Prof. Dr. Matthias Kriesell
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

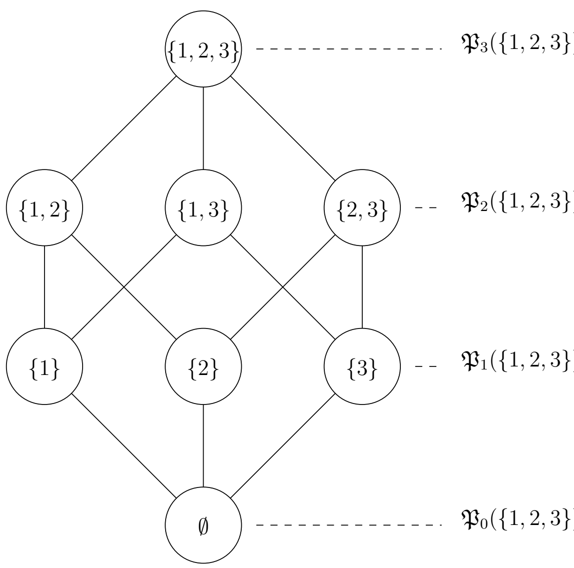
3. Studienbrief zur Diskreten Mathematik

Aus Ihren Kreisen kam die Frage, warum denn die *Schichten* so heißen.

Hier noch einmal das HASSE-Diagramm der durch $\subseteq$ geordneten Menge

$$\mathfrak{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

In den Zeilen kann man die vier „Schichten" $\mathfrak{P}_i(\{1,2,3\})$, $i \in \{3,2,1,0\}$ erkennen.



Der Begriff „Schicht" ist rein intuitiv gewählt, wird aber gelegentlich in der Ordnungstheorie formal benutzt. Ist S die Menge der minimalen Elemente einer endlichen, durch $\leq$ geordneten Menge M, so kann man die *Höhe* eines Elementes x als Länge eines kürzesten Aufwärtsweges von einem Element aus S nach x im HASSE-Diagramm von M definieren. Ein *Aufwärtsweg* von a nach b der *Länge* ℓ ist eine Folge $x_0, \ldots, x_\ell$ paarweise verschiedener Elemente aus M mit $x_0 = a, x_\ell = b$ und $x_{i-1} \leq x_i$ sowie $x_{i-1} \leq z \leq x_i \to z \in \{x_{i-1}, x_i\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ und alle $z \in M$.

Die i-te *Schicht* ist dann die Menge aller Elemente der Höhe i. Besitzt M sogar ein kleinstes Element $\perp$, so ist dies das einzige minimale Element, und die Höhe von x ist schlicht die Länge eines kürzesten Aufwärtsweges von $\perp$ nach x im *Hasse*-Diagramm.

Ilmenau, den 3. Mai 2020 · Matthias Kriesell

Sei P eine endliche Menge und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(P)$. Das Paar $(P, \mathfrak{B})$ heißt (einfache, endliche) *Inzidenzstruktur* mit *Punkten* P und *Blöcken* $\mathfrak{B}$. Ein Punkt $x \in P$ und ein Block $B \in \mathfrak{B}$ *inzidieren*, falls $x \in B$ gilt. (Alternativ heißt $(P, \mathfrak{B})$ *Hypergraph* mit *Ecken* P und *Kanten* $\mathfrak{B}$.) Die Inzidenzstruktur heißt k-*uniform*, falls $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}_k(P)$ gilt, und *endlich*, falls P endlich ist. In diesem Sinn sind zum Beispiel die 2-uniforme Inzidenzstrukturen gerade die *Graphen*, und Satz 1.5 ist ein Satz über ℓ-uniforme Inzidenzstrukturen. Für $x \in P$ wird mit $\mathfrak{B}(x) := \{B \in \mathfrak{B} : x \in B\}$ die Menge aller mit x inzidierenden Blöcke bezeichnet. Zwei Inzidenzstrukturen $H = (P, \mathfrak{B})$ und $H' = (P', \mathfrak{B}')$ heißen *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : P \to P'$ mit $\{\varphi(B) : B \in \mathfrak{B}\} = \mathfrak{B}'$ gibt. Ein solches φ heißt auch ein *Isomorphismus* von H nach H'.

