Prof. Dr. Matthias Kriesell
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

2. Studienbrief zur Diskreten Mathematik

Im Stoff dieser Woche werden an zwei Stellen Varianten der Methode des „doppelten Abzählens" angewendet. Es geht meist darum, eine Identität oder auch Ungleichung zu beweisen, in dem man zwei kombinatorische Interpretationen der beteiligten Größen findet (vgl. auch Wikipedia).

Hier kommt eine ganz ausführliche Beispielanwendung. Sei $G = (V, E)$ ein Graph (wie in Übung 1). Für $x \in V$ sei $d_G(x) := |\{e \in E : x \in e\}|$ die Anzahl der Kanten von G, die x als Endpunkt besitzen, der sogenannte *Grad* von x in G. Wir wollen zeigen: $\sum_{x \in V} d_G(x) = 2|E|$. Hier geht es also darum, daß die linke Seite als das Zweifache der Kantenzahl (die kanonische Interpretation der rechten Seite) angesehen werden darf. Der Schlüssel liegt in der offensichtlichen Gleichung $d_G(x) = |\{e \in E : x \in e\}| = \sum_{\substack{e \in E \\ x \in e}} 1$, die es erlaubt, die linke Seite als Doppelsumme darzustellen:

$$\sum_{x \in V} d_G(x) = \sum_{x \in V} \sum_{\substack{e \in E \\ x \in e}} 1.$$

Wir summieren also über alle Paare (x, e) aus $V \times E$ mit $x \in e$, und jeder Summand ist konstant 1. Da V und E beide endlich sind, dürfen wir die Summationsreihenfolge ändern, also erst über E und dann über V summieren. Die Kopplungsbedingung $x \in e$ bleibt unter dem letzten Summanden erhalten:

$$\sum_{x \in V} d_G(x) = \sum_{e \in E} \sum_{\substack{x \in V \\ e \in E}} 1.$$

Nun enthält jede Kante e genau zwei Ecken, also $\sum_{\substack{x \in V \\ e \in E}} 1 = 2$, folglich:

$$\sum_{x \in V} d_G(x) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|.$$

Das verkürzte Argument kann man zum Beispiel so formulieren: „In der Gradsumme $\sum_{x \in V} d_G(x)$ wird jede Kante des Graphen G doppelt gezählt, jeweils einmal beim Grad ihrer beiden Endecken."

Dieselbe Methode kann man auch zum („doppelten") *Abschätzen* verwenden, hierzu ein weiteres Beispiel: Gegeben sei eine Menge $\mathfrak{A}$ von ℓ-elementigen Mengen und eine Menge $\mathfrak{B}$ von k-elementigen Mengen derart, daß

(*) zu jedem $X \in \mathfrak{A}$ wenigstens zwei Mengen $Y \in \mathfrak{B}$ mit $X \subseteq Y$ existieren.

Es ist klar, daß bei gegebenem $\mathfrak{B}$ die Menge $\mathfrak{A}$ nicht beliebig groß werden kann (die Mengen aus $\mathfrak{A}$ müssen ja in denen aus $\mathfrak{B}$ „untergebracht" werden können), $|\mathfrak{A}|$ also nach oben beschränkt durch eine Funktion von $\mathfrak{B}$ ist. Wir können das präzisieren, indem wir die Größe der Menge E aller Paare $(X, Y) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ mit $X \subseteq Y$ auf zwei Weisen abschätzen: Infolge der Bedingung (*) folgt zunächst $|E| \geq 2 \cdot |\mathfrak{A}|$, andererseits enthält aber eine k-elementige Menge (nur) genau $\binom{k}{\ell}$ viele ℓ-elementige Teilmengen überhaupt und damit eine Menge aus $\mathfrak{B}$ höchstens $\binom{k}{\ell}$ viele Teilmengen, die aus $\mathfrak{A}$ stammen, also: $|E| \leq \binom{k}{\ell} \cdot |\mathfrak{B}|$. Zusammengefasst erhält man

$$2 \cdot |\mathfrak{A}| \leq |E| \leq \binom{k}{\ell} \cdot |\mathfrak{B}|,$$

also $|\mathfrak{A}| \leq |E| \leq \frac{1}{2} \cdot \binom{k}{\ell} \cdot |\mathfrak{B}|$. Man kann sich das Problem auch durch einen bipartiten Graphen mit Klassen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und Kantenmenge E modelliert vorstellen.

