Prof. Dr. Matthias Kriesell
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

4. Studienbrief zur Diskreten Mathematik

Aus Ihren Reihen (M.K.) kam der Hinweis auf zwei Fehler im Stoff des 2. Studienbriefes. Vielen Dank dafür! Der erste Teil des Beweises, der $|\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}| \leq \ell$ zeigen soll, ist fehlerhaft; das Argument $b + \ell > c$ beruht auf der Annahme, daß sich die Extremintervalle $[x + b, x + b + \ell)$ und $[x + c, x + c + \ell)$ im Innern von $[x, x + \ell)$ schneiden müssen, was sie jedoch nicht zwangsläufig tun. Das Argument muß modifiziert werden:

Beweis. Für $x \in \mathbb{Z}_n$ und $\ell \in \mathbb{N}$ sei $[x, x + \ell) := \{x, x + 1, \ldots, x + \ell - 1\}$ sowie $\mathfrak{F} := \{[x, x + \ell) : x \in \mathbb{Z}_n\}$. Ist konkret $[x, x + \ell) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$, so hat jedes Intervall aus $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$ die Gestalt $[x + a, x + a + \ell)$ für ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $-\ell < a < \ell$, da es ja ein Element mit $[x, x + \ell)$ gemeinsam haben muß. Die fraglichen Intervalle $2\ell - 1$ können wir in zwei Zeilen der Reihe nach auflisten:

$$\begin{array}{lllll} & [x-\ell+1, x+1), & [x-\ell+1, x+2), & \ldots, & [x-1, x+\ell-1), \\ [x, x+\ell), & [x+1, x+\ell+1), & [x+2, x+\ell+2), & \ldots, & [x+\ell-1, x+2\ell-1). \end{array}$$

Zwei Elemente in gleicher Spalte sind disjunkte (sie liegen „direkt hintereinander"!); daher kann nur ein Element jeder der ℓ Spalten in $\mathfrak{A}$ vorkommen, und folglich ist $|\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}| \leq \ell$. [...]

Außerdem fehlt in Folgerung 1.6 die Voraussetzung, daß $\mathfrak{A}$ eine Antikette ist. So ist es richtig:

Folgerung 1.6.

Sei $k \leq \frac{n}{2}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}_{\leq k}(\mathbb{Z}_n)$ eine Antikette mit $X \cap Y \neq \emptyset$ für alle X, Y aus $\mathfrak{A}$. Dann ist $|\mathfrak{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Noch ein Hinweis zur Aufgabe 3 der Übung (2): Die Antwort umfaßt unendlich viele Objekte; man überlege sich, für welche Mengen P es 2-uniforme Inzidenzgeometrien mit Punktmenge P gibt, bestimme also für jede Menge P diejenigen $\mathfrak{B}$ derart, daß $(P, \mathfrak{B})$ eine 2-uniforme Inzidenzgeometrie ist.

*

In dieser Woche werden wir das Prinzip von Inklusion & Exklusion behandeln; neben dem doppelten Abzählen ist es eine der wesentlichen Methoden der abzählenden Kombinatorik. Mit Hilfe dieses Prinzips wird es uns möglich sein, das sogenannte Blocklemma für t-(v, k, λ)-Designs zu beweisen. Letztere sind k-uniforme Inzidenzstrukturen mit v Punkten, in denen es zu je t vielen Punkten genau λ viele Blöcke gibt, die all diese Punkte enthalten. Die 2-(v, k, λ)-Designs sind folglich die k-uniformen Inzidenzgeometrien mit v Punkten.

Im Blocklemma wird nun die Anzahl der Blöcke eines solchen Designs gezählt, die eine vorgegebene Menge X von Punkten enthalten und eine andere, dazu disjunkte Menge von Punkten Y vollständig vermeiden. Es zeigt sich, daß diese Anzahl überhaupt nicht von der konkreten Lage der Punktmengen X und Y im Design abhängt, sondern nur von deren Größe; die Summe $|X| + |Y|$ der Größen darf dabei allerdings den Parameter t nicht übetreffen, weil für mehr als t Punkte in einem t-(v, k, λ)-Design kaum noch Aussagen über die Zahl der Blöcke, die all diese Punkte enthalten, zu treffen sind. Hieraus kann man verschiedene Methoden ableiten, neue Designs aus bereits bekannten Instanzen herzustellen (Übung der kommenden Wochen).