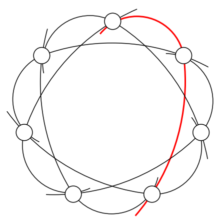
Spezielle Inzidenzstrukturen können z. Bsp. als BERGE-Diagramm dargestellt werden. Dabei werden die Punkte durch Punkte in der Ebene dargestellt, einelementige Blöcke durch Kreise („Schlingen") bei ihrem Punkt und zweielementige Blöcke durch einen JORDAN-Kurve zwischen ihren zwei Punkten; noch größere Blöcke B werden durch eine geschlossene JORDAN-Kurve dargestellt, deren Innengebiet die Punkte aus B und deren Außengebiet die Punkte aus $P \setminus B$ enthält.

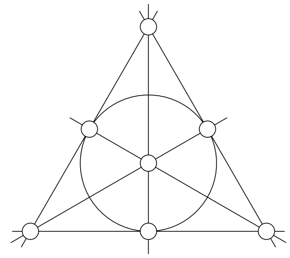
Alternativ kann ein beliebiger nichtleerer Block durch eine offene (oder auch geschlossene) JORDAN-Kurve dargestellt werden, die alle Punkte aus B als innere Punkte und keine Punkte aus $P \setminus B$ enthält. Da wir hauptsächlich kombinatorische Geometrien studieren werden und über die Blöcke gerne als über „Geraden" nachdenken wollen (ohne daß sie in der graphischen Darstellung solche sein müssen), ist diese Darstellung etwas zweckmäßiger.

Zur Veranschaulichung hier zwei Bilder der Inzidenzstruktur $H = (\mathbb{Z}_7, \mathfrak{B})$ mit

$$\mathfrak{B} = \{\{0,1,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,6\}, \{4,5,0\}, \{5,6,1\}, \{6,0,2\}\}.$$

Der erste Block in der Menge wird also zyklisch durch $\mathbb{Z}_7$ rotiert, woraus sich das linke Bild ergibt. Außerdem kann man ablesen, daß die durch $x \mapsto x + 1$ gegebene Permutation von $\mathbb{Z}_7$ ein Isomorphismus von H nach H selbst ist, ein sogenannter *Automorphismus* von H. Das rechte Bild stellt dieselbe Struktur dar und ist das gängige Bild der sogenannten FANO-*Ebene*. Man beschrifte übungsweise die Punkte beider Bilder korrekt. Dafür gibt es sehr viele Möglichkeiten, da es zahlreiche Symmetrien gibt: Die zyklische (Siebener-) Symmetrie sieht man dem linken Bild gut an, im rechten Bild kann man Spiegelsymmetrien und Dreier-Symmetrien erkennen.





Wir entlehnen zwei fundamentale Eigenschaften aus der Geometrie der euklidischen Ebene: Eine Gerade enthält mehr als einen Punkt, und: durch je zwei Punkte läuft genau eine Gerade. Beides kann sinnvoll in einer Inzidenzstruktur interpretiert werden, den Eigenschaften (i) und (ii) des folgenden Satzes, und hat eine wichtige Implikation.

Satz 1.7 (Satz von DE BRUIJN und ERDŐS 1948)

Sei $(P, \mathfrak{B})$ eine Inzidenzstruktur mit

(i) $|B| \geq 2$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ und:

(ii) Zu $x \neq y$ aus P existiert genau ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $x \in B$ und $y \in B$.

Dann gilt $|\mathfrak{B}| \leq 1$ oder $|\mathfrak{B}| \geq |P|$, und im Fall der Gleichheit gibt es zu $B \neq C$ aus $\mathfrak{B}$ genau ein x mit $x \in B$ und $y \in C$; dieses x heißt dann der *Schnittpunkt* von B und C.

Beweis. Für $|\mathfrak{B}| \leq 1$ oder $|\mathfrak{B}| > |P|$ gilt der Satz, daher nehmen wir $2 \leq |\mathfrak{B}| \leq |P|$ an und haben zu zeigen, daß $|\mathfrak{B}| = |P|$ ist und die Zusatzaussage über die Schnittpunkte gilt.

