Sommersemester 2015

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD Dr. Erhard Hexel
Mathematik mit Maple für IN

Übungsserie 7

Extremwertaufgaben für Funktionen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und gewöhnliche DGL'n mit Maple

1. Lokale Extremwerte von Fktn. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

```
> restart : with(plots) :
> with(LinearAlgebra) :
> f := (x, y) -> x·y - x^3 - y^3
> plot3d(f(x, y), x = -1 ..1, y = -1 ..1, axes = BOXED, style = PATCHCONTOUR, orientation
      = [-15, 60])
> contourplot(f(x, y), x = -0.5 ..1, y = -0.5 ..1, grid = [40, 40])
```

Überprüfung der notwendigen Bedingung für die Existenz lokaler Extremwerte:

```
> fx := D[1](f); fy := D[2](f)
> gradf := (x, y) -> Vector([fx(x, y), fy(x, y)])
> g := gradf(x, y)
```

Gesucht sind nur die reellen Lösungen von gradf(x,y)=(0,0):

```
> use RealDomain in L := solve({g(1) = 0, g(2) = 0}) end use
```

Extremwertverdächtig sind damit folgende Stellen:

```
> P := [rhs(L[1][1]), rhs(L[1][2])]
> Q := [rhs(L[2][1]), rhs(L[2][2])]
```

Überprüfung der hinreichenden Bedingung für P:

```
> with(VectorCalculus) :
> HP := Hessian(f(x, y), [x, y] = P)
> Determinant(HP)
> HP(1, 1)
> f(P[1], P[2])
```

Folglich ist P eine lokale Maximalstelle mit f(P)=$\frac{1}{27}$:

```
> plot3d(f(x, y), x = 0.2 ..0.5, y = 0.2 ..0.5, axes = BOXED, style = PATCHCONTOUR,
      orientation = [-40, 50])
```

Überprüfung der hinreichenden Bedingung für Q:

```
> HQ := Hessian(f(x, y), [x, y] = Q)
> Determinant(HQ)
```

Folglich hat f(x,y) in Q einen Sattelpunkt:

```
> plot3d(f(x, y), x = -0.2 ..0.2, y = -0.2 ..0.2, axes = BOXED, style = PATCHCONTOUR,
      orientation = [-40, 50])
```

2. Extremwerte von Fktn. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Nebenbedingungen

```
> restart : with(plots) :
> with(LinearAlgebra) :
```

Die Zielfunktion f(x,y):

$> f := (x, y) \to x^2 - y^2$

Die Nebenbedingung g(x,y)=0 mit:

$> g := (x, y) \to 1 - x^2 - y^2$

```
> p1 := contourplot(f(x, y), x =-2 ..2, y =-2 ..2, grid = [30, 30], coloring = [yellow, blue],
      scaling = CONSTRAINED) :
> p2 := implicitplot(g(x, y) = 0, x =-2 ..2, y =-2 ..2, color = red, scaling
      = CONSTRAINED) :
> display({p1, p2})
```

Definition der Ersatzfunktion L(x,y,λ) mit dem Lagrange-Multiplikator λ:

$> L := unapply(f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y), x, y, \lambda)$

Überprüfung der notwendigen Bedingung:

```
> Lx := D[1](L); Ly := D[2](L); Lλ := D[3](L)
> gradL := (x, y, λ) → Vector([Lx(x, y, λ), Ly(x, y, λ), Lλ(x, y, λ)])
> G := gradL(x, y, λ)
> use RealDomain in LL := solve({G(1) = 0, G(2) = 0, G(3) = 0}) end use
```

Extremwertverdächtig sind damit die folgenden Stellen von f(x,y) auf D=$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$:

```
> for k from 1 to 4 do P[k] := [rhs(LL[k][2]), rhs(LL[k][3])] ; f(P[k][1], P[k][2])
      end do
```

D ist beschränkt und abgeschlossen, und f ist auf D stetig. Folglich hat f auf D ein globales Maximum und ein globales Minimum. Das können nur die Funktionswerte 1 und -1 sein.Wegen f(P_1)=f(P_2)=1 und f(P_3)=f(P_4)=-1 sind P_1, P_2 die lokalen Maximalstellen und P_3, P_4 die lokalen Minimalstellen.