Immer kann man auf diese Weise die Anzahl der Blöcke aus den Parametern bestimmen, ebenso die Anzahl der Blöcke durch einen vorgegebenen Punkt (im Fall $t \geq 1$), die ebenfalls nur von den Parametern des Designs abhängt. Das hat zur Folge, daß alle $\mathfrak{B}(x)$ gleich groß sind, also: r Blöcke umfassen. Inzidenzstrukturen mit dieser Eigenschaft nennt man *r-regulär*.

Im Beweis des Blocklemmas (der zu den Perlen der abzählenden Kombinatorik gehört) wird wiederholt doppeltes Abzählen angewendet; daneben Inklusion & Exklusion. Ein interessanter, beweisökonomischer Punkt ist weiterhin, daß man an einer gewissen Stelle im Beweis nur wissen muß, *daß* eine Größe (hier: $b_{\emptyset,Y}$) nur von einem Parameter (hier: $|Y|$) *abhängt*, jedoch nicht, *wie* diese Größe konkret (an dieser Stelle des Beweises) bestimmt werden kann.

Das Pensum von viereinhalb Seiten für diese Woche ist sicherlich nicht knapp bemessen, allerdings bin ich in Manchem ausführlicher als üblich (zum Beispiel im Beweis von Inklusion & Exklusion, dem man auch als Siebenzeiler begegnen kann).

Viel Vergnügen!

Ilmenau, den 9. Mai 2020 · Matthias Kriesell

(Fortsetzung Kapitel 1: Mengensysteme mit Symmetrieeigenschaften)

Wir kommen nun zu dem fundamentalen Objekt der Design- oder Blockplantheorie. Seien $v \geq k \geq t \geq 0$ und $\lambda \geq 1$ natürliche Zahlen. Eine Inzidenzstruktur $(P, \mathfrak{B})$ mit

(i) $|P| = v$,

(ii) $|B| = k$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$ und

(iii) Zu je t verschiedenen Punkten $x_1, \ldots x_t \in P$
existieren genau λ Blöcke $B \in \mathfrak{B}$ mit $\{x_1, \ldots, x_t\} \subseteq B$

heißt t-(v, k, λ)-*Design* oder auch ein t-(v, k, λ)-*Blockplan*.

Eigenschaften (i) und (ii) besagen schlicht, daß $(P, \mathfrak{B})$ eine k-uniforme Inzidenzstruktur mit v Punkten ist. Die Parameter t und λ kommen erst in (iii) ins Spiel und verallgemeinern dort die aus der Geometrie entlehnte Eigenschaft, daß durch je zwei Punkte genau eine Gerade läuft (siehe auch (ii) in Satz 1.7): Ein 2-$(v, k, 1)$-Design ist folglich eine k-uniforme Inzidenzgeometrie auf k Punkten.

Ein klassisches Beispiel ist KIRKMAN*'s schoolgirl problem* (1847): „Man führe 15 Schulmädchen an 7 Sonntagen in jeweils 5 Dreierreihen so spazieren, daß jedes Mädchenpaar an genau einem Sonntag in einer Reihe zusammentrifft". Da es genau $\binom{15}{2} = 15 \cdot 7$ Mädchenpaare insgesamt gibt und an einem Sonntag stets genau 15 davon in den Dreierreihen realisiert werden, ist die Anzahl 7 der Sonntage durch die übrigen Bedingungen festgelegt. Wir werden im folgenden genauer auf solche Parameterabhängigkeiten zu blicken haben. Da je zwei Mädchen in genau einer sonntäglichen Dreierreihe (in einem „Block") auftreten sollen, wird eine Lösung des Problems in einer 3-uniformen Inzidenzgeometrie mit 15 Punkten darstellbar, also einem 2-$(15, 3, 1)$-Design; die Zusatzbedingung, auch wirklich eine Zerlegung in 7 „Parallelenscharen" (das heißt: Mengen von paarweise disjunkten Blöcken) angeben zu können, ist allerdings nicht allein durch t, v, k, λ zu beschreiben.