*

Der Stoff der folgenden vier Seiten taugt *für anderthalb Wochen* und entsprechend wird der nächste Brief ein wenig kürzer ausfallen (enthält dann aber auch wieder Übungen). Ich wollte jedoch den Ausflug in die „extremal set theory" in einem einzigen Brief zusammenstellen. Neben der Leseanleitung für das doppelte Abzählen hier noch zwei weitere Hinweise zur Lektüre.

Erstens: Der außerordentlich kurze Beweis von Satz 1.5 beruht darauf, zunächst abzuschätzen, wieviele Mengen von $\mathfrak{A}$ (siehe dort) als Intervalle einer festen, zirkulären Anordnung auftreten können. Versuchen Sie, sich für dieses Argument ein geeignetes „Intervalldiagramm" zu verschaffen (zirkulär oder auch nicht, der Kreis ist gerade lang genug, um Intervallüberschneidungen „an beiden Enden" nicht zu ermöglichen).

Zweitens: Die dem Satz 1.4 nachgestellte Betrachtung zeigt nicht nur, daß die Schranke $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ im Satz nicht zu verbessern („bestmöglich", „scharf") ist sondern beschreibt sogar die Antiketten, für die die Gleichheit herrscht. Dem Satz wird also ein weiteres Gütesiegel verliehen. Überlegen Sie sich übungsweise, daß auch die Abschätzung in Satz 1.5 bestmöglich ist.

*

Abschließend noch die Antwort auf eine Frage aus Ihren Reihen, und zwar nach der Detailstufe der Übungsaufgaben: Versuchen Sie bitte, so zu formulieren, daß Ihre Ausführungen ohne das „Audio" eines Vortrags in einer Präsenzübung zu verstehen ist... Mit anderen Worten: Nicht *zu* skizzenhaft.

Ilmenau, den 26. April 2020 · Matthias Kriesell

(Fortsetzung Kapitel 1: Mengensysteme mit Symmetrieeigenschaften)

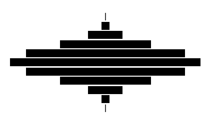
Wir wollen jetzt auf die Einteilung der Menge $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_n)$ in die Schichten $\mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)$ zurückkommen. Die Schichtgrößen kann man in einer Zeile des PASCALschen Dreiecks

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ \vdots \end{array}$$

ablesen. Die elfte Zeile

$$1\ 10\ 45\ 120\ 210\ 252\ 210\ 120\ 45\ 10\ 1$$

liefert zum Beispiel folgenden „Kontur" des HASSE-Diagramms von $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_{10})$:



Alle Schichten von $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_n)$ sind Antiketten, und sie werden in der Mitte am größten: Für gerades n gibt es eine Mittelschicht der Größe $\binom{n}{n/2}$, für ungerade n gibt es zwei der Größe $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$. Das schließt natürlich zunächst nicht aus, daß es Antiketten mit *mehr* als $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Elementen geben könnte, die sich mindestens zweier Schichten bedienen. Der Satz 1.4 von SPERNER besagt, daß das *nicht* eintritt.

Für $\ell < n/2$ werden wir zunächst zeigen, daß $\binom{n}{\ell} \le \binom{n}{\ell+1}$ gilt, indem wir eine Injektion φ von der ℓ-ten in die $(\ell+1)$-te Schicht von $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_n)$ konstruieren. Der Satz 1.2 von HALL ermöglicht, daß sogar stets $X \subseteq \varphi(X)$ gilt; eine solche Abbildung heißt auch *extensiv*, entsprechend heißt eine Abbildung mit $\varphi(X) \subseteq X$ für alle Argumente X *intensiv*.

Ein analoger Sachverhalt gilt für $\ell > n/2$, beides ist im folgenden Lemma zusammengefaßt. Teilmengen von $\mathfrak{P}(M)$ sind konsequent in Fraktur gesetzt, Elemente aus $\mathfrak{P}(M)$ (also Teilmengen von M) durch lateinische Großbuchstaben bezeichnet.

Lemma 1.3. (Schichtwechsel-Lemma)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{N}_n \cup \{0\}$. Dann gilt:

(i) Ist $\ell < \frac{n}{2}$, so existiert eine extensive Injektion $\varphi : \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n) \to \mathfrak{P}_{\ell+1}(\mathbb{N}_n)$.