Die Bestimmung globaler Extremwertstellen und Extremwerte für eine Funktion f(x,y) auf einem Rechteckbereich D=$\{(x, y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ kann mit den Maple-Befehlen **maximize** und **minimize** erfolgen:

$> f := (x, y) \to 3 \cdot x \cdot y^2 + 4 \cdot x^3 - 2 \cdot y^2 - 7 \cdot x^2 - 1$

```
> maximize(f(x, y), x = 0 ..3, y =-1 ..2, location)
> minimize(f(x, y), x = 0 ..3, y =-1 ..2, location)
```

3. DGL'n erster Ordnung

Die Untersuchung und Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Maple erfordert das Laden des Zusatzpaketes **DEtools**.

```
> restart
> with(DEtools)
```

Richtungsfeld einer Differentialgleichung $y' = f(t, y)$**:**

In jedem Punkt (t,y) ϵ D (Rechteckbereich, auf dem die Funktion f(t,y) stetig ist) wird durch die DGL y'=f(t,y) eine Richtung y'=tan α festgelegt, die durch ein Linienelement sichtbar gemacht werden kann. Die Gesamtheit der Linienelemente der DGL bezeichnet man als **Richtungsfeld**. Der **DEplot**-Befehl ermöglicht die graphische Darstellung des Richtungsfeldes mit speziellen durch Anfangsbedingungen gegebenen Lösungskurven der DGL in einem Bild.

```
> restart : with(DEtools) :
```

Beispiel:

$$y' = f(t, y) = \frac{t}{y}, \quad y = y(t)$$

> $dgl := \mathrm{D}(y)(t) = \dfrac{t}{y(t)}$

> $AnfBed := \{[y(0) = 1], [y(0) = 0.1], [y(0) = -0.1], [y(0) = -1]\}$

> $DEplot(dgl, \{y(t)\}, t = -2..2, y = -2..2, AnfBed, stepsize = 0.05, color = blue, linecolor = red)$

Lösung einer DGL bzw. eines Anfangswertproblem (AWP) mit dem **dsolve**-Befehl:

> $restart : with(plots) :$

> $with(DEtools) :$

Beispiel 1: $y' = \sqrt{1+y}, \quad y = y(t)$

> $dgl1 := \mathrm{D}(y)(t) = \mathrm{sqrt}(1 + y(t))$

Die allgemeine Lösung der DGL:

> $dsolve(dgl1, y(t))$

> $'y(t)' = solve(\%, y(t))$ # *in expliziter Form*

Lösung des AWP $y' = \sqrt{1+y}, \; y = y(t); \; y(0) = 1 :$

> $dsolve(\{dgl1, y(0) = 1\}, y(t))$

Darstellung der Lösungskurve mit dem **odeplot**-Befehl:

> $p1 := dsolve(\{dgl1, y(0) = 1\}, type = numeric, range = -2..2)$

> $odeplot(p1, scaling = CONSTRAINED)$

Darstellung der Lösungskurve im Richtungsfeld der DGL:

> $DEplot(dgl1, \{y(t)\}, t = -4..4, y = -2..2, \{[y(0) = 1]\}, stepsize = 0.05, color = blue, linecolor = red)$

Beispiel 2: $(1 - t^2) \cdot y' = t \cdot y, \quad y = y(t)$

> $dgl2 := (1 - t^2) \cdot \mathrm{D}(y)(t) = t \cdot y(t)$

Die allgemeine Lösung:

> $dsolve(dgl2, y(t))$

Lösung des AWP $(1 - t^2) \cdot y' = t \cdot y, \quad y = y(t), \; y(2) = 1$

> $dsolve(\{dgl2, y(2) = 1\}, y(t))$

> $p2 := dsolve(\{dgl2, y(2) = 1\}, type = numeric, range = 1.1..1.5)$

> $odeplot(p2)$

Lösungskurve für y(2)=1 und y(2)=-1 im Richtungsfeld der DGL:

> $DEplot(dgl2, \{y(t)\}, t = 0..4, y = -2..2, \{[y(2) = 1], [y(2) = -1]\}, stepsize = 0.05, color = blue, linecolor = red)$

Beispiel 3: $y' = y \cdot e^{t \cdot y}, \; y = y(t)$

> $dgl3 := \mathrm{D}(y)(t) = y(t) \cdot \exp(t \cdot y(t))$

> $dsolve(dgl3, y(t))$

> $dsolve(\{dgl3, y(0) = 1\}, y(t))$

Der dsolve-Befehl liefert hier weder die allgemeine Lösung noch die Lösung des AWP. Immerhin gelingt die graphische Darstellung der Lösungskurve für y(0)=1:

> $p3 := dsolve(\{dgl3, y(0) = 1\}, type = numeric, range = -5..0.5, y(t))$

> $odeplot(p3)$

4. Lineare DGL'n

Lösung einer linearen DGL erster Ordnung:

$$y' + a(t)\cdot y = b(t),\; y = y(t) \qquad \text{(Normalform)}$$

> $restart : with(DEtools) :$

> $dgl := (a, b) \rightarrow \mathrm{D}(y)(t) + a(t)\cdot y(t) = b(t)$

Neben dem bereits bekannten **dsolve**-Befehl steht eigens für die Lösung linearer DGL'n der **linearsol**-Befehl zur Verfügung:

> $L := (a, b) \rightarrow linearsol(dgl(a, b), y(t))$

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL:

> $L(a, 0)[1]$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL:

> $L(a, b)[1]$

Beispiel: $\quad y' + t\cdot y = 1 + t^2$

> $a := t \rightarrow t;\ b := t \rightarrow 1 + t^2$

> $L(a, b)[1]$

Anwendung des **dsolve**-Befehls bei der Lösung des AWP

$$y' + t\cdot y = 1 + t^2,\; y = y(t),\; y(0) = 2$$

> $dsolve(\{dgl(a, b), y(0) = 2\}, y(t))$

Lösung einer linearen DGL höherer Ordnung:

> $restart : with(DEtools) :$

Beispiel 1: $\left(t^2 + t\right)\cdot y^{(3)} - \left(t^2 - 2\right)\cdot y^{(2)} - (t + 2)\cdot y' = 0,\; y = y(t)$

> $dgl1 := \left(t^2 + t\right)\cdot(\mathrm{D}@@3)(y)(t) - \left(t^2 - 2\right)\cdot(\mathrm{D}@@2)(y)(t) - (t + 2)\cdot\mathrm{D}(y)(t) = 0$

> $dsolve(dgl1)$ $\qquad$ *# die allgemeine Lösung*

Beispiel 2: $y^{(2)} - 4\cdot y' + 8\cdot y = b(t),\; y = y(t)$

> $dgl2 := b \rightarrow (\mathrm{D}@@2)(y)(t) - 4\cdot\mathrm{D}(y)(t) + 8\cdot y(t) = b(t)$

Der **constcoeffsols**-Befehl liefert eine Fundamentalbasis der homogenen DGL dgl2(0):

> $constcoeffsols(dgl2(0), y(t))$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

> $dsolve(dgl2(0))$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL dgl2=b(t) für die Störfunktion $b(t) = 4\cdot e^{2t}$:

> $b := t \rightarrow 4\cdot\exp(2\cdot t)$

> $dsolve(dgl2(b), y(t))$

Aufgaben

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = e^{-x^2}\cdot\left(4\,y + x^2 - y^2\right)$ auf lokale Extremwertstellen und Extremwerte sowie auf Sattelpunkte, und stellen Sie die Funktion in der Umgebung eventuell vorhandener lokaler Extremwertstellen bzw. Sattelpunkte graphisch dar.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie unter Anwendung der Multiplikatormethode von Lagrange alle extremwertverdächtigen Stellen der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf dem Bereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 5y^2 - 8xy = 18\}.$$

Hat $f(x, y)$ auf D globale Extremwerte? Wenn ja an welchen Stellen?
Stellen Sie den Verlauf der Höhenlinien von $f(x, y)$ und den Bereich D zusammen in einem Bild graphisch dar.

Aufgabe 3

Stellen Sie selbst ausgewählte spezielle Lösungen der folgenden DGL'n erster Ordnung in ihrem Richtungsfeld graphisch dar und bestimmen Sie anschließend die allgemeine Lösung.

a) $y' + y \cdot \cos x + \sin x = 0, \quad y = y(x)$

b) $y \cdot y' = 1, \quad y = y(t)$

Aufgabe 4

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) $t \cdot y' + y^2 = 0, \quad y = y(t)$

b) $x \cdot y' = y \cdot (\ln y - \ln x), \quad y = y(x)$

c) $\left(x^2 + 1\right) \cdot y' + x \cdot y - x \cdot \left(x^2 + 1\right) = 0, \quad y = y(x)$

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und stellen Sie die Lösungskurven jeweils im Intervall [-2, 2] graphisch dar.

a) $y' \cdot \sin t = y \cdot \ln y, \quad y = y(t), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

b) $y' = t^2 \cdot y^3, \quad y = y(t), \quad y(0) = -1$

Aufgabe 6

Gegeben sei die lineare DGL

$$y^{(4)} - y = x^3 + 1 + 5 \cdot \cos x, \quad y = y(x).$$

Bestimmen Sie unter Anwendung des Maple-Befehls **constcoeffsols** ein Fundamentalsystem der homogenen DGL und ermitteln Sie dann mit dem **dsolve**-Befehl die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.