Eine Lösung besteht zum Beispiel darin, die Punktmenge P durch $\mathbb{Z}_{14}$ plus einen Zusatzpunkt ∞ zu modellieren und dann die Blockmenge

$$\mathfrak{S} := \{\{0, 1, \infty\}, \{2, 4, 8\}, \{3, 10, 13\}, \{5, 6, 11\}, \{7, 9, 12\}\}$$

als Prototyp einer sonntäglichen Parallenschar in Zweierschritten rotieren zu lassen, das heißt

$$\mathfrak{S} + x := \{\{a + x, b + x, c + x\} : \{a, b, c\} \in \mathfrak{B}\}$$

für $x \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ zu bilden, wobei in $\mathbb{Z}_{14}$ gerechnet wird und $\infty + x = \infty$ vereinbart wird. Die Vereinigung $\mathfrak{B}$ aller sieben $\mathfrak{S} + x$ liefert dann den gesuchten Blockplan. Achtung: Das ist nicht „irgendwie offensichtlich" sondern muß nachgeprüft werden!

Für den Beweis des „Blocklemmas", Lemma 1.9, benötigen wir den Satz von Inklusion und Exklusion:

Satz 1.8. (Satz von Inklusion & Exklusion)

Seien $A_1, \ldots, A_k$ endliche Mengen. Dann ist

$$|\bigcup_{j\in\mathbb{N}_k} A_j| = \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell+1} \sum_{J\in\mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_k)} |\bigcap_{j\in J} A_j|.$$

Beweis. Induktion über $|A_1\cup\cdots\cup A_k|$. Die Behauptung is offensichtlich richtig, wenn alle A_i leer sind. Andernfalls sei $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_k$ und $I := \{j \in \mathbb{N}_k : x \in A_j\}$. Für ein beliebiges nichtleeres $J \subseteq \mathbb{N}_k$ gilt

$$\bigcap_{j\in J}(A_j\setminus\{x\}) = \bigcap_{j\in J} A_j,$$

wenn x in wenigstens einem A_j, $j \in J$, nicht enthalten ist, wenn also $J \nsubseteq I$ gilt. Dagegen ist

$$\bigcap_{j\in J}(A_j\setminus\{x\}) = (\bigcap_{j\in J} A_j) \setminus \{x\}$$

wenn x in allen A_j, $j \in J$, enthalten ist, also für $J \subseteq I$. Nach Induktion gilt der Satz für $A_1 \setminus \{x\}, \ldots, A_k \setminus \{x\}$, und wir wollen die in der abschließenden Rechnung kumulierten Korrekturterme zuerst behandeln. Hierbei hilft der binomische Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell+1} \sum_{J\in\mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_k)\wedge J\subseteq I} 1 &= -\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell} \sum_{J\in\mathfrak{P}_\ell(I)} 1 \\
&= -\sum_{\ell=1}^{|I|}(-1)^{\ell}\tbinom{|I|}{\ell} \\
&= -((\sum_{\ell=0}^{|I|}(-1)^{\ell}\tbinom{|I|}{\ell}) - 1) \\
&= -(\sum_{\ell=0}^{|I|} \tbinom{|I|}{\ell}(-1)^{\ell}1^{|I|-\ell}) + 1 \\
&= -(0+0)^{|I|} + 1.
\end{aligned}$$