(ii) Ist $\ell > \frac{n}{2}$, so existiert eine intensive Injektion $\varphi : \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n) \to \mathfrak{P}_{\ell-1}(\mathbb{N}_n)$.

Beweis. Zum Nachweis von (i) betrachte man die Familie

$$(\mathfrak{A}_X)_{X\in\mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)}, \text{ worin } \mathfrak{A}_X := \{Y \in \mathfrak{P}_{\ell+1}(\mathbb{N}_n) : Y \supseteq X\}$$

sei. Weil jedes $X \in \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)$ genau $n-\ell$ Obermengen in $\mathfrak{P}_{\ell+1}(\mathbb{N}_n)$ besitzt und jedes $Y \in \mathfrak{P}_{\ell+1}(\mathbb{N}_n)$ genau $\ell+1$ Teilmengen in $\mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)$, gibt es zu $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)$ einerseits genau $(n-\ell)\cdot|\mathfrak{J}|$ Paare $(X,Y) \in \mathfrak{J} \times (\bigcup_{X\in\mathfrak{J}} \mathfrak{A}_X)$ mit $X \subseteq Y$, andererseits aber höchstens $(\ell+1)\cdot|\bigcup_{X\in\mathfrak{J}} \mathfrak{A}_X|$ viele. Hieraus folgt

$$|\bigcup_{X\in\mathfrak{J}} \mathfrak{A}_X| \geq \tfrac{\ell+1}{n-\ell}\cdot|\mathfrak{J}| \geq |\mathfrak{J}|.$$

Somit gibt es nach dem Satz von HALL ein Repräsentantensystem

$$(A_X)_{X\in\mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)},$$

und die durch $\varphi(X) := A_X$ bestimmte Abbildung leistet das Gewünschte.

Zum Nachweis von (ii) sei $\ell > \frac{n}{2}$; dann ist $n-\ell < \frac{n}{2}$, also existiert nach (i) eine Injektion $\psi : \mathfrak{P}_{n-\ell}(\mathbb{N}_n) \to \mathfrak{P}_{n-\ell+1}(\mathbb{N})$ mit $\psi(X) \supseteq X$ für alle Argumente X. Die durch $\varphi(X) := \mathbb{N}_n \setminus \psi(\mathbb{N}_n \setminus X)$ für $X \in \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)$ definierte Abbildung leistet dann das Gewünschte. □

Satz 1.4. (Satz von SPERNER 1928)

Eine Antikette in $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_n)$ hat höchstens $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ Elemente.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ eine beliebige Antikette in $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_n)$ und $\ell(\mathfrak{A}) := \ell := \min\{|X| : X \in \mathfrak{A}\}$. Ist $\ell < \frac{n}{2}$ so sei φ wie in Lemma 1.3.(i). Wir ersetzen nun die ℓ-elementigen Teilmengen aus $\mathfrak{A}$ durch ihre $(\ell+1)$-elementigen Bilder unter φ. Das so entstehende

$$\mathfrak{A}' := (\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n) \cup \varphi(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n))$$

ist eine Antikette (warum?) mit $|\mathfrak{A}'| = |\mathfrak{A}|$ (warum?) und $\ell(\mathfrak{A}') = \ell+1$. Durch induktive Anwendung erhält man also eine Antikette $\mathfrak{A}''$ mit $|\mathfrak{A}''| = |\mathfrak{A}|$ ohne Mengen mit weniger als $\frac{n}{2}$ Elementen. Durch analoge, induktive Anwendung von Lemma 1.3.(ii) gewinnt man daraus eine Antikette $\mathfrak{A}'''$ mit $|\mathfrak{A}'''| = |\mathfrak{A}|$ und $\mathfrak{A}''' \subseteq \mathfrak{P}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(\mathbb{N}_n)$. Somit ist $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}'''| \leq \mathfrak{P}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(\mathbb{N}_n) = \binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ □

Es gilt sogar: Ist $\mathfrak{A}$ eine Antikette in $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_n)$ mit $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ Elementen, so ist $\mathfrak{A} \in \{\mathfrak{P}_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(\mathbb{N}_n), \mathfrak{P}_{\lceil\frac{n}{2}\rceil}(\mathbb{N}_n)\}$: Denn hätte $\mathfrak{A}$ Elemente unterschiedlicher Größe oder wäre ganz in einem $\mathfrak{P}_k(\mathbb{N}_n)$ für ein $k \notin \{\lfloor n/2\rfloor, \lceil n/2\rceil\}$ enthalten, so dürften wir annehmen, daß es ein $X \in \mathfrak{A}$ mit $|X| < n/2$ gibt (sonst gehen wir zur Antikette aller Komplemente von Elementen aus $\mathfrak{A}$ über). Folglich ist $\ell := \min\{|X| : X \in \mathfrak{A}\} < n/2$.

