Graphen und Algorithmen

Matthias Kriesell

Technische Universität Ilmenau

September 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Bäume **3**

1.1 Breiten- und Tiefensuchbäume 3

1.2 Bäume kleinsten Gewichtes und Matroide 7

1.3 Das Traveling-Salesman-Problem 9

1.4 Der Satz von Courcelle 11

1.5 Übungen 13

2 Matchings **15**

2.1 Matchings in bipartiten Graphen 15

2.2 Faktorsätze 17

2.3 Übungen 20

3 Flüsse **23**

3.1 Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem 23

3.2 Der Satz von Menger 25

3.3 Der Satz von Gutnikov 27

3.4 Übungen 28

4 Färbungen **30**

4.1 Greedy-Färbung 30

4.2 Die Sätze von Brooks und Vizing 31

4.3 Komplexität von Färbungsproblemen 33

4.4 Der **4**-Farben-Satz 35

4.5 Übungen 38

Literaturverzeichnis **39**

Index **40**

Kapitel 1

Bäume

1.1 Breiten- und Tiefensuchbäume

Ein (endlicher, einfacher, ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ bestehend aus einer Menge $V = V(G)$ von *Ecken* und einer Menge $E = E(G)$ zweielementiger Teilmengen von V, den *Kanten*. Statt $\{x, y\}$ schreiben wir vereinfachend xy (so daß $xy = yx$ gilt). Wir sagen, $x \in V(G)$ und $e \in E(G)$ *inzidieren*, falls $x \in e$ gilt, und wir sagen x, y seien *Nachbarn* oder *benachbart* in G, falls $xy \in E(G)$ gilt. Später werden auch allgemeinere Konzepte betrachtet, bei denen zum Beispiel die Kanten eine Richtung haben oder Parallelkanten zugelassen sind. Alle hier betrachteten Graphen seien *endlich*, das heißt $V(G)$ (und damit auch $E(G)$) sind endlich. Ein Graph H heißt *Teilgraph* von G, falls $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$ gilt, und wir schreiben $H \leq G$. Im Falle $V(H) = V(G)$ heißt H ein *aufspannender* Teilgraph von G. Für $A \subseteq V(G)$ bezeichne $G[A] := (A, \{xy \in E(G) : x, y \in A\})$ den von A in G *induzierten* Teilgraphen, für $F \subseteq E(G)$ bezeichne analog $G[F] := (V(G), F)$ den von (der Kantenmenge) F in G *induzierten* aufspannenden Teilgraphen. Für $X \subseteq V(G)$ ensteht $G - X := G[V(G) \setminus X]$ aus G durch *Löschung der Ecken aus* X (und aller mit ihnen inzidierenden Kanten). Analog entstehe für $X \subseteq E(G)$ der Graph $G - X := G[E(G) \setminus X]$ aus G durch *Löschung der Kanten aus* X. Für eine Ecke oder Kante x sei außerdem $G - x := G - \{x\}$ definiert.

Für zwei Ecken a, b von G heißt eine nichtleere Folge $P = x_0, \ldots, x_\ell$ paarweise verschiedener Ecken mit $x_0 = a, x_\ell = b$ und $x_{i-1}x_i \in E(G)$ ein *Weg von* a *nach* b oder schlicht ein a,b-*Weg* der *Länge* ℓ. $V(P) := \{x_0, \ldots, x_\ell\}$ und $E(P) := \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{\ell-1}x_\ell\}$ sind die *Ecken-* bzw. *Kantenmenge* von P, und auch der Graph oder Teilgraph $(V(P), E(P))$ wird ein a,b-*Weg* der *Länge* ℓ genannt; aus einem Weg als Teilgraphen läßt sich die Folgendarstellung bis auf die Durchlaufrichtung (Spiegelsymmetrie) zurückgewinnen. Man beachte, daß die Länge des Weges gleich der Anzahl seiner *Kanten* ist (*nicht* die Länge der Darstellung als Eckenfolge). Die Ecken $a = x_0$ und $b = x_\ell$ heißen *Endecken* des Weges, alle anderen Ecken von P *innere Ecken*.

Durch

$$a \sim_G b :\longleftrightarrow \text{es gibt einen } a,b\text{-Weg in } G$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $V(G)$ definiert (Übung). Die von ihren Klassen in G induzierten Teilgraphen heißen *Zusammenhangskomponenten* oder einfach nur *Komponenten* von G, und entsprechend heißt ein Graph mit höchstens einer Zusammenhangskomponente *zusammenhängend*, sonst *unzusammenhängend*.

Ein Graph T heißt *Baum*, falls T zusammenhängend ist, aber $T - e$ unzusammenhängend für jede Kante $e \in E(T)$ (jede Kante ist somit „wesentlich" für den Zusammenhang von T). Ein Teilgraph T eines Graphen G, der ein Baum ist, heißt *Teilbaum*, ein aufspannender Teilbaum heißt *Spannbaum* von G. Mit folgendem Algorithmus kann ein Spannbaum eines zusammenhängenden Graphen konstruiert werden.

Satz 1.1.1
Sei x_0 eine Ecke des Graphen G.

($\circledast$) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken $x_0, \ldots, x_\ell$ eine Ecke x_t gibt, die einen Nachbarn y in $V(G) \setminus \{x_0, \ldots, x_\ell\}$ besitzt, setze $x_{\ell+1} := y$ und $f(\ell + 1) := t$; iteriere ($\circledast$).

Das Verfahren endet mit einem Spannbaum

$$T := (\{x_0, \ldots, x_\ell\}, \{x_t x_{f(t)} : t \in \{1, \ldots, \ell\}\})$$

derjenigen Komponente von G, die x_0 enthält.

Beweis. Wir geben einen ganz ausführlichen Beweis. Das Verfahren endet, weil in jedem Schritt in ($\circledast$) eine noch nicht in $x_0, \ldots, x_\ell$ aufgenommene Ecke angehängt wird und $|V(G)|$ endlich ist. Sei $T_s := (\{x_0, \ldots, x_s\}, \{x_t x_{f(t)} : t \in \{1, \ldots, s\}\})$. Wir zeigen zunächst induktiv über s, daß T_s ein Baum ist. Die Behauptung ist offenbar richtig für $s = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für jedes $j \leq s$ einen x_j, x_0-Weg in T_s und damit in T_{s+1}, und wegen $g := x_{s+1}x_{f(s+1)} \in E(T_{s+1})$ und $f(s + 1) \leq s$ gibt es auch einen x_{s+1}, x_0-Weg in T_{s+1}; daher ist T_{s+1} zusammenhängend. $T_{s+1} - g$ ist unzusammenhängend, weil dort x_{s+1} mit keiner Kante inzidiert, und zu $e \in E(T_{s+1}) \setminus \{g\} \subseteq E(T_s)$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $j \in \{1, \ldots, s\}$ ohne einen x_j, x_0-Weg in $T_s - e$; ein solcher Weg kann dann auch in $T_{s+1} - e$ nicht existieren, da er notwendig die Kante g durchliefe und folglich x_{s+1} als innere Ecke enthielte, ein Widerspruch (da x_{s+1} mit nur einer Kante in T_{s+1} inzidiert). Wir zeigen jetzt, daß $T = T_\ell$ ein Spannbaum derjenigen Komponente H von G ist, die x_0 enthält. Weil T zusammenhängend ist und x_0 enthält, folgt $V(T) \subseteq V(H)$ und es genügt zu zeigen, daß es kein $z \in V(H) \setminus V(T)$ gibt. Zu einem derartigen z gäbe es einen z, x_0-Weg $P = y_0, \ldots, y_q$, also ein $j < q$ mit $y_j \notin V(T)$ und $y_{j+1} \in V(T)$, das heißt unter den Ecken $x_0, \ldots, x_\ell$ gibt es eine Ecke $x_t = y_{j+1}$, die einen Nachbarn $y = y_j \in V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_\ell\}$ hat, im Widerspruch dazu, daß die Iteration bei ℓ beendet wurde. $\square$

Das Verfahren liefert zugleich die Möglichkeit, besonders einfach und effizient einen Weg von jeder Ecke x_j zurück zur *Wurzel* x_0 zu generieren, indem man einfach von x_j nach $x_{f(j)}$ wandert, von dort nach $x_{f(f(j))}$ undsoweiter, bis schließlich x_0 erreicht ist — oder aber anzuzeigen, daß kein solcher Weg existiert.

Geht man bei der Wahl von x_t in ($\circledast$) unter den gegebenen Möglichkeiten ein wenig gezielter vor, kommt man zu zwei fundamentalen Suchstrategien auf Graphen, der *Breitensuche* und der *Tiefensuche*. Die damit einhergehenden speziellen Spannbäume stehen in einem engen metrischen bzw. ordnungstheoretischen Zusammenhang zum gegebenen Graphen und werden jetzt beschrieben.

Breitensuche.

Für zwei Ecken a, b des Graphen G sei $d_G(a, b)$ die Länge eines kürzesten Weges von a nach b bzw. $+\infty$ falls kein solcher Weg existiert (also a, b in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen). Formal:

$$d_G(a, b) := \min(\{\ell : \text{es gibt einen } a,b\text{-Weg der Länge } \ell\} \cup \{+\infty\}).$$

Hierdurch wird eine natürliche Metrik $d_G : V(G) \times V(G) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ auf $V(G)$ definiert (Übung). Sei G ein zusammenhängender Graph und $x_0 \in V(G)$. Ein Spannbaum T heißt *Breitensuchbaum bei* x_0 (engl. *BFS-tree at* x_0, für *breadth-first-search*), falls $d_T(y, x_0) = d_G(y, x_0)$ für alle $y \in V(G)$ gilt. Man findet Breitensuchbäume (und damit kürzeste Wege) wie folgt.

Satz 1.1.2 (Breitensuche)
Sei x_0 eine Ecke des zusammenhängenden Graphen G.

($\circledast$) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken $x_0, \dots, x_\ell$
eine Ecke x_t gibt, die einen Nachbarn y in $V(G) \setminus \{x_0, \dots, x_\ell\}$ besitzt,
wähle so, daß t kleinstmöglich ist,
setze $x_{\ell+1} := y$ und $f(\ell + 1) := t$; iteriere ($\circledast$).

Das Verfahren endet mit einem Breitensuchbaum

$$T := (\{x_0, \dots, x_\ell\}, \{x_t x_{f(t)} : t \in \{1, \dots, \ell\}\})$$

bei x_0 von G.

Beweis. Wegen Satz 1.1.1 endet das Verfahren mit einem Spannbaum T von G. Offenbar gilt $d_G(x_0, x_0) = d_T(x_0, x_0) = 0$. Wir zeigen induktiv über s, daß $d_G(x_s, x_0) = d_T(x_s, x_0) \geq d_T(x_{s-1}, x_0)$ für $s > 0$ gilt. Die Behauptung ist richtig für $s = 0$. Unter der Annahme, sie sei bereits bis s bewiesen, zeigen wir sie jetzt für $s+1$ anstelle von s. Sei P ein kürzester x_{s+1}, x_0-Weg in G und sei x_j die erste Ecke in der Folgendarstellung von P mit $j \leq s$. Weil nach Wahl von $f(s+1)$ kein x_t mit $t < f(s+1)$ einen Nachbarn außerhalb $x_0, \dots, x_s$ haben kann, folgt

$j \geq f(s+1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & d_T(x_{s+1}, x_0) \\ \geq\ & d_G(x_{s+1}, x_0) \geq 1+d_G(x_j, x_0) \geq 1+d_G(x_{f(s+1)}, x_0) \\ =\ & 1+d_T(x_{f(s+1)}, x_0) = d_T(x_{s+1}, x_0), \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung gilt, weil T ein Teilgraph von G ist, die zweite, weil x_j nicht die erste Ecke auf P ist und die dritte infolge des monotonen Aufsteigens der Folge $(d_G(x_i, x_0))_{i \in \{0,\ldots,s\}}$ nach Induktionsvoraussetzung. Tatsächlich sind somit alle Ungleichungen bereits Gleichungen, insbesondere $d_T(x_{s+1}, x_0) = d_G(x_{s+1}, x_0)$. Für $s = 0$ gilt immer $d_T(x_{s+1}, x_0) \geq d_T(x_s, x_0) = 0$; für $s > 0$ kann nach Wahl von $f(s)$ kein x_t mit $t < f(s)$ einen Nachbarn außerhalb von $x_0, \ldots, x_{s-1}$ haben; daher ist $f(s+1) \geq f(s)$ und aus der Monotonie obiger Folge kommt auch in diesem Fall

$$d_T(x_{s+1}, x_0) = d_T(x_{f(s+1)}, x_0) + 1 \geq d_T(x_{f(s)}, x_0) + 1 = d_T(x_s, x_0),$$

und damit die Behauptung. □

Es folgt unmittelbar aus dem Beweis, daß das Verfahren in Satz 1.1.2 zunächst alle Ecken des Abstandes höchstens c von der Wurzel aufnimmt, bevor die Ecken des Abstandes $> c$ von der Wurzel behandelt werden. Die Suche spielt sich also zunächst in aller Breite ab, bevor tiefer gebohrt wird, und trägt daher ihren Namen zu Recht. Die Implementierung kann leicht mittels einer Queue erledigt werden: Ans Ende kommen die neuen Ecken, gesucht nach neuen Verzweigungen wird am Anfang, wobei die Anfangsecke erst dann aus der Queue genommen wird, wenn alle ihre Nachbarn aufgenommen sind (d. h. behandelt wurden).