Wegen $|I| > 0$ ist $(0+0)^{|I|} = 0$ und durch Induktion kommt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} \sum_{J \in \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_k)} |\bigcap_{j \in J} A_j| \\
= \; & \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} \sum_{J \in \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_k)} (|\bigcap_{j \in J} (A_j \setminus \{x\})| + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } I \not\subseteq J \\ 1 & \text{für } I \subseteq J \end{array} \right\}) \\
= \; & \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} \sum_{J \in \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_k)} |\bigcap_{j \in J} (A_j \setminus \{x\})| + \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} \sum_{J \in \mathfrak{P}_\ell(\mathbb{N}_k) \wedge J \subseteq I} 1 \\
= \; & |\bigcup_{j \in \mathbb{N}_k} (A_j \setminus \{x\})| + 1 \\
= \; & |\bigcup_{j \in \mathbb{N}_k} A_j|.
\end{aligned}$$

□

Als Spezialfälle erhalten wir zum Beispiel für $k = 2$ Mengen A, B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

(die sogenannte *modulare Gleichung* für $|\cdot|$), und für $k = 3$ Mengen A, B, C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

was man am VENN-Diagramm nachprüfen kann.

Wir kommen jetzt zum Blocklemma für Designs.

Lemma 1.9. (Blocklemma)

Sei $(P, \mathfrak{B})$ ein t-(v, k, λ)-Design und $X, Y \subseteq P$ disjunkt mit $|X| + |Y| \leq t$. Dann ist die Anzahl $b_{X,Y} = b_{X,Y}(P, \mathfrak{B})$ der Blöcke $B \in \mathfrak{B}$ mit $X \subseteq B \subseteq P \setminus B$ gleich

$$\lambda \cdot \binom{v - |X| - |Y|}{k - |X|} / \binom{v-t}{k-t}.$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $Y = \emptyset$. Doppeltes Abzählen liefert einerseits

$$\sum_{B \in \mathfrak{B}} \sum_{\substack{T \subseteq P \\ |T| = t \wedge X \subseteq T \subseteq B}} 1 \;=\; \sum_{\substack{B \in \mathfrak{B} \\ X \subseteq B}} \sum_{\substack{T \subseteq P \\ |T| = t \wedge X \subseteq T \subseteq B}} 1 \;=\; b_{X,\emptyset} \cdot \binom{k - |X|}{t - |X|},$$

und andererseits (vertauschte Summationsreihenfolge links)

$$\sum_{\substack{T \subseteq P \\ |T| = t \wedge X \subseteq T}} \sum_{\substack{B \in \mathfrak{B} \\ T \subseteq B}} 1 \;=\; \binom{v - |X|}{t - |X|} \cdot \lambda.$$

Rechnen mit Binomialkoeffizienten liefert die Behauptung:

$$\begin{aligned} b_{X,\emptyset} &= \lambda \cdot \tbinom{v-|X|}{t-|X|} \big/ \tbinom{k-|X|}{t-|X|} \\ &= \lambda \cdot \tfrac{(v-|X|)!(t-|X|)!(k-t)!}{(t-|X|)!(v-t)!(k-|X|)!} \cdot \tfrac{(v-k)!}{(v-k)!} \\ &= \lambda \cdot \tbinom{v-|X|}{k-|X|} \big/ \tbinom{v-t}{k-t}. \end{aligned}$$

Wir halten fest, daß $b_{X,\emptyset}$ nur von $|X|$, nicht aber von der konkreten Lage von X im Design abhängt und können daher $b_{\ell,\emptyset}$ für $\ell \leq t$ definieren durch

$$b_{\ell,\emptyset} := b_{X,\emptyset} \text{ für beliebiges } X \subseteq P,\ |X| = \ell \leq t.$$

Jetzt behandeln wir den Fall $X = \emptyset$. $b_{\emptyset,Y}$ ist die Anzahl aller Blöcke vermindert um die Zahl Blöcke, die wenigstens ein x aus Y enthalten, und so kommt mit Inklusion & Exklusion (Satz 1.8):

$$\begin{aligned} b_{\emptyset,Y} &= |\mathfrak{B}| - |\bigcup_{x\in Y} \mathfrak{B}(x)| \\ &= |\mathfrak{B}| - \sum_{\ell=1}^{|Y|} (-1)^{\ell+1} \sum_{Z\in\mathfrak{P}_\ell(Y)} |\bigcap_{x\in Z} \mathfrak{B}(x)| \\ &= |\mathfrak{B}| - \sum_{\ell=1}^{|Y|} (-1)^{\ell+1} \sum_{Z\in\mathfrak{P}_\ell(Y)} \underbrace{\sum_{\substack{B\in\mathfrak{B}\\ Z\subseteq B}} 1}_{=b_{\ell,\emptyset}} \\ &= b_{0,\emptyset} - \sum_{\ell=1}^{|Y|} (-1)^{\ell+1} \cdot \tbinom{|Y|}{\ell} \cdot b_{\ell,\emptyset} \end{aligned}$$

