Prof. Dr. Matthias Kriesell
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

13. Studienbrief zur Diskreten Mathematik

In dieser Woche behandeln wir neben dem Abzählen von Isomorphieklassen 5-eckiger Graphen den großen Satz von PÓLYA, der (den kleinen) Satz 3.3 ergänzt um die Möglichkeit, Bedingungen an die Färbungen der Positionen zu stellen. Das ist aus der Formulierung des Satzes nicht ohne weiteres ersichtlich, so daß ich statt eines Beweises ein abschließendes Beispiel bringe.

Die Klausur findet im zu Beginn des Semesters angekündigten Modus statt.[1] Für das 48-stündige Zeitfenster habe ich sechs Alternativen in einer doodle-Umfrage gelistet, an der Sie sich unter

https://doodle.com/poll/g9chw882gzvwk5kb

bis zum kommenden Freitag, den 17. Juli 2020, beteiligen können (bitte dort Namen und/oder Matrikelnummer angeben). Ich werde den Termin mit den wenigsten Kollisionen wählen und mich zu Beginn der kommenden Woche noch einmal an Sie wenden.

Ilmenau, den 13. Juli 2020 · Matthias Kriesell

[1] Grundlage ist die vom Senat am 9. Juni 2020 beschlossene und vom Rektor am 12. Juni 2020 genehmigte „Satzung zu Besonderen Bestimmungen für Studium, Prüfungswesen und Promotion aufgrund der Virus SARS-CoV-2-Pandemie 2020".

(Fortsetzung Kapitel 3: Pólya-Theorie)

Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ bestehend aus einer endlichen Menge $V = V(G)$ von *Ecken* und einer Menge $E = E(G)$ von gewissen zweielementigen Teilmengen von $V(G)$, den *Kanten*. Statt $\{x, y\}$ schreiben wir in diesem Kontext kurz xy (insbesondere gilt $xy = yx$). Sind G, H Graphen, so heißt eine Abbildung $\varphi : V(G) \to V(H)$ mit

$$xy \in E(G) \longleftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E(H)$$

für alle $x \neq y$ aus $V(G)$ ein *Isomorphismus* von G nach H. G heißt *isomorph* zu H, falls ein Isomorphismus von G nach H existiert, und wir schreiben dann $G \cong H$. Die hierdurch definierte Relation $\cong$ auf der Klasse aller Graphen ist eine Äquivalenzrelation.

Wieviele Äquivalenzklassen n-eckiger Graphen gibt es? Zunächst genügt es, nur Graphen auf einundderselben n-elementigen Eckenmenge V zu betrachten. Sei X die Menge *aller* 2-elementigen Teilmengen von V. Die charakteristische Funktion eines Graphen G auf V ist die durch

$$f_G(xy) := \begin{cases} 1 & \text{falls } xy \in E(G) \text{ und} \\ 0 & \text{falls } xy \in X \setminus E(G) \end{cases}$$

definierte Funktion $f_G : X \to \{0, 1\}$. Die Abbildung $G \mapsto f_G$ ist eine Bijektion von der Menge M aller Graphen auf V in die Menge aller Abbildungen $f : X \to \{0, 1\}$, M entspricht also $\{0, 1\}^X$.

Sei $\tau \in S_V$. Dann ist mit $\{x, y\} \in X$ auch $\tau(x)\tau(y) = \{\tau(x), \tau(y)\} \in X$, und durch

$$\tau'(xy) = \tau(x)\tau(y)$$

wird eine Abbildung $\tau' : X \to X$ definiert. Aus $\tau'(ab) = \tau'(cd)$ folgt $\tau(a)\tau(b) = \tau(c)\tau(d)$ und daraus $(\tau(a), \tau(b)) = (\tau(c), \tau(d))$ oder $(\tau(a), \tau(b)) = (\tau(d), \tau(c))$. Weil τ injektiv ist, kommt $(a, b) = (c, d)$ oder $(a, b) = (d, c)$, in jedem Fall $ab = cd$. Damit ist auch τ' injektiv, folglich bijektiv, also aus S_X. Durch

$$h : S_V \to S_X, h(\tau) := \tau'$$

wird dann ein Homomorphismus definiert, denn $(h(\tau\circ\sigma))(xy) = (\tau\circ\sigma)'(xy) = \tau(\sigma(x))\tau(\sigma(y)) = \tau'(\sigma(x)\sigma(y)) = \tau'(\sigma'(xy)) = (\tau' \circ \sigma')(xy) = (h(\tau) \circ h(\sigma))(xy)$ für alle $xy \in X$. Das heißt, S_V wirkt in X vermöge h. Wir konstruieren daraus h' wie in Satz 3.3 und bemerken, daß zwei Graphen G, H auf V genau dann isomorph sind, wenn f_G und f_H im selben Orbit unter der Wirkung von S_V vermöge h' liegen (Übung). Daher ist die gesuchte Zahl von Isomorphieklassen die Zahl der Orbits unter der Wirkung von S_V vermöge h'.

