Prof. Dr. Matthias Kriesell
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Prüfungsaufgaben zur Diskreten Mathematik

Abgabe elektronisch bis zum Freitag, den 25.9.2020 um 12.00 Uhr bei

ute.leithold@tu-ilmenau.de,

Betreffzeile: DM Klausur, Name, Matrikelnummer.

1. Seien A, B endliche Mengen. Man zeige mit Hilfe des Satzes von Inklusion und Exklusion: Die Anzahl surjektiver Abbildungen von A nach B ist gleich
$$\sum_{j=0}^{|B|} \binom{|B|}{j} (-1)^j (|B|-j)^{|A|}.$$

2. Ein *Steiner-Tripel-System der Ordnung* v ist ein 2-$(v,3,1)$-Design. Man zeige:

   (i) Wenn es ein Steiner-Tripel-System der Ordnung v gibt, dann ist $v \equiv 1 \bmod 6$ oder $v \equiv 3 \bmod 6$.

   (ii) Sei P die Menge der von 0 verschiedenen Elemente des Vektorraums $\mathbb{Z}_2^n$ und sei $\mathfrak{B}$ die Menge aller 3-elementigen Teilmengen $\{x,y,z\}$ von P mit $x+y+z=0$. Man zeige: $(P,\mathfrak{B})$ ist ein Steiner-Tripel-System der Ordnung 2^n-1.

   (iii) Sei $k \geq 1$ und $P = \mathbb{Z}_{2k+1} \times Z_3$. Sei $B_x := \{x\} \times \mathbb{Z}_3$ für $x \in \mathbb{Z}_{2k+1}$ und $B_{x,y,i} := \{(x,i),(y,i),((x+y)\cdot(k+1), i+1)\}$ für $x \neq y$ aus $\mathbb{Z}_{2k+1}$ und $i \in \mathbb{Z}_3$. Man zeige, daß
   $$(P, \{B_x : x \in \mathbb{Z}_{2k+1}\} \cup \{B_{x,y,i} : x \neq y \text{ aus } \mathbb{Z}_{2k+1},\ i \in \mathbb{Z}_3\})$$
   ein Steiner-Tripel-System der Ordnung $6k+3$ ist.

3. Seien $v \geq k \geq 2$ und $\lambda > 0$ Zahlen und G mit $+$ eine abelsche Gruppe. $S \subseteq G$ heißt 2-(v,k,λ)-*Differenzenmenge über* G, falls gilt: $|G| = v$, $|S| = k$ und $|\{(x,y) \in S \times S : x - y = c\}| = \lambda$ für alle $c \in G \setminus \{0\}$. Für $S \subseteq G$ und $c \in G$ sei wie üblich $S + c := \{x + c : x \in S\}$. Sei nun $S \subseteq G$ so, daß $S + c \neq S + d$ für $c \neq d$ aus G gilt. Man zeige: Genau dann ist S eine 2-(v,k,λ)-Differenzenmenge über G, wenn $(G, \{S + c : c \in G\})$ ein 2-(v,k,λ)-Design ist. Man konstruiere eine 2-$(7,3,1)$-Differenzenmenge über $\mathbb{Z}_7$.

4. Bekanntlich ist eine *partielle Funktion* f von A nach Z eine Menge von Paaren aus $A \times Z$ derart, daß es zu jedem $x \in A$ höchstens ein $z \in Z$ mit $(x, z) \in f$ gibt. Der *Definitionsbereich* $D(f)$ von f ist dann die Menge aller $x \in A$, zu denen es ein und damit: genau ein $z \in Z$ mit $(x, z) \in f$ gibt; dieses z wird jeweils mit $f(x)$ bezeichnet. Somit ist eine partielle Funktion von A nach Z stets eine Funktion von ihrem Definitionsbereich nach Z.

   Ein *partielles lateinisches Quadrat* Q ist eine partielle Funktion von $A \times B$ nach K mit der Eigenschaft, daß es zu jedem $x \in A$ und jedem $z \in K$ höchstens ein $y \in B$ mit $((x, y), z) \in Q$ gibt und zu jedem $y \in B$ und jedem $z \in K$ höchstens ein $x \in A$ mit $((x, y), z) \in Q$.

   Seien A, B, K gleichgroße endliche Mengen und $A' \subseteq A$. Man zeige, daß jedes partielle lateinisches Quadrat Q von $A \times B$ nach K mit Definitionsbereich $D(Q) = A' \times B$ in einem lateinischen Quadrat von $A \times B$ nach K enthalten ist.

   Gilt die Aussage auch allgemeiner für einen Definitionsbereich $D(Q) = A' \times B'$ mit $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$?

   Hinweis. Der Satz von Hall erlaubt zeilenweise Ergänzung.

5. Man beweise oder wiederlege:

   (i) Es gibt 8190 paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 8191.

   (ii) Es gibt 8189 paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 8190.

   (iii) Es gibt drei paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 39.

6. Man bestimme die Anzahl Färbungen der Seiten des regelmäßigen Oktaeders mit zwei Farben, wobei Färbungen, die sich durch Drehungen des Oktaeders auf sich selbst auseinander ergeben, als gleich angesehen werden.

Ilmenau, den 21. September 2020 · Matthias Kriesell