Prof. Dr. Matthias Kriesell
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Prüfungsaufgaben Graphentheorie

zur Prüfung auszufertigen und dort abzugeben

Alle Graphen seien endlich und ohne Schlingen oder Mehrfachkanten. Neben der Fundamentaleigenschaft von Fragmenten (Aufgabe 3) wird das Mader-Watkins-Theorem (Aufgaben 2 und 3), der Satz von Mader über Kreise aus lauter wesentlichen Kanten (Aufgabe 1), sowie Eigenschaften von Gebietsrändern in ebenen Graphen (Aufgabe 4) benötigt.

1. Man zeige: Jedes Dreieck eines minimal 3-zusammenhängenden Graphen besitzt zwei Ecken vom Grad 3. Man konstruiere einen minimal 4-zusammenhängenden Graphen, der ein Dreieck mit nur einer Ecke des Grades 4 besitzt.

2. Man zeige: Jede Ecke des Grades 3 eines 3-zusammenhängenden Graphen $G \not\cong K_4$ ist mit wenigstens einer Kante e inzident so, daß G/e 3-zusammenhängend ist. Man konstruiere eine unendliche Familie 3-zusammenhängender 3-regulärer Graphen, in denen jede Ecke mit genau einer derartigen Kante inzident ist.

3. Ein Graph G heiße *symmetrisch*, wenn es zu allen $x, y \in V(G)$ einen Automorphismus φ von G mit $\varphi(x) = y$ gibt. Sei nun G ein unvollständiger symmetrischer Graph und $\mathfrak{A}$ die Menge seiner Atome (also der Fragmente kleinster Mächtigkeit). Man zeige:

   (i) $\mathfrak{A}$ ist eine Partition von $V(G)$.

   (ii) $\varphi(A) \in \mathfrak{A}$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$ und jeden Automorphismus φ von G.

   (iii) Ist die Zusammenhangszahl $\kappa(G)$ prim, so ist G $\kappa(G)$-regulär.

4. Sei G ein maximal plättbarer Graph auf wenigstens 4 Ecken (also ein Graph, dessen Gebiete alle von Dreiecken berandet sind).

   (i) Wir denken uns eine *Anfangsladung* $f(x) := 6 - d_G(x)$ an jeder Ecke x. Man zeige: $\sum_{x \in V(G)} f(x) = 12$.

   (ii) Die Anfangsladung wird nun verschoben nach folgender Regel: Jede Ecke vom Grad $d \in \{3, 4, 5\}$ sendet eine Ladung von $(6-d)/d$ an jeden seiner Nachbarn vom Grad wenigstens $14 - d$. Man zeige, daß unter der Annahme $d_G(x) + d_G(y) \geq 14$ für jede Kante $xy \in E(G)$ die resultierende *Endladung* nirgends positiv ist.

(iii) Man beweise, daß jeder 3-zusammenhängende plättbare Graph G eine Kante xy mit $d_G(x) + d_G(y) \leq 13$ enthält.

Hinweis. Für (ii) überlege man sich, daß unter den dortigen Annahmen eine Ecke des Grades $k \geq 6$ von höchstens $k/2$ der Ecken des Nachbarkreises Ladung empfängt; hat weiter einer der Sender Grad 3, so ist $k \geq 11$. Es darf ohne Beweis benutzt werden, daß ein maximal plättbarer Graph mit wenigstens 4 Ecken 3-zusammenhängend sein muß.

5. Ein Graph heißt bekanntlich *Unterteilung* des Graphen G, falls er aus G durch Ersetzung jeder Kante xy durch einen x, y-Weg P_{xy} entsteht und die P_{xy} offendisjunkt sind. Wir schreiben $H \leq G$, falls G einen zu einer Unterteilung von H isomorphen Teilgraphen enthält. Man zeige: $\leq$ ist eine Quasiordnung, jedoch keine Wohlquasiordnung auf der Klasse aller endlichen Graphen.

Ilmenau, 11. Februar 2020