Schon für $|V| = 5$ Ecken wird das Problem groß: S_V hat dann 120 Elemente und wirkt auf der 10-elementigen Menge X. Der Typ von $\tau \in S_V$ legt jedoch den Typ von $h(\tau) \in S_X$ fest, und allzuviele Typen treten in S_V, $|V| = 5$ nicht auf, so daß wir wie folgt tabellieren können

Typ von τ	Anzahl	Typ von $h(\tau)$	Zyklenzahl
$(5,0,0,0,0)$	1	$(10,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$	10
$(3,1,0,0,0)$	10	$(4,3,0,0,0,0,0,0,0,0)$	7
$(2,0,1,0,0)$	20	$(1,0,3,0,0,0,0,0,0,0)$	4
$(1,0,0,1,0)$	30	$(0,1,0,2,0,0,0,0,0,0)$	3
$(0,0,0,0,1)$	24	$(0,0,0,0,2,0,0,0,0,0)$	2
$(1,2,0,0,0)$	15	$(2,4,0,0,0,0,0,0,0,0)$	6
$(0,1,1,0,0)$	20	$(1,0,1,0,0,0,1,0,0,0)$	3
	120		

Zum Beispiel ist in Zeile 4 zunächst nach der Anzahl von Permutation mit einem Viererzyklus (und einem Fixpunkt) gefragt. Der Fixpunkt läßt sich auf 5 Weisen festlegen, die übrigen 4 Ecken erlauben $4! = 24$ Permutationen, von denen jedoch je vier denselben Zyklus bezeichnen; somit gibt es $5 \cdot (24/4) = 30$ Permutationen des Typs $(1,0,0,1,0)$ in S_V. Die durch ein solches τ bewirkte Permutation von X enthält zwei Zyklen der Länge 4: der eine besteht aus den 4 mit dem Fixpunkt von τ in V inzidenten Kanten, der zweite aus den Kanten des durch den Zyklus definierten Kreises. Die beiden „Sehnen" dieses Kreises bilden einen Zyklus der Länge 2. Ist zum Beispiel $\tau = (1\,2\,3\,4) \circ (5)$, so ist

$$h(\tau) = (15\ 25\ 35\ 45) \circ (12\ 23\ 34\ 14) \circ (13\ 24).$$

Hieraus kann man nun die d_k für Satz 3.3 ablesen:

$$d_2 = 24,\ d_3 = 50,\ d_4 = 20,\ d_6 = 15,\ d_7 = 10,\ d_{10} = 1,$$

ferner $d_1 = d_5 = d_8 = d_9 = 0$. Die gesuchte Zahl m von Orbits ist also

$$m = \frac{1}{120}(24 \cdot 2^2 + 50 \cdot 2^3 + 20 \cdot 2^4 + 15 \cdot 2^6 + 10 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^{10}) = 34.$$

*

Wir kommen zurück zum Würfeldrehen. Anstelle der Wirkung der Drehungen in die Menge der acht Ecken des Würfels betrachten wir die Wirkung in die Menge der sechs Seiten und stellen die Typen fest:

Die Drehachse verbindet...	Winkel	Anzahl	Typ	Zyklen
...Mitten gegenüberliegender Seiten	0π	1	$(6,0,0,0,0,0)$	6
	π	3	$(2,2,0,0,0,0)$	4
	$\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$	6	$(2,0,0,1,0,0)$	3
...Mitten gegenüberliegender Kanten	π	6	$(0,3,0,0,0,0)$	3
...zwei gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	8	$(0,0,2,0,0,0)$	2
		24		

Hieraus ergibt sich der Zyklenindex

$$p(x_1,\dots,x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

Wie man vielleicht schon ahnt, ist damit die Anzahl der mit zwei Farben seitengefärbten Würfel — wobei solche die sich durch Drehung auseinander ergeben als gleich angesehen werden — gleich dem Wert von p an der Stelle $(2,2,2,2,2,2)$, also gleich

$$p(2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{24}(2^6 + 3 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2) = 10.$$

Anhand dieses Beispiels werden wir abschließend den großen Satz von PÓLYA illustrieren. Er erlaubt zum Beispiel Antworten auf Fragen folgender Art: Wieviele wesentliche Färbungen der Seiten eines Würfels mit den Farben rot, grün und blau gib es, bei denen eine Seite rot, zwei Seiten grün, und drei Seiten blau gefärbt sind?