Seien die $\mathfrak{A}_X$ wie im Beweis zu Lemma 1.3.(i), $\mathfrak{J} := \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)$ und $\mathfrak{B} := \bigcup_{X\in\mathfrak{J}} \mathfrak{A}_X$. Im Fall $\ell < \frac{n-1}{2}$ liefert das dortige Abzählargument bereits $|\mathfrak{B}| > |\mathfrak{J}|$.

Im Fall $\ell = \frac{n-1}{2}$ (also n ungerade und $\ell = \lfloor n/2 \rfloor$) gilt das auch: Wären nämlich für jedes $Y \in \mathfrak{B}$ alle $\ell + 1$ vielen ℓ-elementigen Teilmengen von Y wieder aus $\mathfrak{J}$, so wäre mit jeder Menge $X \in \mathfrak{J}$ auch jede Menge, die sich durch Austauschen eines Elementes aus X gegen eines aus $\mathbb{N}_n \setminus X$ erzeugen läßt, wieder in $\mathfrak{J}$. Durch sukzessives Tauschen, beginnend mit einer Menge aus $\mathfrak{J}$, lassen sich aber *alle* Elemente aus $\mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)$ herstellen, so daß $\mathfrak{J} = \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_n)$ folgt; dies impliziert $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}$ wegen $|\mathfrak{J}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = |\mathfrak{A}|$, was der Annahme zuwiderläuft, daß $\mathfrak{A}$ Mengen verschiedener Größe besitzt oder ganz in einem $\mathfrak{P}_k(\mathbb{N}_n)$ für ein $k \notin \{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil\}$ enthalten ist. Daher gibt es wenigstens ein $Y \in \mathfrak{B}$ so, daß nicht alle — also weniger als $\ell+1$ viele — seiner ℓ-elementigen Teilmengen in $\mathfrak{J}$ liegen, also folgt $|\mathfrak{B}| > |\mathfrak{J}|$ mit dem Abzählargument des Beweises von Lemma 1.3.(i).

In jedem Fall gilt also $|\mathfrak{B}| > |\mathfrak{J}|$. Ist nun φ eine extensive Injektion wie in Lemma 1.3.(i), so ist wie im Beweis des Satzes von SPERNER zunächst auch $\mathfrak{A}' := (\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{J}) \cup \varphi(\mathfrak{J})$ eine Antikette mit $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Elementen — doch erhält man durch Hinzufügen eines Elementes aus $\mathfrak{B} \setminus \varphi(\mathfrak{J})$ sogar noch eine größere (nachprüfen!), im Widerspruch zur Aussage des Satzes von SPERNER.

*

Wie groß kann eine Menge paarweise nicht-disjunkter ℓ-elementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge sein? Im Fall $\ell > n/2$ ist die Frage trivial, je zwei ℓ-elementige Teilmengen haben dann wenigstens ein Element gemeinsam. Für $\ell \leq n/2$ ist das Problem dagegen nicht-trivial, der folgende Satz gibt eine Antwort.

Satz 1.5. (Satz von ERDŐS, KO, RADO)

Sei $\ell \leq \frac{n}{2}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{Z}_n)$ mit $X \cap Y \neq \emptyset$ für alle X, Y aus $\mathfrak{A}$.
Dann ist $|\mathfrak{A}| \leq \binom{n-1}{\ell-1}$.

Beweis. Für $x \in \mathbb{Z}_n$ und $\ell \in \mathbb{N}$ sei $[x, x+\ell) := \{x, x+1, \ldots, x+\ell-1\}$ sowie $\mathfrak{F} := \{[x, x+\ell) : x \in \mathbb{Z}_n\}$. Ist konkret $[x, x+\ell) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$, so hat jedes Intervall aus $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$ die Gestalt $[x+a, x+a+\ell)$ für ein $a \in K := \{a \in \mathbb{Z} : -a < \ell < a\}$, da es ja ein Element mit $[x, x+\ell)$ gemeinsam haben muß. Ist $b := \min K$ und $c := \max K$, so gilt außerdem $b+\ell > c$, weil $[x+b, x+b+\ell)$ und $[x+c, x+c+\ell)$ ein Element gemeinsam haben müssen. Es folgt $|K| \leq \ell$ und somit $|\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}| \leq \ell$.