Tiefensuche.

Ein Spannbaum T eines zusammenhängenden Graphen G heißt *Tiefensuchbaum* bei $x_0 \in V(G)$ (eng. *DFS-tree* für *depth-first-search*), falls für jede Kante $yz \in E(G)$ die Ecke y in dem x_0, z-Weg in T vorkommt oder z in dem x_0, y-Weg vorkommt.

Satz 1.1.3 (Tiefensuche)
Sei x_0 eine Ecke des zusammenhängenden Graphen G.

(∗) Wenn es unter den bereits gewählten Ecken $x_0, \ldots, x_\ell$
eine Ecke x_t gibt, die einen Nachbarn y in $V(G) \setminus \{x_0, \ldots, x_\ell\}$ besitzt,
wähle so, daß t größtmöglich ist,
setze $x_{\ell+1} := y$ und $f(\ell+1) := t$; iteriere (∗).

Das Verfahren endet mit einem Tiefensuchbaum

$$T := (\{x_0, \ldots, x_\ell\}, \{x_t x_{f(t)} : t \in \{1, \ldots, \ell\}\})$$

bei x_0 von G.

Beweis. Wir zeigen induktiv über s, daß

(a) unter den Ecken $x_0, \ldots, x_s$ nur die Ecken des x_s, x_0-Weges in T Nachbarn in G außerhalb von $\{x_0, \ldots, x_s\}$ haben und daß
(b) für $s > 0$ unter den Ecken $x_0, \ldots, x_{s-1}$ nur die Ecken des $x_{f(s)}, x_0$-Weges zu x_s benachbart sind.

Die Behauptungen sind richtig für $s = 0$, und wir zeigen sie für $s+1$ anstelle von s unter der Voraussetzung daß sie bis s gelten. Nach Induktionsvoraussetzung (a) liegt $x_{f(s+1)}$ auf dem x_s, x_0-Weg von T. Sei nun x_j, $j \leq s+1$, zu einer Ecke $y \neq x_j$ in G außerhalb von $\{x_0, \ldots, x_s\}$ (!) benachbart. Für $j \leq s$ liegt x_j auf dem x_s, x_0-Weg in T. Nach Wahl von x_{s+1} kann kein x_t mit $f(s+1) < t \leq s$ Nachbarn in G außerhalb von $\{x_0, \ldots, x_s\}$ haben, folglich gilt $j \leq f(s+1)$. Da die Folge $s, f(s), f^2(s), \ldots, 0$ der Indizes entlang des x_s, x_0-Weges in T absteigend ist, liegt x_j auf dem $x_{f(s+1)}, x_0$-Weg in T. Somit ist der Induktionsschluß für (b) erbracht. Weil x_j damit insbesondere auf dem x_{s+1}, x_0-Weg in T liegt (und dies für $j = s+1$ trivialerweise gilt), ist auch der Induktionsschluß für (a) erbracht. Aus (b) folgt unmittelbar für $x_s x_j \in E(G)$ mit $j < s$, daß x_j auf dem x_s, x_0-Weg in T liegt. Also ist T ein Tiefensuchbaum. $\square$

Dieses Verfahren stellt zunächst einen unverlängerbaren Weg von der Wurzel aus her, bevor es von dort aus (möglichst „tief", das heißt weit weg von der Wurzel), verzweigt. Die Suche spielt sich also zunächst (unter denen durch die Vorgeschichte gegebenen Möglichkeiten) in der Tiefe ab, bevor „weiter oben" (ggf. sogar an der Wurzel) neu verzweigt wird. Die Implementierung kann mittels eines Stacks erfolgen, auf den die neuen Ecken gestapelt werden; gesucht nach neuen Verzweigungen wird direkt bei der zuletzt aufgestapelten Ecke, und diese verschwindet erst dann vom Stapel, wenn alle ihre Nachbarn schon einmal gestapelt (d. h. behandelt) wurden.

Ist T ein Baum und $x_0 \in V(T)$, so wird durch

$$y \leq z :\longleftrightarrow y \text{ kommt im } x_0, z\text{-Weg von } T \text{ vor}$$

eine partielle Ordnung auf $V(T)$ definiert. Im Fall $y \leq z$ liegt y also (metrisch) näher an der Wurzel x_0 als z, jedoch mag es sehr viele Paare y, z geben, für die weder $y \leq z$ noch $z \leq y$ gilt. Partielle Ordnungen, die sich in dieser Weise durch einen Baum darstellen lassen, heißen gelegentlich *Baumordnungen.* Zu je zwei Elementen gibt es darin ein Infimum, aber im allgemeinen kein Supremum. — Genau dann ist ein Spannbaum T eines Graphen ein Tiefensuchbaum bei x_0 von G, falls es keine Kanten in G zwischen hinsichtlich $\leq$ unvergleichbaren Elementen gibt.

1.2 Bäume kleinsten Gewichtes und Matroide

Ein *Kreis* der *Länge* $\ell \geq 3$ im Graphen G ist eine Folge $C = x_0, \ldots, x_{\ell-1}, x_0$ derart, daß $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ ein Weg ist und $x_{\ell-1}x_0 \in E(G)$. Wie schon bei Wegen seien $V(C) := \{x_0, \ldots, x_{\ell-1}\}$ und $E(C) := \{x_0x_1, x_1x_2, x_{\ell-2}x_{\ell-1}, x_{\ell-1}x_0\}$ die *Ecken-* bzw. *Kantenmenge* des Kreises, und auch der Graph oder Teilgraph

$(V(C), E(C))$ wird als *Kreis* bezeichnet. (Aus der Kenntnis des Teilgraphen läßt sich die Folgendarstellung bis auf die Symmetrien der Diedergruppe zurückgewinnen.) Ein Graph ohne Kreise heißt *kreisfrei* oder ein *Wald*. Ein Graph ist genau dann ein Wald, wenn seinen Komponenten Bäume sind (Übung). Vereinfachend wollen wir im folgenden auch eine Menge F von Kanten eines Graphen G *kreisfrei* in G nennen, wenn $G[F]$ kreisfrei ist. Die kreisfreien Kantenmengen haben dann folgende fundamentale *Austauscheigenschaft* (die sie mit den linear unabhängigen Teilmengen eines Vektorraums teilen):

Satz 1.2.1 (Austauschlemma für Graphen)
Sind F, F' zwei kreisfreie Kantenmengen des Graphen G mit $|F| < |F'|$,
so gibt es ein $e \in F' \setminus F$ derart, daß $F \cup \{e\}$ kreisfrei ist.

Beweis. Seien c und c' die Anzahl der Komponenten von $G[F]$ bzw. $G[F']$. Wäre die Eckenmenge jeder Komponente von $G[F']$ ganz in der Eckenmenge einer Komponente von $G[F]$ enthalten, so folgt $c' \geq c$, es gilt aber $c' = |V(G)| - |F'| < |V(G)| - |F| = c$. Also gibt es wenigstens eine Komponente von $G[F']$ mit Ecken in verschiedenen Komponenten von $G[F]$; diese enthält eine Kante e mit Endecken aus zwei verschiedenen Komponenten von $G[F]$; insbesondere ist $e \in F' \setminus F$, und man überlegt sich leicht (Übung), daß mit F auch $F \cup \{e\}$ kreisfrei bleibt. □

Aus Satz 1.2.1 folgt unmittelbar, daß je zwei hinsichtlich $\subseteq$ maximale kreisfreie Teilmengen von G die gleiche Mächtigkeit haben, und man überzeugt sich leicht, daß für einen zusammenhängenden Graphen die maximal kreisfreien Teilmengen gerade die Spannbäume sind. Das Austauschlemma steht im Zentrum des folgenden Satzes, der ein Verfahren beschreibt, das in einem zusammenhängenden Graphen G mit einer „Gewichtsfunktion" $w : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf den Kanten einen Spannbaum T von G findet, der unter allen Spannbäumen von G minimales Gesamtgewicht $w(T) := \sum_{e \in E(T)} w(e)$ hat.

Satz 1.2.2 (Satz von Kruskal)
Sei G ein zusammenhängender Graph und $w : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Setze $F := \emptyset$.
(∗) Wenn es in $E(G) \setminus F$ eine Kante e gibt, für die $F \cup \{e\}$ kreisfrei bleibt, wähle so, daß $w(e)$ kleinstmöglich ist, setze $F := F \cup \{e\}$, iteriere (∗).

Das Verfahren endet mit einem Spannbaum $(V(G), F)$ minimalen Gesamtgewichts.

Beweis. Wie oben erwähnt, endet das Verfahren mit einer maximalen kreisfreien Menge, also der Kantenmenge eines Spannbaums. Seien $e_1, \ldots, e_m$ die Kanten, die im Verlauf des Algorithmus gewählt wurden, und zwar in der Reihenfolge ihrer Auswahl (es ist $m = |V(G)| - 1$). Seien $f_1, \ldots, f_m$ die Kanten eines beliebigen Spannbaums B mit minimalem Gesamtgewicht in der Reihenfolge aufsteigender Einzelgewichte. Wäre $w(F) > w(B)$, so wäre $w(e_i) > w(f_i)$ für mindestens ein i, und wir wählen i kleinstmöglich. Nun ist $F := \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ kreisfrei und $F' := \{f_1, \ldots, f_i\}$ ist es auch; nach Satz 1.2.1 gibt es ein $f \in F' \setminus F$ so, daß $F \cup \{f\}$ kreisfrei bleibt; f ist also eine Option in der i-ten Iteration von $(\ast)$, das heißt bei der Wahl von $e = e_i$, gewesen, und somit gilt $w(e_i) \leq w(f)$. Es gilt aber $w(f) \leq w(f_i) < w(e_i)$, ein Widerspruch. □

Im Beweis wurde im wesentlichen das Austauschlemma und die Eigenschaft, daß jede Teilmenge einer kreisfreien Menge wieder kreisfrei ist, verwendet. Dies legt nahe, daß Satz 1.2.2 sich in allgemeinere Situationen übertragen läßt. Ein Paar $M = (E, \mathfrak{F})$ aus einer endlichen Menge E und einer Menge $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von E heißt ein *Matroid* auf E, falls gilt:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{F}$,

(ii) Aus $F \subseteq F' \in \mathfrak{F}$ folgt $F \in \mathfrak{F}$, und

(iii) Zu $F, F' \in \mathfrak{F}$ mit $|F| < |F'|$ gibt es ein $e \in F' \setminus F$ mit $F \cup \{e\} \in \mathfrak{F}$.

Die Mengen aus $\mathfrak{F}$ heißen gewöhnlich *unabhängig*, bzgl. $\subseteq$ maximale unabhängige Mengen heißen *Basen* von M. Aus (ii) ergibt sich sofort, daß je zwei Basen eines Matroids dieselbe Mächtigkeit haben. Der Beweis von Satz 1.2.2 läßt sich nahezu wortwörtlich auf die allgemeinere Situation von Matroiden übertragen.

Satz 1.2.3 (Greedy-Algorithmus für Matroide)
Sei $M = (E, \mathfrak{F})$ ein Matroid und $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Setze $F := \emptyset$.
$(\ast)$ Wenn es in $E \setminus F$ ein e gibt, für das $F \cup \{e\} \in \mathfrak{F}$ gilt,
wähle so, daß $w(e)$ kleinstmöglich ist, setze $F := F \cup \{e\}$, iteriere $(\ast)$.

