}, x\right)$

Partialbruchzerlegung:

> $restart$

> $f := x \rightarrow \frac{x^3+1}{x^4 - 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1}$

> $p := convert(f(x), parfrac, x)$

> $Int(f(x), x) = int(p, x)$

Berechnung bestimmter und uneigentlicher Integrale :

> $restart$

> $f := x \rightarrow \frac{x}{3} + \cos(x) + 1$

> $Int(f(x), x = 1..4) = int(f(x), x = 1..4)$

> $Int\left(\frac{1}{x^2}, x = 0..1\right) = int\left(\frac{1}{x^2}, x = 0..1\right)$ # *unbeschränkter Integrand*

> $Int\left(\frac{1}{x^2}, x = 1..infinity\right) = int\left(\frac{1}{x^2}, x = 1..infinity\right)$
unbeschränktes Integrationsintervall

> $f := n \rightarrow int\left(\frac{1}{x^n}, x = 1..infinity\right)$

> $s := seq([n, f(n)], n = 1..10)$

> $plot([s], x = 0..10, style = point, symbol = circle)$

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion f(x) durch

$$f(x)=\frac{x^4 - 8x^2 + 16}{(x^2 - 3x - 10)(x + 1)}.$$

Bestimmen Sie die Nullstellen und Unstetigkeitsstellen von f(x). Untersuchen Sie dann ihr Verhalten an den Unstetigkeitsstellen sowie im Unendlichen.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x)=\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen , das globale Maximum und das globale Minimum sowie eventuell vorhandene Wendepunkte von f(x) im Intervall [-2,2].
b) Bestimmen Sie die Tangentengleichung von f(x) in x0=-0.5 und stellen Sie die Funktion f(x) zusammen mit der Tangente in x=-0.5 in einem Bild graphisch dar.

Aufgabe 3

Schreiben Sie eine Prozedur **Taylor:=proc(f,k,x0)** zur Berechnung des Taylorpolynoms k-ten Grades einer gegebenen Funktion f(x) an der Entwicklungsstelle x0. Bestimmen Sie unter Anwendung der Prozedur **Taylor** die Taylorpolynome der Funktion

$$f(x)=\frac{1}{1 + x^2}$$

vom Grad k=1,2,3,4 an der Entwicklungsstelle x0=1 und stellen Sie diese zusammen mit der

Funktion in einem Bild graphisch dar.

Aufgabe 4

Für welche reellen Werte von x konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^k}{k} \quad ?$$

Aufgabe 5

Schreiben Sie eine Prozedur **Integral:=proc(f,x,a,b)** zur Berechnung des bestimmten oder uneigentlichen Integrals von f(x) in den Grenzen von **a** bis **b**, und wenden Sie die Prozedur **Integral** anschließend zur Berechnung folgender Integrale an:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t \cdot e^t}{(t+1)^2}\, dt$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2}\, dx$