Daher hängt auch $b_{\emptyset,Y}$ nur von $|Y|$, nicht jedoch von der konkreten Lage von Y im Design ab. Auch ohne genauere Kenntnis des Wertes können wir natürlich (wie schon $b_{\ell,\emptyset}$ weiter oben) $b_{\emptyset,\ell}$ für $\ell \leq t$ definieren durch

$$b_{\emptyset,\ell} := b_{\emptyset,Y} \text{ für beliebiges } Y \subseteq P,\ |Y| = \ell \leq t.$$

Doppeltes Abzählen liefert einerseits

$$\sum_{Z\in\mathfrak{P}_{|Y|}(P)} \sum_{\substack{B\in\mathfrak{B}\\ B\cap Z=\emptyset}} 1 = \binom{v}{|Y|} \cdot b_{\emptyset,|Y|},$$

und andererseits (vertauschte Summationsreihenfolge links):

$$\sum_{B\in\mathfrak{B}} \sum_{\substack{Z\in\mathfrak{P}_{|Y|}(P)\\ B\cap Z=\emptyset}} 1 = |\mathfrak{B}| \cdot \binom{v-k}{|Y|}.$$

Wegen $|\mathfrak{B}| = b_{0,\emptyset} = \lambda \cdot \binom{v}{k} / \binom{v-t}{k-t}$ erhalten wir durch Rechnung

$$\begin{aligned}
b_{\emptyset,|Y|} &= (\lambda \cdot \tbinom{v}{k} / \tbinom{v-t}{k-t}) \cdot \tbinom{v-k}{|Y|} / \tbinom{v}{|Y|} \\
&= \lambda \cdot \tfrac{v!}{k!(v-k)!} \cdot \tfrac{(k-t)!(v-k)!}{(v-t)!} \cdot \tfrac{(v-k)!}{|Y|!(v-k-|Y|)!} \cdot \tfrac{|Y|!(v-|Y|)!}{v!} \\
&= \lambda \cdot \tbinom{v-|Y|}{k} / \tbinom{v-t}{k-t}.
\end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung auch für den Fall $X = \emptyset$.

Seien jetzt X, Y beliebig (unter den Voraussetzungen des Lemmas). Wir betrachten alle Blöcke B mit $X \subseteq B$ und streichen dort alle Elemente aus X, ebenso in P. Also: $P' := P \setminus X$, $\mathfrak{B}' := \{B \setminus X : B \in \mathfrak{B}, X \subseteq B\}$. Offensichtlich ist $(P', \mathfrak{B}')$ eine $(k - |X|)$-uniforme Inzidenzstruktur auf $v - |X|$ vielen Punkten. Ist nun T eine Menge von $t - |X|$ vielen Punkten aus P', so gibt es in $(P, \mathfrak{B})$ genau λ viele Blöcke, die $T \cup X$ enthalten; folglich gibt es in $(P', \mathfrak{B}')$ genau λ viele Blöcke, die T enthalten. Also ist $(P', \mathfrak{B}')$ ein $(t - |X|)$-$(v - |X|, k - |X|, \lambda)$-Design. Wir wenden den Fall $X = \emptyset$ auf dieses Design an und erhalten:

$$b_{X,Y}(P, \mathfrak{B}) = b_{\emptyset,Y}(P', \mathfrak{B}') = \lambda \cdot \tbinom{v-|X|-|Y|}{k-|X|} / \tbinom{v-t}{k-t},$$

was zu zeigen war. $\square$