Das Verfahren endet mit einer Basis F von M minimalen Gesamtgewichts.

Beweis. Das Verfahren liefert offenbar eine maximal unabhängige Menge, also eine Basis F. Seien $e_1, \ldots, e_m$ die Elemente, die im Verlauf des Algorithmus gewält wurden, und zwar in der Reihenfolge ihrer Auswahl. Seien $f_1, \ldots, f_m$ die Elemente einer beliebigen Basis B mit minimalem Gesamtgewicht in der Reihenfolge aufsteigender Einzelgewichte. Wäre $w(F) > w(B)$, so wäre $w(e_i) > w(f_i)$ für mindestens ein i, und wir wählen i kleinstmöglich. Nach der Eigenschaft (ii) für Matroide sind $F := \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ und $F' := \{f_1, \ldots, f_i\}$ unabhängig; nach der Austauscheigenschaft (ii) für Matroide gibt es ein $f \in F' \setminus F$ so, daß $F \cup \{f\}$ unabhängig bleibt; f ist also eine Option bei der i-ten Iteration von $(\ast)$, das heißt bei der Wahl von $e = e_i$, gewesen, und somit gilt $w(e_i) \leq w(f)$. Es gilt aber $w(f) \leq w(f_i) < w(e_i)$, ein Widerspruch. □

1.3 Das Traveling-Salesman-Problem

Das *Traveling-Salesman-Problem* (kurz: *TSP*) läßt sich wie folgt beschreiben: Man finde eine Rundreise durch gegebene Städte derart, daß man jede Stadt genau einmal besucht (außer der ersten, die man ein zweites Mal sieht, am Ende der Reise) und die unter allen solchen Rundreisen minimale Gesamtkosten verursacht. Die variablen Kostenanteile entstehen in diesem Modell natürlich entlang der Reisewege (die Summe aller Kosten in den Städten selber darf als konstant angenommen werden); für je zwei Städte A, B sind die Kosten $w(A, B)$ für die Reise von A nach B bekannt, und die zu minimierenden Kosten ergeben sich durch Summation. Wir wollen einige Zusatzannahmen ins Spiel bringen, daß nämlich erstens diese Kosten nichtnegativ sind, daß zweitens $w(A, B) = w(B, A)$ für je zwei Städte ist, und daß drittens $w(A, C) \leq w(A, B) + w(B, C)$ ist für je drei Städte A, B, C (Dreiecksungleichung). Hierdurch wird die Diskussion ein wenig vereinfacht, das neue Problem nennt man auch das *metrische TSP*.

Da die Zahl der Rundreisen durch n Städte im wesentlichen $n!$ ist und daher explodiert, ist ,,Durchprobieren" hier nicht die Methode der Wahl. (Tatsächlich gehört das Problem zu den NP-vollständigen Problemen, siehe Abschnitt 4.3.) Begnügt man sich dagegen mit einem Verfahren, das zwar nicht die optimale, jedoch eine Lösung von beweisbar (!) ,,guter" Qualität liefert, sieht die Welt anders aus. Wir beschreiben, wie mit Hilfe von Satz 1.2.2 eine Rundreise schnell gefunden werden kann, deren Kosten weniger als doppelt so groß wie die einer optimalen Rundreise sind. Daneben kann bietet eine wie auch immer ermittelte ,,gute" obere Schranke für die Kosten einer optimalen Rundreise die Möglichkeit, in auf verzweigter Suche beruhenden Verfahren den Suchraum einzuschränken (branch-and-cut).

1. Schritt.
Sei V die Menge der Städte, etwa: $|V| = n$, E die Menge aller zweielementigen Teilmengen von V, und $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Kostenfunktion. Wir sind nun mit $G := (V, E)$ in der Situation des Satzes von Kruskal, der es uns erlaubt, einen Spannbaum T von G minimalen Gesamtgewichtes zu finden.

2. Schritt.
Entlang dieses Spannbaums finden wir eine Folge $R = x_0, \ldots, x_{2n-1}$, derart, daß es zu jeder Kante e von T genau zwei Indizes j, k gibt mit $x_j x_{j+1} = x_k x_{k+1} = e$ (alle Indizes modulo $2n$, Beweis zum Beispiel induktiv durch Löschen von Blättern).

3. Schritt.
Zunächst sei das *Gesamtgewicht* $w(S)$ einer Folge $S = x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ definiert durch $\sum_{i=0}^{\ell-1} w(x_i x_{i+1})$ (Indizes modulo ℓ). Die im zweiten Schritt konstruierte Folge enthält jede Ecke aus V *mindestens* einmal und hat Gesamtkosten $w(R) \leq 2w(T)$. Wir dünnen sie schrittweise aus: Ist S wie oben und $x_i = x_j$ für $i < j$ so streichen wir x_j aus der Folge und erhalten S'. In den Gesamtkosten tritt dann anstelle des Doppelterms $w(x_{i-1}x_i)+w(x_i x_{i+1})$ der Term $w(x_{i-1}x_{i+1})$ auf. Infolge der Dreiecksungleichung wachsen die Kosten beim Übergang von S nach S' nicht. Durch Iteration erhält man schließlich eine Rundreise S, in der jede Stadt *genau* einmal vorkommt, und nach wie vor gilt $w(S) \leq 2w(T)$. (Vor der Iteration werden die Ecken x_i für $i > j$ umindiziert auf x_{i-1}, die Formalitäten ersparen wir uns.)

Sei nun $Q = z_0, \ldots, z_{n-1}$ eine optimale Rundreise. Obwohl wir Q nicht kennen, können wir doch die Kosten von Q und S vergleichen, denn $P := (V, \{z_i z_{i+1} : i \in \{0, \ldots, n-2\}\})$ ist ein Spannbaum von G und $w(Q) = w(P) + w(x_{n-1}x_0) \geq w(P) \geq w(T)$. Infolgedessen kommt $w(S) \leq 2w(T) \leq 2w(Q)$, das heißt die Kosten unserer Lösung sind, wie versprochen, nach oben beschränkt durch das Doppelte der Kosten einer optimalen Rundreise.

Der beste bekannte Gütefaktor ist 1.5 (Christofides Algorithmus), und es läßt sich zeigen, daß das Problem, eine Rundreise mit Gütefaktor 1.0081 zu den NP-vollständigen Problemen gehört. Für den Fall euklidischer Kosten (das heißt: Die Städte sind Punkte in der Ebene und die Kosten ihr euklidischer Abstand) kann dagegen für *jedes* $c > 1$ ein Polynomialzeitapproximationsalgorithmus mit Gütefaktor c angegeben werden. Man spricht in diesem Fall von einem *Polynomialzeitapproximationsschema*; die Klasse aller Probleme mit dieser Eigenschaft heißt entsprechend $PTAS$ (engl. *polynomial time approximation scheme*).

1.4 Der Satz von Courcelle

Die allermeisten Optimierungs- und Entscheidungsprobleme auf Graphen sind trivial oder sehr leicht, wenn man sie auf die Teilklasse der Bäume einschränkt. Es liegt nahe, daß auch ,,baumartige" Graphen ganz erheblich einfacher zu behandeln sind. Dies ist tatsächlich durch einen berühmten Satz der theoretischen Informatik sichergestellt, den wir hier ,,nur" beschreiben wollen.

Wie mißt man die ,,Baumartigkeit" von Graphen? Hierzu beschreiben wir zuerst, wie ein Graph überhaupt in etwas ,,Baumartiges" zerlegt werden kann: Ist G ein Graph so heißt ein Paar $z = (T, (X_s)_{s \in V(T)})$ bestehend aus einem nichtleeren Baum T und einer mit den Ecken aus T indizierten Familie von Teilmengen X_s von $V(G)$ eine *Baumzerlegung* von G falls gilt:

(i) $\bigcup_{s \in V(T)} X_s = V(G)$,
(ii) für jedes $e \in E(G)$ gibt es ein $s \in V(T)$ mit $V(e) \subseteq X_s$ und
(iii) für alle $p, q, s \in V(T)$ gilt: Kommt q im p, s-Weg in T vor, so gilt $X_q \subseteq X_p \cap X_s$.

Ein großer *Zerlegungsbaum* T zerlegt also den Graphen G in viele Teile, die in baumartiger Weise verbunden sind, und wird somit der Aufgabe, den Graphen entsprechend zu strukturieren, gerecht (sofern die Teile wirklich verschieden sind). Dabei mag es jedoch geschehen, daß einzelne *Taschen* X_s der Zerlegung groß bzw. beliebig komplex sind (sieht man einmal von dem konzeptionellen Einwand ab, daß man aus einer Zerlegung immer eine mit viel größerem Zerlegungsbaum konstruieren kann). Fordert man dagegen, daß die Taschen gleichmäßig klein sind, so wird für große Graphen ein großer Zerlegungsbaum erzwungen, der den Graphen in übersichtliche Teile strukuriert. Diese Idee kann man wie folgt umsetzen: Die *Weite* von z ist definiert durch $w(z) := \max\{|X_s| : s \in V(T)\} - 1$, und die *Baumweite* von G ist $w(G) := \min\{w(z) : z \; z \text{ ist Baumzerlegung}\}$. Je kleiner die Baumweite ist, desto baumartiger ist der Graph. Bäume selber haben Baumweite 1, Kreise haben Baumweite 2 (in die Länge gezogen sehen sie ja wie

Bäume aus, sogar wie Wege) etc.

Das Wissen um eine beschränkte Baumweite kann man nun wie folgt nutzen: Ausgehend von den Blättern des Zerlegungsbaumes löst man das Problem zunächst lokal in den von den korrespondierenden Taschen induzierten Teilgraphen und fügt dann, übergehend zu größeren und größeren Hauptästen des Zerlegungsbaums, lokale Lösungen bzw. Antworten mehr und mehr zusammen, um schließlich mit einer globalen Lösung bzw. Antwort zu enden. Courcelle hat entdeckt, daß sich eine große Klasse von Graphenproblemen auf diese Weise lösen läßt, nämlich alle, die sich durch eine Formel in erweiterter monadic second order logic beschreiben lassen. Es sind dies aussagenlogische Formeln, wobei über Ecken, Kanten, sowie Mengen von Ecken oder Kanten quantifiziert werden darf (MSO_2-Formeln). Gewöhnlich wird neben $\in$ und $=$ ein Inzidenz- und Adjazenzprädikat gefordert, was aber unter unseren Modellannahmen direkt durch $\mathrm{inc}(x,e) := x \in e$ und $\mathrm{adj}(x,y) := (x \neq y) \wedge \exists e \in E : x \in e \wedge y \in e$ abgebildet werden kann. Dies ermöglicht zunächst nur Formulierungen von *Entscheidungsproblemen* wie: Besitzt der Eingabegraph einen aufspannenden Kreis? (Übung) Man kann sich dabei stufenweise einen Prädikate-Fundus an MSO_2-formulierbaren Eigenschaften aufbauen. Zum Beispiel ist die Eigenschaft von $X \subseteq V$, eine echte nichtleere Teilmenge von V zu sein, so formulierbar:

$$\mathrm{proper}(X) := \exists y \in V \; \exists z \in V : \; y \in X \wedge z \notin X,$$

und die Eigenschaft von $C \subseteq E$, daß $G[C]$ zusammenhängend ist, so:

$$\mathrm{conn}(C) := \forall X \subseteq V : \mathrm{proper}(X) \implies (\exists y \in V \; \exists z \in V : y \in X \wedge z \notin X \wedge xy \in E),$$

wobei $xy \in E$ eine (vielleicht) etwas lesbarere Variante des Adjazenzprädikats $\mathrm{adj}(x,y)$ darstellt.

Satz 1.4.1 (Satz von Courcelle)
Jede in MSO_2 formulierbare Grapheneigenschaft kann in Linearzeit auf jeder Klasse von Graphen beschränkter Baumweite entschieden werden.