Wir stellen zunächst fest, daß sich zwei Blöcke $B \neq C$ in höchstens einem Punkt schneiden, denn andernfalls ist (ii) verletzt. Sei nun B ein Block und $x \in P \setminus B$. Wegen (ii) gibt es zu $y \in B$ genau einen Block C mit $y, x \in C$, und y ist der einzige gemeinsame Punkt von B und C. Daher enthält $\mathfrak{B}(x)$ wenigstens $|B|$ Blöcke mit einer Ecke aus B (*); insbesondere

$$|\mathfrak{B}(x)| \geq |B|.$$

Hieraus folgt wegen $|\mathfrak{B}| \leq |P|$ zunächst

$$|B| \cdot |\mathfrak{B}| \leq |\mathfrak{B}(x)| \cdot |P|$$

und daraus

$$\underbrace{|\mathfrak{B}| \cdot |P| - |\mathfrak{B}| \cdot |B|}_{=|\mathfrak{B}| \cdot (|P| - |B|)} \geq \underbrace{|\mathfrak{B}| \cdot |P| - |\mathfrak{B}(x)| \cdot |P|}_{=|P| \cdot (|\mathfrak{B}| - |\mathfrak{B}(x)|)}.$$

Wegen $x \in P \setminus B$ und $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}(x)$ können wir zu den Kehrwerten übergehen:

$$\frac{1}{|\mathfrak{B}| \cdot (|P| - |B|)} \leq \frac{1}{|P| \cdot (|\mathfrak{B}| - |\mathfrak{B}(x)|)}.$$

Das gilt für *alle* Paare (B, x) aus $\mathfrak{B} \times P$ mit $x \notin P$, wir können also die entsprechenden Ungleichung summieren:

$$\sum_{B\in\mathfrak{B}} \sum_{\substack{x\in P\\x\notin B}} \frac{1}{|\mathfrak{B}|\cdot(|P|-|B|)} \leq \sum_{x\in P} \sum_{\substack{B\in\mathfrak{B}\\x\notin B}} \frac{1}{|P|\cdot(|\mathfrak{B}|-|\mathfrak{B}(x)|)}.$$

Man beachte, daß die Summationsreihenfolge auf beiden Seiten unterschiedlich ist (die Kopplungsbedingung steht jeweils beim letzten Summanden). Die linke Seite ist gleich 1:

$$\frac{1}{|\mathfrak{B}|} \underbrace{\sum_{B\in\mathfrak{B}} \underbrace{\sum_{\substack{x\in P\\x\notin B}} \frac{1}{|P|-|B|}}_{=1}}_{=|\mathfrak{B}|} = 1,$$

die rechte ist es auch:

$$\frac{1}{|P|} \underbrace{\sum_{x\in P} \underbrace{\sum_{\substack{B\in\mathfrak{B}\\x\notin B}} \frac{1}{|\mathfrak{B}|-|\mathfrak{B}(x)|}}_{=1}}_{=|P|} = 1.$$

Weil alle auftretenden Summanden und Faktoren positiv sind, sind *alle* ab dem zweiten Beweisabsatz auftretenden Ungleichungen bereits Gleichungen! Insbesondere gilt dann $|\mathfrak{B}| = |P|$ (was unter anderem zu zeigen war) sowie $|\mathfrak{B}(x)| = |B|$ für alle Paare (B, x) aus $\mathfrak{B} \times P$ mit $x \notin P$, und *jeder* Block aus $\mathfrak{B}(x)$ enthält eine Ecke aus B wegen (*). Sind nun $B \neq C$ aus $\mathfrak{B}$, so gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein $x \in C \setminus B$. Eingangs sahen wir bereits, daß $|B \cap C| \leq 1$ ist; wäre $B \cap C = \emptyset$, so wäre C ein Block aus $\mathfrak{B}(x)$ ohne eine Ecke aus B, ein Widerspruch. Also gilt $|B \cap C| = 1$. □

Also läßt sich folgern: Hat eine Inzidenzstruktur $(P, \mathfrak{B})$ ebensoviele Blöcke wie Punkte und sind all diese Blöcke nicht-trivial und liegen je zwei verschiedene Punkte auf genau einem gemeinsamen Block, so schneiden sich je zwei verschiedene Blöcke in genau einem Punkt. Man überprüfe übungsweise, daß die FANO-Ebene all diese Eigenschaften hat.