Benennt man die Elemente in $\mathbb{Z}_n$ und ensprechend die Elemente der Intervalle aus $\mathfrak{F}$ um, so hat natürlich auch die modifizierte Intervallmenge höchstens ℓ Elemente mit $\mathfrak{A}$ gemeinsam; formal: Ist $\sigma \in S_{\mathbb{Z}_n}$ eine Permutation von $\mathbb{Z}_n$ und $\sigma(\mathfrak{F}) = \{\sigma(X) : X \in \mathfrak{F}\}$, so folgt $|\sigma(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A}| \leq \ell$.

Wir verwenden die Methode des doppelten Abzählens: Zu jedem $X \in \mathfrak{A}$ und jedem $x \in \mathbb{Z}_n$ gibt es genau $\ell! \cdot (n-\ell)!$ viele $\sigma \in S_{\mathbb{Z}_n}$ mit $X = \sigma([x, x+\ell))$ (man prüfe das nach!), und so kommt:

$$
\begin{aligned}
n! \cdot \ell &\geq \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_n} |\sigma(\mathfrak{F}) \cap A| \\
&= \sum_{\sigma \in S_{\mathbb{Z}_n}} \sum_{x \in \mathbb{Z}_n} \sum_{\substack{X \in \mathfrak{A} \\ X = \sigma([x, x+\ell))}} 1 \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}_n} \sum_{X \in \mathfrak{A}} \sum_{\substack{\sigma \in S_{\mathbb{Z}_n} \\ X = \sigma([x, x+\ell))}} 1 \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}_n} \sum_{X \in \mathfrak{A}} \ell! \cdot (n-\ell)! \\
&= n \cdot |\mathfrak{A}| \cdot \ell! \cdot (n-\ell)!,
\end{aligned}
$$

also $|\mathfrak{A}| \leq \frac{n! \cdot \ell}{n \cdot \ell! \cdot (n-\ell)!} = \binom{n-1}{\ell-1}$. □

Folgerung 1.6.

Sei $k \leq \frac{n}{2}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}_{\leq k}(\mathbb{Z}_n)$ mit $X \cap Y \neq \emptyset$ für alle X, Y aus $\mathfrak{A}$.
Dann ist $|\mathfrak{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}_k(\mathbb{Z}_n)$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus 1.5. Andernfalls ist $\ell := \ell(\mathfrak{A}) := \min\{|X| : X \in \mathfrak{A}\} < k \leq \frac{n}{2}$. Nach 1.3.(i) existiert eine Injektion $\varphi : \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{Z}_n) \to \mathfrak{P}_{\ell+1}(\mathbb{Z}_n)$ mit $\varphi(X) \supseteq X$ für alle $X \in \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{Z}_n)$, und $\mathfrak{A}' := (\mathfrak{A} - \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{Z}_n)) \cup \varphi(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{Z}_n))$ ist eine Antikette mit $|\mathfrak{A}'| = |\mathfrak{A}|$ und $X \cap Y \neq \emptyset$ für X, Y aus $\mathfrak{A}'$ und $\ell(\mathfrak{A}') > \ell(\mathfrak{A})$. Induktiv erhält man eine Antikette $\mathfrak{A}''$ mit $|\mathfrak{A}''| = |\mathfrak{A}|$ und $X \cap Y \neq \emptyset$ für X, Y aus $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}'' \subseteq \mathfrak{P}_k(\mathbb{Z}_n)$, und Satz 1.5. liefert die Behauptung. □

Die Satz 1.4, Satz 1.5 und Folgerung 1.6 sind Klassiker der sogenannten „extremal set theory". Eine wesentliche, offene Frage aus diesem Bereich ist die „Union-Closed-Sets-Conjecture" von FRANKL. Sie besagt, daß zu jeder $\cup$-abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ von Teilmengen einer endlichen Menge S ein Element aus S existiert, das in wenigstens der Hälfte aller Mengen aus $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Die Frage wurde bislang bejaht unter anderem in den Fällen $|\mathfrak{M}| \leq 50$, $|S| \leq 12$ sowie $\min\{|X| : X \in \mathfrak{M}\} \leq 2$.