Ein entsprechender Satz gilt für eine große Klasse von Optimierungsproblemen. Darin darf die Ecken- und Kantenmenge des Eingabegraphen ganzzahlig gewichtet werden, und man kann nach einer Ecken- oder Kantenmenge maximalen oder minimalen Gewichts mit einer in MSO_2 formulierbaren Eigenschaft fragen, was natürlich Fragen nach Ecken- oder Kantenmengen maximaler oder minimaler Kardinalität einschließt. Zum Beispiel kann nach einer größtmöglichen Clique, das heißt einer Menge paarweise benachbarter Ecken, gefragt werden. Dies ist ein im allgemeinen schweres Optimierungsproblem, das aber — genau wie das im allgemeinen schwere Entscheidungsproblem, ob es einen aufspannenden Kreis gibt — auf Graphen beschränkter Baumweite in Polynomialzeit gelöst werden kann.

1.5 Übungen

1. Man zeige, daß die Teilgraphenrelation $\leq$ eine partielle Ordnung auf der Menge aller Teilgraphen von G ist.

2. Man zeige, daß für einen Graphen G durch

$$a \sim_G b :\longleftrightarrow \text{es gibt einen } a,b\text{-Weg in } G$$

eine Äquivalenzrelation auf $V(G)$ definiert ist. Man zeige, daß dies die (hinsichtlich $\subseteq$) kleinste Äquivalenzrelation ist, welche die durch $aRb :\longleftrightarrow ab \in E(G)$ gegebene binäre Relation R auf $V(G)$ enthält.

3. Man zeige, daß ein Graph genau dann unzusammenhängend ist, wenn es eine nichtleere echte Teilmenge X von $V(G)$ derart gibt, daß keine Ecke aus X einen Nachbarn in $V(G) \setminus X$ hat.

4. Seien G, H zwei Bäume mit disjunkten Eckenmengen und $x \in V(G), y \in V(H)$. Man zeige, daß $(V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{xy\})$ ein Baum ist.

5. Man zeige, daß ein Graph genau dann zusammenhängend ist, wenn er einen Spannbaum besitzt.

6. Für einen Graphen G sei $\overline{G} := (V(G), \{xy : x \neq y \text{ aus } V(G) \text{ und } xy \notin E(G)\})$ sein *Komplement*. Man zeige: G ist zusammenhängend oder $\overline{G}$ ist zusammenhängend.

7. Man zeige, daß ein Graph genau dann ein Baum ist, wenn es zu je zwei Ecken a, b genau einen Weg von a nach b gibt.

8. Man zeige, daß die für einen Graphen G in Abschnitt 1.1 definierte Abbildung $d_G : V(G) \times V(G) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ eine Metrik auf $V(G)$ ist.

9. Man zeige, daß die in Abschnitt 1.1 für einen Baum T und eine Ecke $x_0 \in V(T)$ definierte Relation $\leq$ eine partielle Ordnung auf $V(T)$ ist, in der je zwei Elemente von $V(T)$ ein Infimum haben. Wie kann man das Infimum in T beschreiben?

10. Kann jeder Baum Tiefensuchbaum eines Graphen sein?

11. Man zeige, daß ein Graph genau dann ein Wald ist, wenn seine Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

12. Man zeige, daß ein nichtleerer Wald genau $|V(G)| - |E(G)|$ Komponenten hat.

13. Man gebe ein Verfahren an, daß in einem zusammenhängenden Graphen G mit Kantengewichtsfunktion $f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ einen Spannbaum maximalen Gewichts findet.

14. Man zeige, daß die Mengen der linear unabhängigen Teilmengen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem endlichen Körper K ein Matroid auf V bilden.

    Hinweis. Bekanntes aus der linearen Algebra darf natürlich benutzt werden.

15. Sei A eine (endliche) Matrix über dem Körper GF(2) mit zwei Elementen. Man gebe einen Algorithmus an, der eine Basis des Spaltenraums von A aus Spalten von A bestimmt, die unter allen solchen Basen
    (i) die kleinste Anzahl Einsen bzw.
    (ii) die größte Anzahl Einsen besitzt.

    Hinweis. Man überlege sich, daß die Spalten von A zusammen mit der Menge ihrer linear unabhängigen Teilmengen ein Matroid bilden.

16. Sei T ein Baum mit $m \geq 1$ Kanten. Man zeige, daß es eine Folge von Ecken $x_0,\ldots,x_{2m-1}$ gibt derart, daß es zu jeder Kante $e \in E(T)$ genau zwei Indizes j, k gibt mit $x_j x_{j+1} = x_k x_{k+1} = e$ (alle Indizes modulo $2m$).

17. Man betrachte das TSP für den Fall euklidischer Kosten und zeige, daß sich sich eine optimale Rundreise nicht selber kreuzt (das heißt: werden verschiedene Städte A, B und C, D darin jeweils unmittelbar aufeinanderfolgend besucht, so sind die beiden zugehörigen Geradensegmente $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ im $\mathbb{R}^2$ bis auf die Endpunkte disjunkt).

18. Man zeige, daß Bäume mit wenigstens einer Kante die Baumweite 1 haben.

19. Man zeige, daß Kreise die Baumweite 2 haben.

20. Man formuliere die Eigenschaft, einen aufspannenden Kreis zu besitzen in MSO_2.

    Hinweis. Man formuliere zunächst die Eigenschaft einer Kantenmenge von G, zu jeder Ecke x genau zwei mit ihr inzidierende Kanten zu enthalten, als Prädikat in MSO_2.

21. Gegeben sei ein TSP-Algorithmus, der eine optimale Rundreise durch n Städte finden kann. Man konstruiere daraus einen Algorithmus, der entscheidet, ob ein gegebener n-eckiger Graph einen aufspannende Kreis besitzt (einen sogenannte *Hamilton-Kreis*), und dessen Zeitbedarf sich nur in der Größenordnung eines Polynoms in n gegenüber dem TSP-Algorithmus erhöht.

Kapitel 2

Matchings

2.1 Matchings in bipartiten Graphen

Eine Menge A von paarweise nicht adjazenten Ecken eines Graphen G heißt *Anticlique*. Eine Partition von $V(G)$ in höchstens k Anticliquen heißt *k-Färbung*, ihre Elemente heißen *Farbklassen*. G heißt *k-färbbar*, wenn G eine k-Färbung besitzt.

Einen 2-färbbaren Graphen nennt man auch *bipartit*. Ist G ein zusammenhängender bipartiter Graph mit wenigstens zwei Ecken, so gibt es genau eine 2-Färbung, und diese ist zweielementig.

Satz 2.1.1
Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge besitzt.

Beweis. Da Teilgraphen bipartiter Graphen bipartit sind, Kreise ungerader Länge aber nicht, kann ein bipartiter Graph keine Kreise ungerader Länge besitzen. Sei umgekehrt ein Graph ohne Kreise ungerader Länge gegeben, x_0 eine beliebige Ecke, und T ein Tiefensuchbaum bei x_0. Sei A die Menge aller Ecken geraden Abstandes von x_0 und B die Menge aller Ecken ungeraden Abstandes von x_0. Dann ist $\{A, B\}$ offensichtlich eine 2-Färbung von T, aber auch von G, denn ist yz eine Kante von $E(G) \setminus E(T)$ und o.B.d.A. y auf dem z, x_0-Weg in T (siehe Definition Tiefensuchbaum), so liegen x, y nicht beide in A und nicht beide in B, da sonst die Kante yz zusammen mit dem z, y-Teilweg von T einen Kreis ungerader Länge in G liefern würde. □

Eine Menge M von Kanten des Graphen G, die paarweise keine Ecken gemeinsam haben, heißt ein *Matching* von G. Ein *größtes Matching von G* ist ein Matching von größter Mächtigkeit unter allen Matchings von G. Sei $V(M) := \bigcup M$ die Menge der Ecken, die mit einer (und damit: genau einer) Kante aus M

inzident sind (somit gilt $|V(M)| = 2|M|$). Für $A \subseteq V(G)$ heißt M ein *Matching von A*, falls $A \subseteq V(M)$ gilt. Der folgende berühmte Heiratssatz von Hall charakterisiert, wann ein bipartiter Graph ein Matching einer seiner Farbklassen besitzt. Dazu sei die *Nachbarschaft* einer Menge von Ecken X eines Graphen G definiert durch $N_G(X) := \{z \in V(G) \setminus X$: es gibt ein $y \in X$ mit $yz \in E(G)\}$. Weiterhin sei für zwei Mengen A, B ihre *symmetrische Differenz* durch $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ definiert.

Satz 2.1.2 (Satz von Hall)
Sei A Klasse einer 2-Färbung des (bipartiten) Graphen G. Genau dann gibt es ein Matching von A, wenn die *Hall-Bedingung* gilt:

$$|N_G(X)| \geq |X| \text{ für alle } X \subseteq A.$$

Beweis. Die Hall-Bedingung ist notwending für die Existenz eines Matchings von A, denn ist M ein solches und $X \subseteq A$ so folgt $|N_G(X)| \geq |N_{G[M]}(X)| = |X|$. Für den Umkehrschluß benötigen wir ein weiteres Konzept:

Sei M ein Matching des (nicht notwendig bipartiten) Graphen G. Ein Weg $P = x_0x_1 \ldots x_\ell$ in G heißt *M-alternierend*, wenn für jedes $i \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$ die Kante x_ix_{i+1} genau dann in M liegt, wenn i ungerade ist. (Der Weg „beginnt" also mit einer Kante außerhalb von M und benutzt danach abwechselnd Kanten innerhalb und außerhalb von M.) Ein solcher M-alternierender Weg heißt *Verbesserungsweg von M*, falls x_0 und x_ℓ beide nicht aus $V(M)$ stammen, der Weg also mit einer Ecke außerhalb von $V(M)$ beginnt und endet. In diesem Fall ist ℓ ungerade, und

$$M \triangle E(P) = (M \setminus \{x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{\ell-2}x_{\ell-1}\}) \cup \{x_0x_1, x_2x_3, \ldots, x_{\ell-1}x_\ell\}$$

ist ein Matching von G und *größer* als M.

Seien nun G, A wie in den Voraussetzungen des Satzes, sei $B := V(G) \setminus A$, und sei M ein größtes Matching des Graphen G. Wir nehmen an, M sei kein Matching von A und zeigen, daß dann die Hall-Bedingung verletzt ist. Nach Voraussetzung gibt es ein $x_0 \in A \setminus V(M)$. Sei R die Menge aller y für die es einen x_0, y-Weg gibt, der ein M-alternierender Weg ist. Weil es keinen Verbesserungsweg von M gibt, ist x_0 die einzige Ecke aus $R \setminus V(M)$. Nach Konstruktion von R gibt es keine Kante aus M, die eine Ecke aus R mit einer aus $V(G) \setminus R$ verbindet; die Menge N der Kanten aus M mit Ecken aus R ist daher ein Matching von $R \cap A \setminus \{x_0\}$ und von $R \cap B$, daher gilt $|R \cap A| - 1 = |R \cap B|$. Desweiteren ist kein $x \in R \cap A$ zu einer Ecke y aus $B \setminus R$ benachbart, denn x ist durch einen M-alternierenden Weg P von x_0 aus erreichbar, und weil die letzte Kante dieses Weges (im Falle $x_0 \neq x$) aus M kommt, wäre auch P, a M-alternierend und somit y aus R, Widerspruch. Folglich ist $|N_G(A \cap R)| = |B \cap R| = |A \cap R| - 1$, so daß $X = A \cap R$ die Hall-Bedingung verletzt. □

Die größten Matchings eines (nicht notwendig bipartiten) Graphen lassen sich leicht durch Verbessungswege charakterisieren.

Satz 2.1.3 (Satz von Berge)
Sei M ein Matching des Graphen G. Genau dann gibt es ein Matching mit mehr Kanten als M, wenn es einen Verbesserungsweg von M gibt.