Eine Inzidenzstruktur, die (ii) aus Satz 1.7 erfüllt, nennt man auch eine (einfache, endliche) *Inzidenzgeometrie*. Die Konklusion des Satzes im Fall $|\mathfrak{B}| = |P|$ besagt dann, daß je zwei Blöcke (in diesem Kontext also: „Geraden") (genau) einen gemeinsamen Punkt haben, mit anderen Worten: Nicht „parallel" sind.

Übungen (2)

Abgabe bis Freitag den 15. Mai 2020.

1. Sei $d > 0$. Der *d-dimensionale Hyperwürfel* ist der Digraph[1] $D = (V, E)$ mit $V(D) = \mathfrak{P}(\mathbb{N}_d)$ und

   $$E(D) = \{(x, y) \in V(D)\times V(D) :\ x \subseteq y \text{ und } |y| = |x| + 1\}.$$

   Man bestimme für jedes Paar (a, b) von Ecken von D den Abstand von a nach b sowie die Maximalzahl paarweise offen-disjunkter a, b-Wege.[2]

   Hinweis. Man überlege sich zunächst, unter welchen Bedingungen an a und b es überhaupt einen a, b-Weg gibt und welche Ecken in solchen Wegen vorkommen können. Die Frage nach der Maximalzahl paarweise offen-disjunkter a, b-Wege gehe man zunächst für $a = \emptyset$ und $b = \mathbb{N}_d$ an.

2. Sei $n \geq k \geq 1$. Der KNESER-*Graph* $KN(n, k)$ ist der Graph mit Eckenmenge $V(KN(n, k)) = \mathfrak{P}_k(\mathbb{N}_n)$ und Kantenmenge

   $$E(KN(n, k)) = \{\{a, b\} :\ a \neq b \text{ und } a \cap b = \emptyset\}.$$

   Skizzieren Sie $KN(5, 2)$. Können Sie eine Aussage über die Anticliquen von $KN(n, k)$ aus dem Satz von ERDŐS, KO und RADO gewinnen?

3. Man bestimme alle 2-uniformen Inzidenzgeometrien.

4. Man bestimme bis auf Isomorphie alle Inzidenzgeometrien $H = (P, \mathfrak{B})$ mit $|\mathfrak{B}| = |P|$ und $|B| \in \{2, 3\}$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$.

5. Bei der Lotterie 3 aus 14 kreuzt man auf einem Los genau drei der Zahlen von 1 bis 14 an; bei der Ziehung werden drei verschiedene Zahlen zwischen 1 bis 14 gezogen. Man bestimme die kleinste Anzahl von Losen (und eine Weise, in der man ankreuzen muß), um sicherzustellen, daß man auf wenigstens einem der Lose wenigstens zwei der gezogenen Zahlen angekreuzt sind.

---

[1] Ein (schlingenloser, einfacher) *Digraph* ist ein Paar $D = (V, E)$ aus Mengen V, E mit $E \subseteq V \times V$ und $(x, x) \notin E$ für alle $x \in V$. Die Elemente aus $V =: V(D)$ und $E =: E(D)$ heißen *Ecken* bzw. *Kanten* von D.

[2] Ein *a, b-Weg* in D der *Länge* $\ell \geq 0$ ist eine Folge $P = x_0, \ldots, x_\ell$ von $\ell + 1$ paarweise verschiedenen Ecken aus $V(D)$ mit $x_0 = a$, $x_\ell = b$ und (x_{i-1}, x_i) für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ aus $E(D)$. x_0 heißt *Anfangsecke*, x_ℓ *Endecke* und jedes x_i mit $0 < i < \ell$ *innere Ecke* von P. Die Länge eines kürzesten a, b-Weges ist der *Abstand* von a nach b und wird mit $d_D(a, b)$ bezeichnet. Existiert kein a, b-Weg in D, so wird $d_D(a, b) := +\infty$ vereinbart. Anders als im ungerichteten Fall erhält man *im allgemeinen keine Metrik*. Zwei verschiedene Wege sind *offen-disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen inneren Ecken haben.