Satz 3.4. (Großer Satz von PÓLYA, ohne Beweis)

Seien X, Y endliche Mengen, wirke die endliche Gruppe G vermöge h in X und vermöge h' wie in Satz 3.3 in Y^X. Sei weiter $w : Y \to Q$ eine Gewichtsfunktion, wobei Q irgendein kommutativer Oberring von $\mathbb{Q}$ sei. Wir setzen w durch

$$w(f) := \prod_{x \in X} w(f(x)) \in Q$$

für $f \in Y^X$ fort. Sei $f_1, \ldots, f_r$ ein Repräsentantensystem der r Orbits von Y^X unter der Wirkung h'. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{r} w(f_j) = p_G\big(\sum_{y \in Y} w(y), \sum_{y \in Y} (w(y))^2, \sum_{y \in Y} (w(y))^3, \ldots, \sum_{y \in Y} (w(y))^\ell\big).$$

Die linke Seite wird *Konfigurationsreihe* genannt und ist unahängig von der konkreten Wahl der Repräsentanten. □

Für das oben genannte Dreifärbungsproblem betrachten wir die Menge der 6 Seiten des Würfels, Y die Menge der drei Farben Rot, Grün, Blau, und folgende Gewichtsfunktion w von Y in den Ring $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$:

$$w(\text{Rot}) := \alpha,\ w(\text{Grün}) := \beta,\ w(\text{Blau}) := 1.$$

Eine einzelne Färbung f mit einer rot- und zwei grüngefärbten Seiten bekommt daher das Gewicht $w(f) = \alpha\beta^2$, und die Anzahl aller solchen f ist der (ganzzahlige) Koeffizient vor $\alpha\beta^2$ in der Konfigurationsreihe. Hierzu betrachten wir den Zyklenindex

$$p(x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

und überlegen uns, in welchen der fünf Summanden welche Beiträge zum Koeffizienten vor $\alpha\beta^2$ nach Einsetzung von $(1 + \alpha + \beta)^i$ für x_i auftreten. Für x_1^6

kommt durch zweimaliges Anwenden des Binomialsatzes:

$$x_1^6 = (1+\alpha+\beta)^6 = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j} (\alpha+\beta)^j = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \alpha^i \beta^{j-i}.$$

Beiträge kommen also für den Fall $i = 1$ und $j - i = 2$, also $i = 1$ und $j = 3$, und dort steht der Koeffizient $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} = 20 \cdot 3 = 60$. — Für den Summanden $3x_1^2 x_2^2$ erhalten wir

$$3x_1^2 x_2^2 = 3 \cdot \underbrace{(1+\alpha+\beta)^2}_{(1+\beta)^2 + \underline{2\alpha(1+\beta)} + \alpha^2} \cdot \underbrace{(1+\alpha^2+\beta^2)^2}_{\underline{(1+\beta^2)^2} + 2\alpha^2(1+\beta^2) + \alpha^4}.$$

Ein Betrag vor $\alpha\beta^2$ kommt nur im Produkt der beiden unterstrichenen Teile der Summenzerlegung vor, und zwar dort in Höhe von $3 \cdot 2\alpha \cdot 2\beta^2 = 12 \cdot \alpha\beta^2$. Im Summanden

$$6x_1^2 x_4 = 6(1+\alpha+\beta)^2(1+\alpha^4+\beta^4)$$

kommen Beiträge vor $\alpha\beta^2$ nicht vor, weil sie schon in $(1+\alpha+\beta)^2$ nicht auftreten. In den Summanden $6x_2^2$ und $8x_3^2$ treten nur Beiträge zu $\alpha^j\beta^i$ auf, wenn j (und auch i) durch 2 bzw. durch 3 teilbar ist — also auch hier keine Beiträge vor $\alpha\beta^2$. Daher ist der Koeffizient vor $\alpha\beta^2$ in der Koeffizientenreihe gleich

$$\frac{1}{24}(60+12) = 3,$$

die Anzahl der fraglichen Färbungen ist darum gleich 3.