Beweis. Wir haben im Beweis des Satzes von Hall gesehen, daß im allgemeinen ein Verbessungsweg P von M die Konstruktion eines größeren Matchings $M \triangle E(P)$ erlaubt. Sei nun umgekehrt N ein Matching mit mehr Kanten als M. Dann ist jede Komponente von $H := G[M \cup N]$ ein Weg oder Kreis, entlang dem die Kanten aus M und N abwechselnd auftreten. Wegen $|N| > |M|$ enthält eine Komponente mehr Kanten aus N als aus M; diese muß also ein Weg P sein, der mit einer Kante aus N beginnt und endet und deswegen mit verschiedenen Ecken außerhalb von $V(M)$ beginnt und endet. P ist daher ein Verbesserungsweg von M. $\square$

2.2 Faktorsätze

Bezeichne $q(G)$ die Anzahl *ungerader* Komponenten des Graphen G, das heißt Komponenten mit ungeradzahlig vielen Ecken. Ist M ein Matching von G und $U := V(G) \setminus V(M)$, so enthält für jedes $S \subseteq V(G)$ jede ungerade Komponente C wenigstens eine Ecke x, zu der es kein $y \in V(C)$ mit $xy \in M$ gibt. Weil es andererseits nicht mehr als $|S|$ viele Kanten $xy \in M$ mit $x \in S$ und $y \notin S$ geben kann, müssen wenigstens $q(G-S)-|S|$ viele ungerade Komponenten von $G-S$ eine Ecke aus U enthalten, also gilt

$$q(G-S) - |S| \leq |U|$$

Im Fall der Gleichheit gilt für jedes andere Matching M' mit $U' := V(G) \setminus V(M)$: $|U'| \geq q(G-S) - |S| = |U|$, also $|M'| \leq |M|$, das heißt in diesem Fall ist M ein größtes Matching. Wir wollen eine Menge $S \subseteq V(G)$, für die es ein Matching M gibt mit $q(G-S) - |S| = |V(G) \setminus V(M)|$, eine *Barriere* von G nennen.

Gibt es beispielsweise ein Matching von $V(G)$, also eines mit $V(G) = V(M)$ — ein sogenanntes *perfektes Matching* —, so ist die leere Menge eine Barriere, ebenso alle einelementigen Mengen (für $s \in V(G)$ gilt ja $q(G-s)-1 \geq 0$). Besitzt für eine Ecke x der Graph $G-x$ ein perfektes Matching M, so ist die leere Menge ebenfalls eine Barriere von G, denn es gilt ja $q(G) - 0 \geq 1 = |V(G) \setminus V(M)|$. Graphen derart, daß für *jedes* x der Graph $G - x$ ein perfektes Matching hat, heißen auch *faktorkritisch*. Faktorkritische Graphen besitzen daher eine Barriere.

Zwei weitere Konstruktionen von Barrieren werden uns später als Induktionsmotor dienen.

(A) Sind G, H disjunkte Graphen und sind S, T Barierren von G bzw. H, so ist $S \cup T$ eine Barierre von $G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$. Denn nach Voraussetzung gibt es disjunkte Matchings M, N von G bzw. H mit $q(G-S) - |S| = |V(G) \setminus V(M)$ und $q(G-T) - |T| = |V(H) \setminus V(N)$, und weil $M \cup N$ ein

Matching von $G \cup H$ ist, folgt $q((G \cup H) - (S \cup T)) - |S \cup T| = q((G-S) \cup (H-T)) - |S| - |T| = q(G-S) - q(G-T) - |S| - |T| = |V(G) \setminus V(M)| + |V(H) \setminus V(N)| = |V(G \cup H) \setminus V(M \cup N)|$.

(B) Ist x eine Ecke von G, die in jedem größten Matching von G enthalten ist — eine sogenannte *wesentliche Ecke* — und S eine Barriere von $G - x$ so ist $S \cup \{x\}$ eine Barriere von G: Sei nämlich M ein größtes Matching von G. Nach Voraussetzung gibt es ein Matching N von $G - x$ mit $q(G - x - S) - |S| = |V(G - x) \setminus V(N)|$, und N ist kein größtes Matching von G. Also folgt $q(G - (S \cup \{x\})) - |S \cup \{x\}| = q(G - x - S) - |S| - 1 = |V(G - x) \setminus V(N)| - 1 = |V(G) \setminus V(N)| - 2 \geq |V(G) \setminus V(M)|$.

Satz 2.2.1 (Satz von Berge und Tutte)
Jeder zusammenhängende Graph ohne wesentliche Ecken ist faktorkritisch.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß für jedes größte Matching M und je zwei Ecken $x \neq y$ von G gilt: $\{x, y\} \cap V(M) \neq \emptyset$ (*). Dies geschieht induktiv über den Abstand von x, y. Nehmen wir an, daß x, y beide nicht aus $V(M)$ sind und betrachten einen kürzesten x, y-Weg in G. Dann besitzt P eine innere Ecke w, weil sonst $M \cup \{xy\}$ ein größeres Matching von G als M wäre. Nach Induktionsvoraussetzung ist $w \in V(M)$, und weil w nicht wesentlich ist, gibt es größtes Matching N von G mit $w \notin V(N)$, also $x, y \in V(N)$ abermals nach Induktionsvoraussetzung. Die Komponenten von $H := G[M \triangle N]$ sind Wege gerader Länge oder Kreise gerader Länge, deren Kanten abwechselnd zu M und N gehören, und jede der Ecken x, w, y liegt in genau einer der Mengen $V(M), V(N)$ und sind daher jeweils Endecken eines Weges von H. Weil x, y beide aus $V(N)$ kommen und die Komponenten von H gerade sind, gehören x, y nicht zum selben Weg. Daher gehört w nicht zur selben Weg wie x oder nicht zum selben Weg wie y, und wir dürfen aus Symmetriegründen annehmen daß w (und y) nicht zu der Komponente Q von H gehören, die x enthält. Dann aber ist $N \triangle E(Q)$ ein größtes Matching mit $x, w \notin V(N \triangle E(Q))$, im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Abschließend sei x eine Ecke von G. Weil x nicht wesentlich ist, gibt es ein größtes Matching von G mit $x \notin V(M)$. Wegen (*) gilt aber $y \in V(M)$ für jedes $x \in V(G) \setminus \{x\}$, also ist M ein perfektes Matching von $G - x$. Somit ist G faktorkritisch. □

Folgerung 2.2.1
Jeder Graph besitzt eine Barriere.

Beweis. Induktiv über $|V(G)|$; sei die Behauptung für Graphen mit weniger als $|V(G)|$ Ecken bewiesen. Nach (A) dürfen wir annehmen, daß G zusammenhängend ist, und nach (B) dürfen wir annehmen, daß G keine wesentlichen Ecken besitzt. Nach Satz 2.2.1 ist G faktorkritisch, und wir haben gesehen, daß dann $\emptyset$ eine Barriere von G ist. □

Folgerung 2.2.2 (Tutte-Berge-Formel)
Die größte Mächtigkeit eines Matchings des Graphen G ist gleich

$$\tfrac{1}{2}\min\{|V(G)| - q(G-S) + |S| : S \subseteq V(G)\}.$$

Beweis. Nach Folgerung 2.2.1 besitzt G eine Barriere S. Daher gibt es ein größtes Matching M mit $q(G-S) - |S| = |V(G) \setminus V(M)|$, also $|V(M)| = |V(G)| - q(G-S) + |S|$. Für jedes weitere S gilt $q(G-S) - |S| \leq |V(G) \setminus V(M)|$, also $|V(M)| \leq |V(G)| - q(G-S) + |S|$, und so folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.2.3 (Faktorsatz von Tutte)
Genau dann besitzt der Graph G ein perfektes Matching, wenn

$$q(G-S) \leq |S|$$

für alle $S \subseteq V(G)$ gilt.

Beweis. Ist M ein perfektes Matching, so gilt $q(G-S) - |S| \leq |V(G) \setminus V(M)| = 0$, also $q(G-S) \leq |S|$ für alle $S \subseteq V(G)$. Gelte umgekehrt $q(G-S) \leq |S|$ für alle $S \subseteq V(G)$. Wegen Folgerung 2.2.1 gibt es eine Barriere S von G und damit ein größtes Matching M von G mit $0 \leq |V(G) \setminus V(M)| = q(G-S) - |S| \leq 0$, also $V(G) = V(M)$, das heißt M ist perfekt. □

Sei G ein Graph. Der *Grad* der Ecke x ist die Anzahl der mit x inzidierenden Kanten und wird mit $d_G(x)$ bezeichnet. Da wir „Schlingen" und „Parallelkanten" konzeptuell ausgeschlossen haben, gilt $d_G(x) = |N_G(x)|$. Ein Graph ist *k-regulär*, wenn darin jede Ecke den Grad k hat. Der von einem perfekten Matching M in G induzierte Teilgraph $G[M] = (V(G), M)$ ist somit 1-regulär, und umgekehrt ist die Kantenmenge eines 1-regulären, aufspannenden Teilgraphen von G ein perfektes Matching.

Sei nun G ein Graph und $f : V(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gegeben. Ein *f-Faktor* von G ist ein aufspannender Teilgraph H von G mit $d_H(x) = f(x)$ für alle $x \in V(G)$ (kurz: $d_H = f$). Bezeichnen auch die konstant k Funktion mit k, so ist demnach ein k-Faktor ein k-regulärer aufspannender Teilgraph, und die 1-Faktoren entsprechen den perfekten Matchings. Der Faktorsatz bietet die Möglichkeit, für einen gegebenen Graphen nicht nur zu entscheiden, ob er einen 1-Faktor besitzt, sondern ob er einen f-Faktor *für beliebiges* f besitzt:

Wir konstruieren dazu aus dem gegebenen G und f mit der offensichtlich notwendigen Bedingung $f \leq d_G$ einen Hilfsgraphen H, indem wir jede Ecke durch einen bipartiten Graphen H_x mit Klassen A_x, B_x ersetzen, wobei $|A_x| = d_G(x)$ und $|B_x| = d_G(x) - f(x)$ gelte und jede Ecke aus A_x zu jeder aus B_x benachbart sei; daneben seien die $V(H_x)$ paarweise disjunkt. Für jede Kante $e = xy$ aus G ziehen wir genau eine Kante e' von A_x nach A_y ein, und zwar so, daß die Kanten e' paarweise keine Ecken gemeinsam haben.

Man kann sich dann leicht überlegen, daß G genau dann einen f-Faktor besitzt, wenn H einen 1-Faktor besitzt.

Hieraus läßt sich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an G und f für die Existenz eines f-Faktors gewinnen. Für $X, Y \subseteq V(G)$ sei dazu $E_G(X,Y) := \{xy \in E(G) : x \in X,\, y \in Y\}$.

Satz 2.2.2 (f-Faktor-Satz von Tutte)
Sei G ein Graph und $f : V(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Genau dann besitzt G einen f-Faktor, wenn

$q(S,T) + \sum_{x \in T}(f(x) - d_{G-S}(x)) \leq \sum_{x \in S} f(x)$ für alle disjunkten $S, T \subseteq V(G)$

gilt, wobei $q(S,T)$ die Zahl der Komponenten C von $G - (S \cup T)$ ist, für die $|E_G(V(C),T)| + \sum_{x \in V(C)} f(x)$ ungerade ist.

2.3 Übungen

1. Man formuliere für gegebenes festes k die Eigenschaft, eine k-Färbung zu besitzen, in MSO_2.

2. Man zeige: Ein Kreis ungerader Länge besitzt eine 2-Färbung, aber keine 3-Färbung.

3. Man zeige: Ein Graph G ist genau dann k-färbbar, wenn es eine Abbildung $f : V(G) \to C$ der Ecken in eine k-elementige Menge C gibt mit $f(x) \neq f(y)$ für alle $xy \in E(G)$. Auch eine derartiges f wird *k-Färbung* von G genannt, die Elemente aus C heißen dann auch *Farben*.

4. Man zeige, daß ein zusammenhängender bipartiter Graph genau eine 2-Färbung besitzt.

5. Man beweise den folgenden Satz von Tuza nach dem Vorbild des Beweises von Satz 2.1.1: Für $k \geq 2$ ist ein Graph k-färbbar, wenn er keine Kreise der Länge ℓ kongruent $+1$ modulo k besitzt. Gilt im allgemeinen auch die Umkehrung?

6. Man zeige, daß ein bipartiter Graph mit Klassen A, B genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $|A| = |B|$ gilt und die Hall-Bedingung für A erfüllt ist.

7. Man zeige, daß für $k \geq 1$ jeder k-reguläre bipartite Graph ein perfektes Matching besitzt.

8. Eine *Permutationsmatrix* ist eine Matrix mit genau einer 1 in jeder Zeile und in jeder Spalte und 0 überall sonst. Man zeige, daß eine quadratische Matrix über den nichtnegativen ganzen Zahlen genau dann die Summe von k Permutationsmatrizen ist, wenn alle Zeilen- und Spaltensummen gleich k sind.

