Prof. Dr. Matthias Kriesell
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Prüfungsaufgaben Graphen & Algorithmen

zur Prüfung auszufertigen und dort abzugeben

Alle Graphen seien endlich und ohne Schlingen oder Mehrfachkanten.

1. Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit positiver Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$d(a, b) := \min\{w(P) : \ P \text{ ein } a, b\text{-Weg in } G\}$$

für $a, b \in V(G)$ definiert, wobei $w(P) := \sum_{e \in E(P)} w(e)$ ist.

(i) Man zeige: $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Metrik auf V.

(ii) Für eine fest gewählte Ecke $x \in V$ setze man $d(x) := 0$ und $d(y) := +\infty$ für alle $y \in V \setminus \{x\}$; solange es eine Kante $yz \in E$ mit $d(y) \neq +\infty$ und $d(z) = +\infty$ gibt, wähle man so, daß dabei $d(y) + w(yz)$ minimal ist, setze $d(z) := d(y) + w(yz)$ und iteriere. Man zeige, daß dieses Verfahren mit der durch $d(y) = d(x, y)$ bestimmten Funktion $d : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ endet.

2. Sei $k \geq 0$, T ein Baum ohne Ecken des Grades $2, 3, 4, \ldots, k$ und B die Menge aller Ecken des Grades 1 von T. Sei H ein k-zusammenhängender Graph mit $V(H) = B$ (also insbesondere $|B| > k$). Man zeige: Der Graph $G := (V(T), E(T) \cup E(H))$ ist $(k + 1)$-zusammenhängend.

3. Seien G ein Graph und $A, B \subseteq V(G)$. Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Teilmengen $F \subseteq B$, für die es $|F|$ disjunkte a, b-Wege mit $a \in A$ und $b \in F$ ohne innere Ecken aus $A \cup B$ gibt. Man zeige: $\mathfrak{F}$ ist ein Matroid auf B.

   Hinweis. Induktion über die Größe von G.

4. Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine aussagenlogische Formel in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$, mit $C_h = (P_{h,1} \vee P_{h,2} \vee P_{h,3})$, worin $P_{h,i} = x_j$ oder $P_{h,i} = (\neg x_j)$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt (also eine 3SAT-Formel). Sei G der Graph mit $V(G) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, 2, 3\}$, worin (h, i) und (h', i') genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn $h \neq h'$ ist und weder $P_{h,i} = x_j$ und $P_{h',i'} = (\neg x_j)$ noch $P_{h,i} = (\neg x_j)$ und $P_{h',i'} = x_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Man zeige: Genau dann existiert eine Belegung der $x_1, \ldots, x_n$, für die F wahr wird, wenn G eine Clique mit m Ecken besitzt.

5. Sei G ein Graph und $k \geq 1$. Man zeige: Durch

$$a \sim b :\longleftrightarrow \text{es gibt eine Familie von } k \text{ kantendisjunkten } a, b\text{-Wegen}$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $V(G)$ definiert. Gilt dies auch, wenn statt kantendisjunkter Wege offendisjunkte Wege betrachtet werden?

6. Ein Graph G heißt *kritisch k-chromatisch*, wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(H) < k$ für jeden von G verschiedenen Teilgraphen H von G gilt. Man zeige für $k \geq 2$: Jeder kritisch k-chromatische Graph ist $(k-1)$-kantenzusammenhängend.

Ilmenau, 11. Februar 2020