9. Eine Matrix über den nichtnegativen reellen Zahlen heißt *doppelt-stochastisch*, wenn alle Zeilen- und Spaltensummen gleich 1 sind. Man zeige, daß jede doppelt-stochastische Matrix A sich aus Permutationsmatrizen konvex kombinieren läßt. (Das heißt es gibt Permutationsmatrizen P_i und nichtnegative reelle Zahlen λ_i mit $\sum \lambda_i = 1$ und $\sum \lambda_i P_i = A$.)
Hinweis. Induktion über die Anzahl der positiven Einträge von A; man subtrahiere ein geeignetes Vielfaches einer Permutationsmatrix von A und reskaliere.

10. Zwei Spieler wählen abwechselnd Ecken $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ eines Graphen derart, daß $x_0, x_1, \ldots, x_\ell$ in jedem Schritt ein Weg ist. Der Spieler, der zuletzt wählen konnte, gewinnt. Man zeige, daß dann, wenn G ein perfektes Matching hat, der *nicht zuerst* wählende Spieler eine Gewinnstrategie hat (also so wählen kann, daß er gewinnt), und daß andernfalls der *zuerst* wählende Spieler eine Gewinnstrategie hat.

11. Man zeige $2|E(G)| = \sum_{x \in V(G)} d_G(x)$. Kann es einen 3-regulären Graphen ungerader Eckenzahl geben?

12. Sei G ein zusammenhängender 3-regulärer Graph und $G-e$ zusammenhängend für jedes $e \in E(G)$. Man zeige, daß dann G ein perfektes Matching besitzt.

13. Sei $a = (A_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie endlicher Mengen. Ein *Repräsentantensystem* von a ist eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ aus I und $x_i \in A_i$ für alle $i \in I$. Man zeige, daß a genau dann ein Repräsentantensystem besitzt, wenn gilt

$$|\bigcup_{j \in J} A_j| \geq |J| \text{ für alle } J \subseteq I.$$

14. Eine *Überdeckung* des Graphen G ist eine Menge $U \subseteq V(G)$ mit $V(e) \cap U \neq \emptyset$ für alle $e \in E(G)$. Eine *kleinste Überdeckung* von G ist eine Überdeckung kleinster Mächtigkeit unter allen Überdeckungen von G. Man zeige den Satz von Kőnig, daß ein größtes Matching eines bipartiten Graphen genauso groß wie eine kleinste Überdeckung ist.
Hinweis. Man betrachte eine kleinste Überdeckung U und konstruiere ein Matching von $A \cap U$ nach $B \setminus U$, wobei A, B Farbklassen von G seien.

15. Seien A, B zwei Anticliquen größter Mächtigkeit im Graphen G. Man zeige, daß $G[A \triangle B]$ ein perfektes Matching besitzt.

16. Man zeige, daß ein Baum genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $q(G-x) = 1$ für alle $x \in V(G)$ ist.

17. Seien M, N größte Matchings des Graphen G. Man zeige, daß jede Komponente von $G[M \triangle N]$ ein Weg gerader Länge oder ein Kreis gerader Länge ist.

18. Sei G ein Graph ohne wesentliche Ecken. Man zeige, daß die leere Menge eine Barriere von G ist.

19. Man zeige, daß jede kleinste Überdeckung eines bipartiten Graphen G eine Barriere von G ist.

20. Man zeige für den im Anschluß an den Faktorsatz aus G und f konstruierten Graphen H, daß H genau dann einen 1-Faktor besitzt wenn G einen f-Faktor besitzt.

21. Zeigen Sie, daß aus den im f-Faktorsatz geforderten Ungleichungen für die Existenz eines f-Faktors die offensichtlich notwendige Bedingung $f \leq d_G$ folgt.

22. Zeigen Sie, daß die im f-Faktorsatz geforderten Ungleichungen notwendig für die Existenz eines f-Faktors sind.

    Hinweis. Man überlege sich, wieviele Kanten eines f-Faktors jeweils von den „ungeraden" Komponenten und von S nach T führen.

23. Man leite aus dem f-Faktorsatz eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines k-regulären aufspannenden Teilgraphen her (eines sogenannten *k-Faktors*). Warum ist dies für $k = 2$ nicht eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamilton-Kreises?

Kapitel 3

Flüsse

3.1 Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Ein *Digraph* $D = (V, E)$ ist ein Paar bestehend aus einer Menge V von Ecken und einer Menge $E \subset V \times V \setminus \mathrm{id}_V$ von Paaren (x, y) mit $x \neq y$ aus V (also eine binäre antireflexive Relation auf V). Auch hier heißen die Elemente aus E *Kanten* und wir schreiben xy anstelle von (x, y) für die Kante *von x nach y*. Im Gegensatz zum „graphischen" Fall gilt hier $xy \neq yx$. Für $X, Y \subseteq V(D)$ sei $E_D(X, Y) := E(D) \cap (X \times Y)$, also die Menge aller Kanten von einer Ecke aus X nach einer Ecke aus Y, sowie $E^+_D(X) := E_D(X, V(D) \setminus X)$ und $E^-_D(X) = E_D(V(D) \setminus X, X)$. Für $x \in V(D)$ seien überdies $E^+_D(x) := E^+_D(\{x\})$ und $E^-_D(x) := E^-_D(\{x\})$ definiert.

Viele der Definitionen der vorangegangenen Abschnitte übetragen sich (gelegentlich wortwörtlich) oder können auf den zugrundeliegenden ungerichteten Graphen $\mathrm{U}(D) := (V, \{\{x, y\} : xy \in E(D)\})$ zurückgeführt werden. Aus Kreisen werden *kontinuierlich gerichtete Kreise*, Wege werden kontinierlich gerichtet (man kann also im allgemeinen aus einem a, b-Weg durch Folgenumkehr keinen b, a-Weg herstellen, insbesondere ist die Zusammenhangsrelation $\sim$ nicht symmetrisch (aber reflexiv und transitiv)).

Innerhalb dieses Kapitels erweitern wir Funktionen $f : E(D) \to \mathbb{R}$ durch Summation auf Teilmengen von $E(D)$, also $f(S) := \sum_{e \in S} f(e)$ für jedes $S \subseteq E(D)$; $f(S)$ bezeichnet also *nicht*, wie sonst üblich, die Bildmenge von S unter f.

Ein *Netzwerk* ist ein Quadrupel $N = (D, c, s, t)$, worin D ein Digraph, $s \neq t$ zwei ausgezeichnete Ecken von D und $c : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind. Mit Blick auf die intendierten Anwendungen heißen s, t *Quelle* bzw. *Senke* und c die *Kapazitätsfunktion* des Netzwerks. Ein *Fluß* von N (oder auch *s, t-Fluß*) ist eine Funktion $f : E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit (i) $f(e) \leq c(e)$ für alle $e \in E(D)$ (kompakter: $f \leq c$) und (ii) $f(E^+_D(x)) = f(E^-_D(x))$ für alle $x \in V(D) \setminus \{s, t\}$. Die Bedingung an x in

(ii) wird *Kirchhoff-Regel* genannt (die Kirchhoff-Regel soll also überall außer an Quelle und Senke gelten). Die *Stärke* eines Flusses f im Netzwerk N ist definiert durch $||f|| := f(E_D^+(s)) - f(E_D^-(s))$. Ein Fluß f heißt *ganzzahlig*, falls $f(e)$ ganzzahlig für jedes $e \in E(D)$ ist. Ist P ein s,t-Weg in D und $c > 0$, so wird durch $f_P(e) := c$ für $e \in E(P)$ und $f_P(e) := 0$ für $e \in E(D) \setminus E(P)$ ein Fluß der Stärke c definiert; jeder derartige Fluß heißt *elementar* oder ein *Elementarfluß*.

In jedem Netzwerk ist $f = 0$ ein Fluß (der Stärke 0). Wir wollen die Aufgabe behandeln, einen möglichst ,,starken" Fluß in einem Netzwerk zu konstruieren.

Ein *Schnitt* im Netzwerk N ist eine Menge $X \subseteq V(D)$ mit $s \in X$ und $t \notin X$. Die *Kapazität* $||X||$ eines Schnittes ist die Zahl $c(E_D^+(X))$. Die Stärke eines Flußes f läßt sich an den Zwischenkanten jedes beliebigen Schnittes X wiederfinden, denn es gilt nach Definition von f und wegen der Kirchhoff-Regel $||f|| = \sum_{x \in X} f(E_D^+(x)) - f(E_D^-(x))$; der Flußwert jeder Kante yz mit $x, y \in X$ tritt in genau zwei Termen dieser Summe auf, nämlich einmal in der Summe $f(E_D^+(y))$ und einmal, mit entgegengesetztem Vorzeichen, in $-f(E_D^-(z))$; diese Terme heben sich daher in summa auf, und übrig bleiben Flußwerte der Kanten yz mit $y \in X$ und $z \notin x$ (einmal) im Term $f(E_D^+(y))$ und der Kanten yz mit $y \notin X$ und $z \in X$ (einmal) mit negativem Vorzeichen im Term $-f(E_D^+(z))$. Es folgt $||f|| = \sum_{x \in X} f(E_D^+(x)) - f(E_D^-(x)) = f(E_D^+(X)) - f(E_D^-(X))$. Insbesondere gilt $||f|| \leq ||X||$ für jeden Fluß f und jeden Schnitt $||X||$, also auch $\max\{||f|| : f \text{ ein Fluß}\} \leq \min\{||X|| : X \text{ ein Schnitt}\}$. Das berühmte Max-Flow-Min-Cut-Theorem besagt, daß sogar die Gleichheit gilt:

Satz 3.1.1 (Max-Flow-Min-Cut-Theorem)
In jedem Netzwerk N gilt $\max\{||f|| : f \text{ ein Fluß}\} = \min\{||X|| : X \text{ ein Schnitt}\}$.

Beweis. Sei f ein Fluß. Innerhalb des Beweises wollen wir — nicht notwendig kontinuierlich gerichtete — Wege im Digraphen D betrachten: Ein *Residualweg von s nach z* sei eine Folge $P = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_\ell, x_\ell$ aus paarweise verschiedenen Ecken $x_0, \ldots, x_\ell$ mit $x_0 = s$ und $x_\ell = z$ und Kanten e_i von D mit $e_i = x_{i-1}x_i$ (*Vorwärtskante*) oder $e_i = x_i x_{i-1}$ (*Rückwartskante*). Wie üblich schreiben wir $V(P) = \{x_0, \ldots, x_\ell\}$ und $E(P) = \{e_1, \ldots, e_\ell\}$. Für eine Vorwärtskante e von P sei die $r(e) = c(e) - f(e)$, für eine Rückwärtskante dagegen $f(e)$. Die *Residualkapazität* von P ist definiert durch $r(P) := \min\{r(e) : e \in E(P)\}$. Ist P ein Residualweg von s nach t, so wird durch $f + P$ durch $(f+P)(e) := f(e) + r(P)$ für jede Vorwärtskante von P, $(f+P)(e) := f(e) - r(P)$ für jede Rückwartskante von P, und $(f+P)(e) = f(e)$ für jedes $e \in E(D) \setminus E(P)$ ein Fluß der Stärke $||f|| + r(P)$ definiert.

Ist nun f ein Fluß von maximaler Stärke, so gibt es keine Residualwege von s nach t mit positiver Residualkapazität. Daher ist die Menge X aller z, für die ein Weg von s nach z mit positiver Residualkapazität existiert, ein Schnitt. Für $e \in E_D^+(X)$ ist $c(e) - f(e) = 0$, also $c(e) = f(e)$, weil sonst die Ecke aus $V(e) \setminus X$ durch einen Weg positiver Residualkapazität (mit letzter Kante e, als Vorwärtskante) erreichbar wäre, und aus dem gleichen Grund ist $f(e) = 0$ für

$e \in E_D^-(X)$. Daher gilt $||X|| = f(E_D^+(X)) - f(E_D^-(X)) = ||f||$. □

Satz 3.1.2 (Integrality Theorem)
Sei N ein Netzwerk mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion. Dann gibt es einen ganzzahligen Fluß f maximaler Stärke, der die Summe von ganzahligen Elementarflüssen ist.

Beweis. Wir beginnen mit dem Fluß $f = 0$. Solange es einen Residualweg P von s nach t von positiver Residualkapazität gibt, gehen wir zum Fluß $f := f + P$ über und iterieren. Da $r(P)$ in jedem Schritt ganzzahlig ist, bricht das Verfahren mit einem ganzzahligen Fluß f ab, und wie im vorangegangenen Beweis findet man einen Schnitt X mit $||X|| = ||f||$, so daß f ein maximaler Fluß ist. Für den zweiten Teil der Behauptung zeigen wir, daß es zu jedem ganzzahligen Fluß f einen ganzzahligen Fluß g gleicher Stärke gibt, der die Summe ganzzahliger Elementarflüße ist, per Induktion über $||f||$. Für $||f|| = 0$ ist nichts zu zeigen, und im Fall $||f|| > 0$ muß es einen s,t-Weg P in D mit $f(e) > 0$ für alle $e \in E(P)$ geben, denn andernfalls ist die Menge X aller z, für die es einen s,z-Weg Q in D mit $f(e) > 0$ für alle $e \in E(P)$ gibt ein Schnitt mit $||f|| = f(E_D^+(X)) - f(E_D^-(X)) \leq 0$, Widerspruch. Wir definieren $f'(e) := f(e) - 1$ und $c'(e) := c(e) - 1$ für $e \in E(P)$ und $f'(e) := f(e)$ und $c'(e) := c(e)$ für $e \in E(D) \setminus E(P)$. Dann ist f' ein Fluß der Stärke $||f|| - 1$ im Netzwerk $N' = (D, c', s, t)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Fluß g' mit $||g'|| = ||f'||$ in N', der die Summe ganzzahliger Elementarflüsse ist. Dann aber ist $g := g' + f_P$ ein Fluß in N mit $||g|| = ||f||$ und Summe ganzzahliger Elementarflüsse. □

3.2 Der Satz von Menger

Seien s, t Ecken des Digraphen oder Graphen D. Eine Menge $X \subseteq E(D)$ derart, daß $D - X$ keinen s,t-Weg besitzt, heißt eine *von s nach t trennende* Kantenmenge, im ungerichteten Fall auch eine *s,t trennende* Kantenmenge. Offensichtlich gibt es im Fall $s \neq t$ (und nur dann) eine solche trennende Kantenmenge. Zwei Wege P, Q eines Graphen oder Digraphen heißen *kantendisjunkt*, falls $E(P) \cap E(Q) = \emptyset$ gilt.

Satz 3.2.1 (Satz von Menger, lokale gerichtete Kantenversion)
Seien $s \neq t$ Ecken des Digraphen D. Die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter s,t-Wege ist gleich der minimalen Anzahl von Kanten einer von s nach t trennenden Kantenmenge.

Beweis. Sei k die maximale Anzahl paarweise disjunkter s,t-Wege und ℓ die minimale Anzahl von Kanten einer von s nach t trennenden Kantenmenge. Da jeder s,t-Weg wenigstens eine Kante jeder von s nach t trennenden Kantenmenge enthält, folgt $k \leq \ell$. Wir betrachten das durch $c : E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $c(e) := 1$ für alle $e \in E(D)$ gegebene Netzwerk $N = (D, c, s, t)$. Sei darin X ein beliebiger

Schnitt. Dann gilt $||X|| = |E_D^+(X)|$, und weil $E_D^+(x)$ eine von s nach t trennende Kantemenge ist, folgt $||X|| \geq \ell$. Nach Satz 3.1.2 gibt es einen ganzzahligen Fluß f der Stärke ℓ, der die Summe ganzzahliger Elementarflüsse positiver Stärke ist, also Wege $P_1, \ldots, P_j$ mit $f = f_{P_1} + \cdots + f_{P_j}$. Weil alle f_{P_i} die Stärke 1 haben, ist $j = \ell$ und die P_i sind paarweise kantendisjunkt. Folglich gilt $k \geq \ell$, also $\ell = k$. □

Seien s, t Ecken des Digraphen oder Graphen D. Eine Menge $X \subseteq V(D) \setminus \{s, t\}$ derart, daß $D - X$ keinen s, t-Weg besitzt, heißt eine *von s nach t trennende* Eckenmenge, im ungerichteten Fall auch eine s, t *trennende* Eckenmenge . Im Fall $s \neq t$ und $st \notin E(D)$ (und nur dann) gibt es eine solche Eckenmenge. Zwei s, t-Wege P, Q in D heißen *offendisjunkt*, falls $V(P) \cap V(Q) = \{s, t\}$ gilt.

Folgerung 3.2.1 (Satz von Menger, lokale gerichtete Eckenversion) Seien $s \neq t$ Ecken des Digraphen D und $st \notin E(D)$. Die maximale Anzahl paarweise offendisjunkter s, t-Wege ist gleich der minimalen Anzahl von Kanten einer von s nach t trennenden Eckenmenge.

Beweis. Sei D' der Digraph mit Ecken $\{x^+, x^- : x \in V(D)\}$ und allen Kanten aus $M := \{x^- x^+,\ x \in V(D)\}$ sowie einer Kante $y^+ z^-$ für jede Kanten $xz \in E(D)$. Dabei ist $s^+ \neq t^-$. Ist $P = x_0, \ldots, x_\ell$ ein s, t-Weg in D, so ist $P' := x_0^+, x_1^-, x_1^+, x_2^-, x_2^+, \ldots, x_{\ell-1}^+, x_\ell^-$ ein s^+, t^--Weg in D', und ist Q ein weiterer zu P offendisjunkter s, t-Weg in D so sind P', Q' kantendisjunkt in D'. Ist umgekehrt P' ein s^+, t^--Weg aus D', so ist P' von der Form $x_0^+, x_1^-, x_1^+, x_2^-, x_2^+, \ldots, x_{\ell-1}^+, x_\ell^-$ und somit $P'' := x_0, x_1, \ldots, x_\ell$ ein s, t-Weg in D, und ist Q' ein weiterer, zu P' kantendisjunkter s^+, t^--Weg, so sind P'', Q'' offendisjunkt in D. Ist S eine von s nach t trennende Eckenmenge in D, so ist $S' := \{x^- x^+ : x \in V(D)\}$ eine von s^+ nach t^- trennende Kantenmenge in D' mit $|S'| = |S|$ (sonst gäbe es einen s^+, t^--Weg P' ohne Kanten aus S' in D', und P'' wäre ein s, t-Weg in D ohne innere Ecken aus S, Widerspruch). Die maximale Anzahl ℓ paarweise offendisjunkter s, t-Wege in D ist daher gleich der maximalen Anzahl ℓ' kantendisjunkter s^+, t^--Wege in D'.

Sei umgekehrt S' eine von s^+ nach t^- trennende Kantenmenge in S'. Für $y \in M$ sei $\overline{e} := e$. Ist $e = y^+ z^-$ für ein $xz \in E(D)$ und $z \neq t$ so setzen wir $\overline{e} := z^- z^+$, und ist $e = y^+ t^-$ so setzen wir $\overline{e} := y^- y^+$. Jeder s^+, t^--Weg, der eine Kante e aus S enthält, muß auch die Kante $\overline{e}$ enthalten; weil außerdem kein solcher Weg die Kante $s^- s^+, t^- t^+$ enthält, ist $\overline{S'} := \{\overline{e} :\in S'\} \setminus \{s^- s^+, t^- t^+\} \subseteq M$ ebenfalls eine von s^+ nach t^+ trennende Kantenmenge in D' mit $|\overline{S'}| \leq |S'|$. Wäre P ein s, t-Weg in D ohne eine Ecke aus $S'' := \{z :\ z^- z^+ \in \overline{S'}\}$, so wäre P' ein s^+, t^--Weg in D' ohne eine Kante aus $\overline{S'}$, Widerspruch. Ist nun $S \subseteq V(D) \setminus \{s, t\}$ eine kleinste von s nach t trennende Kantenmenge, so ist S' eine von s^+ nach t^+ trennende Kantenmenge und darunter von kleinster Mächtigkeit (denn gäbe es ein kleineres solches T' so ist T'' eine s, t-trennende Eckenmenge von D, aber $|T''| \leq |T'| < |S'|$, Widerspruch); die minimale Anzahl k von Ecken einer von s nach t trennenden Eckenmenge in D ist daher gleich der minimalen Anzahl k' einer von s^+ nach t^- trennenden Kantenmenge in D'.

Wegen Theorem 3.2.1 folgt $\ell' = k'$ und daraus die Behauptung $\ell = k$. $\square$

Hieraus ergeben sich weitere Versionen des Satzes von Menger, zum Beispiel:

Folgerung 3.2.2 (Satz von Menger, lokale ungerichtete Eckenversion) Seien $s \neq t$ nicht benachbarte Ecken des Graphen G. Die maximale Anzahl paarweise offendisjunkter s,t-Wege ist gleich der minimalen Anzahl von Kanten einer s,t trennenden Eckenmenge.

Beweis. Sei D der Digraph mit $V(D) = V(G)$ und den Kanten xy für die x, y in G benachbart sind. Da jeder s,t-Weg in G in Folgendarstellung als s,t-Weg in D aufgefaßt werden kann und umgekehrt, folgt die Behauptung mittels Folgerung 3.2.1. $\square$

Ein Graph G heißt *k-zusammenhängend*, falls $|V(G)| > k$ ist und $G - S$ zusammenhängend ist für jedes $S \subseteq V(G)$ mit $|S| < k$. Ein $T \subseteq V(G)$ derart, daß $G - T$ unzusammenhängend ist, heißt eine *G trennende Eckenmenge.*

Folgerung 3.2.3 (Menger, globale ungerichtete Eckenversion) Ein Graph mit $|V(G)| > 1$ ist genau dann k-zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Ecken k offendisjunkte Wege gibt.

Beweis. Sei G k-zusammenhängend und s, t seien Ecken in G. Im Fall $st \notin E(G)$ folgt die Existenz von k vielen offendisjunkten s,t-Wegen direkt aus Folgerung 3.2.2, weil es nach Voraussetzung keine s,t-trennende Eckenmenge S mit $|S| < k$ gibt. Im Fall $st \in E(G)$ betrachte man den Graphen $G - st$; gäbe es eine s,t trennende Eckenmenge T von $G - st$ mit $|T| < k - 1$, so sei C die Komponente von $(G - st) - T$, welche s enthält und C' die Vereinigung aller anderen Komponenten. Im Fall $|V(C)| > 1$ ist $T \cup \{s\}$ eine trennende Eckenemenge von G mit weniger als k Elementen, andernfalls ist $|V(C')| > 1$ und $T \cup \{t\}$ eine trennende Eckenmenge von G mit weniger als k Elemenenten — in beiden Fällen ein Widerspruch. Daher gibt es nach Folgerung 3.2.2 $k - 1$ paarweise offendisjunkte s,t-Wege in $G - st$, zusammen mit $P = s, t$ also k viele paarweise offendisjunkte Wege in G.

Gebe es umgekehrt zwischen je zwei Ecken von G k offendisjunkte Wege, etwa für $s \neq t$ aus $V(G)$ dann enthält höchstens einer dieser Wege keine inneren Ecken, so daß $|V(G)| > k$ folgt. Ist T eine trennende Eckenmenge von G, so ist T eine s,t trennende Eckenmenge für gewisse s, t, und $|T| \geq k$ ergibt sich sofort aus 3.2.2 $\square$

3.3 Der Satz von Gutnikov

Wir wollen im folgenden eine Verallgemeinerung des Satzes von Menger auf eine große Klasse „graphenartiger" Strukturen darstellen. Dieser Satz wurde von Gutnikov zu Zeiten des Kalten Krieges gefunden, ist aber nicht recht ins Kollektivbewußtsein der Graphentheorie geraten. Wir geben hier eine etwas speziellere

Version an. Ein *allgemeiner Graph* $G = (V, E, \mathrm{init}, \mathrm{ter})$ ist ein Quadrupel disjunkter Mengen V, E und Abbildungen $\mathrm{init}, \mathrm{ter} : E(G) \to \mathfrak{P}(V(G))$. Wieder werden V, E als Ecken bzw. Kanten interpretiert, und für jede Kante $e \in E(G)$ beschreiben $\mathrm{init}(e)$ und $\mathrm{ter}(e)$ die Mengen der *Start-* bzw. *Ziel-Ecken* von e.

Im Fall $\mathrm{init}(e) = \mathrm{ter}(e)$ erhält man einen *ungerichteten* allgemeinen Graphen, und falls außerdem $|\mathrm{init}(e) = \mathrm{ter}(e)| \in \{1, 2\}$ gilt einen *Multigraphen*. Digraphen lassen sich dutrch entsprechende Einschränkungen gewinnen, jedoch auch sogenannte *Hypergraphen*, bei denen $\mathrm{init}(e) = \mathrm{ter}(e)$ gilt, jedoch keine Einschränkungen an die Größe dieser Mengen.

Eine Folge $P = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_\ell, x_\ell$ heißt ein *Weg* von a nach b der *Länge* ℓ oder schlicht ein *a, b-Weg*, wenn $x_0 = a$ und $x_\ell = b$ gilt, $x_0, \ldots, x_\ell$ paarweise verschiedene Ecken und $e_1, \ldots, e_\ell$ paarweise verschiedene Kanten von G sind sowie $x_{i-1} \in \mathrm{init}(e_i)$ und $x_i \in \mathrm{ter}(e_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt. Wir definieren $V(P) := \{x_0, \ldots, x_\ell\}$ und $E(P) := \{e_1, \ldots, e_\ell\}$. Entsprechend ist für $A, B \subseteq V(G)$ ein *A, B-Weg* in G ein a, b-Weg mit $a \in A$ und $b \in B$, und daraus leiten wir den Separations-Begriff ab: $S \subseteq V(G) \cup E(G)$ heißt ein *A, B-Separator*, falls für jeden A, B-Weg P gilt $S \cap (V(P) \cup E(P)) \neq \emptyset$, falls also jeder A, B-Weg wenigstens ein Element aus S enthält. Zwei A, B-Wege heißen *S-disjunkt* für ein $S \subseteq V(G) \cup E(G)$, falls $(V(P) \cup E(P)) \cap (V(Q) \cup E(Q)) \cap S = \emptyset$ ist, falls also P, Q keine Elemente aus S gemeinsam haben.

Satz 3.3.1 (Satz von Gutnikov)
Sei G ein allgemeiner Graph, $A, B \subseteq V(G)$, und S ein A, B-Separator. Genau dann gibt es k viele paarweise S-disjunkte Wege, wenn es keinen A, B-Separator $T \subseteq S$ mit $|T| \leq k$ gibt.

Durch Spezialisierung erhält man jede in diesem Abschnitt genannte lokale Version des Satzes von Menger, zum Beispiel Folgerung 3.2.2 durch $A = \{a\}, B := \{b\}$, $S := V(G) \setminus \{a, b\}$ für Graphen G.

3.4 Übungen

1. Seien f, g zwei Flüße im Netzwerk $N = (D, c, s, t)$ mit $f + g \leq c$ (punktweise). Man zeige, daß $f + g$ ein Fluß der Stärke $||f|| + ||g||$ ist.
2. Sei f ein Fluß und X ein Schnitt im Netzwerk $N = (D, c, s, t)$ mit $||f|| = ||X||$. Man zeige ohne Verwendung der Betrachtungen ab einschließlich Satz 3.1.1, daß f ein Fluß maximaler Stärke und X ein Schnitt minimaler Kapazität ist.
3. Man zeige, daß nicht notwendig alle Flüsse maximaler Stärke in einem Netzwerk mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion ganzzahlig sind.
4. Seien X, Y zwei Schnitte minimaler Kapazität im Netzwerk N. Man zeige, da dann auch $X \cap Y$ und $X \cup Y$ Schnitte minimaler Kapazität in N sind.

5. Seien A, B disjunkte Mengen und $a : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $b : B \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$. (a, b) heißt *darstellbar*, falls es einen bipartiten Graphen G mit Klassen A, B und $d_G|A = a$ und $d_G|B = b$ gibt. Man formuliere das Entscheidungsproblem, ob ein gegebenes (a, b) darstellbar ist, als ein Flußproblem.

6. Entstehe der Graph G aus einem Baum ohne Ecken des Grades 2 mit den Blättern $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$, $\ell \geq 3$ durch Hinzufügen der Kanten x_0x_1, $x_1x_2, \ldots,$ $x_{\ell-2}x_{\ell-1}$, $x_{\ell-1}x_0$. Man zeige, daß G 3-zusammenhängend ist.

7. Sei G ein Graph und $k \geq 1$. Man zeige, daß durch $a \sim b :\longleftrightarrow$ es gibt k kantendisjunkte a, b-Wege eine Äquivalenzrelation definiert wird. Gilt dies jeweils sinngemäß auch für den gerichteten Fall und für den Fall offendisjunkter Wege?

8. Sei G ein k-zusammenhängender Graph, seien a eine Ecke von G und B eine wenigstens k-elementige Menge von Ecken ohne a. Ein *a, B-Weg* P ist ein a, b-Weg in G mit $B \cap V(P) = \{b\}$. Man zeige: Es gibt k a, B-Wege, die paarweise nur a gemeinsam haben.

   Hinweis. Man betrachte den Graphen, der aus G durch Hinzufügen einer neuen Ecke z und Kanten zwischen z und jeder Ecke aus B entsteht.

9. Man zeige, daß für $k \geq 2$ es zu je k Ecken eines k-zusammenhängenden Graphen einen Kreis gibt, der sie alle enthält. Kann darin im allgemeinen die Reihenfolge des Auftretens der gegebenen Ecken vorgeschrieben werden?

10. Man zeige: Wenn ein Graph G k viele Spannbäume besitzt, dann ist G k-kantenzusammenhängend. Gilt im allgemeinen auch die Umkehrung?

Kapitel 4

Färbungen

4.1 Greedy-Färbung

Die *chromatische Zahl* des Graphen G ist definiert durch $\chi(G) := \min\{k : G$ ist k-färbbar$\}$, und eine $\chi(G)$-Färbung heißt auch eine *optimale Färbung*. Das Problem, $\chi(G)$ zu bestimmen oder auch nur zu entscheiden, ob bei festem k gilt: $\chi(G) = k$ oder sogar nur $\chi(G) \leq k$, ist für $k \geq 3$ NP-vollständig. Daher ist man an Prozeduren interessiert, die in Polynomialzeit eine „gute" k-Färbung liefern, wie auch an Graphenparametern, die die chromatische Zahl abschätzen und „leicht" zu bestimmen sind.

Die *Cliquenzahl* $\omega(G) := \max\{|C| : C$ ist Clique von $G\}$ — wobei eine *Clique* eine Menge von paarweise benachbarten Ecken von G ist — ist eine untere Schranke für $\chi(G)$, und auch die *Anticliquenzahl* $\alpha(G) = \max\{|A| : A$ ist Anticlique von $G\}$ liefert vermöge $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ eine untere Schranke für G; allerdings gehört die Bestimmung von $\alpha(G)$ und $\omega(G)$ ebenfalls zu den NP-vollständigen Optimierungsproblemen.

Bezeichne $\delta(G) := \min\{d_G(x) : x \in V(G)\}$ und $\Delta(G) := \max\{d_G(x) : x \in V(G)\}$ den *Minimal-* bzw. *Maximalgrad* des nichtleeren Graphen G. Wir wollen uns überlegen, daß $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ ist und sich eine Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben leicht herstellen läßt.

Seien dazu $k > 0$ eine Zahl $x_1, \ldots, x_n$ eine Aufzählung der Ecken des nichtleeren Graphen G mit der Eigenschaft, daß $|N_G(x_{\ell+1}) \cap \{x_1, \ldots, x_\ell\})| < k$ gilt, wir konstruieren daraus induktiv eine k-Färbung $\mathfrak{C}$ von G (zum Beispiel erfüllen $k := \Delta(G) + 1$ und eine beliebige Aufzählung diese Bedingung; die resultierende k-Färbung heißt dann auch *Greedy-Färbung*): Sei $G_\ell := G[\{x_1, \ldots, x_\ell\}]$ für $\ell \geq 0$. Offenbar ist $\emptyset$ eine k-Färbung von G_0. Ist nun $\mathfrak{C}$ eine k-Färbung von G_ℓ, $\ell < n$, so ist im Fall $|\mathfrak{C}| < k$ die Menge $\mathfrak{C} \cup \{\{x_{\ell+1}\}\}$ eine k-Färbung von $G_{\ell+1}$; im Falle $|\mathfrak{C}| = k$ gibt es ein $A \in \mathfrak{C}$ ohne Nachbarn von $x_{\ell+1}$, so daß $(\mathfrak{C} \setminus \{A\}) \cup \{A \cup \{x_{\ell+1}\}\}$

eine k-Färbung von $G_{\ell+1}$ ist. Induktiv erhält man eine k-Färbung von $G = G_n$.

Das kleinste k, für daß es eine Aufzählung wie oben gibt, heißt die *Reihenzahl von* G und wird mit $\mathrm{col}(G)$ bezeichnet. Somit haben wir gezeigt:

Satz 4.1.1
Für jeden Graphen ist $\chi(G) \leq \mathrm{col}(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Für die Reihenzahl gibt es eine alternative Darstellung:

Satz 4.1.2
Für jeden Graphen G ist $\mathrm{col}(G) = \max\{\delta(H) : H \text{ ind. Teilgraph von } G\} + 1$.

Beweis. Sei $D := \max\{\delta(H) : H \text{ ind. Teilgraph von } G\}$. Wir definieren induktiv (abwärts) die folgende Aufzählung von $V(G)$: Sind $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ schon definiert, so sei x_ℓ eine Ecke minimalen Grades in $G_\ell := G - \{x_{\ell+1}, \ldots, x_n\}$. Danach gilt $|N_G(x_\ell) \cap \{x_1, \ldots, x_{\ell-1}\}| = \delta(H) \leq D < D + 1$, also ist die Reihenzahl k von G höchstens $D + 1$. Sei umgekehrt $x_1, \ldots, x_n$ eine Aufzählung von $V(G)$, die die Reihenzahl k realisiert, und H ein induzierter Teilgraph von G, und $x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}$ die induzierte Aufzählung von $V(H)$ (also $i_1 < \cdots < i_h$). Dann gilt $\delta(H) \leq |N_H(x_{i_h}) \cap \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{(h-1)}}\}| \leq |N(x_{i_h}) \cap \{x_1, \ldots, x_{(i_h-1)}\}| < k$. Also gilt $k > \delta(H)$ für jeden induzierten Teilgraphen H von G, und damit $k > D$. $\Box$

4.2 Die Sätze von Brooks und Vizing

Ist $\mathfrak{C}$ eine k-Färbung des Graphen G und sind $A \neq B$ aus $\mathfrak{C}$, so heißt eine Komponente H von $G[A \cup B]$ eine *A, B-Kempe-Kette*. Die Menge $A \triangle V(H) = (A \setminus V(H)) \cup V(H) \cap B$ ist eine Anticlique, weil alle Nachbarn aus A einer Ecke aus $V(H) \cap B$ in $V(H)$ liegen; ebenso $B \triangle V(H)$. Deswegen ist auch $\mathfrak{C}(H) := (\mathfrak{C} \setminus \{A, B\}) \cup \{A \triangle V(H), B \triangle V(H)\}$ eine k-Färbung von G, und wir sagen, sie entstehe aus $\mathfrak{C}$ durch *Farbtausch entlang* H.

Sei $x \in A \in \mathfrak{C}$ und $B \neq A$ aus $\mathfrak{C}$ enthalte keine Nachbarn von x in G (man sagt gelegentlich: B *fehlt bei* x); im Fall $|\mathfrak{C}| < k$ darf auch $B = \emptyset$ statt aus $\mathfrak{C}$ gewählt werden. Dann ist mit $\mathfrak{C}$ auch $((\mathfrak{C} \setminus \{A, B\}) \cup \{A \setminus \{x\}, B \cup \{x\}\}) \setminus \{\emptyset\}$ eine k-Färbung von G, und wir sagen, sie entstehe aus $\mathfrak{C}$ durch *Umfärben* von x. Ein solches Umfärben ist immer dann möglich, wenn die Nachbarn von x in ingsesamt höchstens $k - 2$ Farbklassen liegen.

Satz 4.2.1 (Satz von Brooks)
Sei G ein zusammenhängender Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ und dort Gleichheit genau dann, wenn G ein Kreis ungerader Länge oder ein vollständiger Graph ist.

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $\Delta(G) \leq 2$ und für vollständige Graphen. Sei G ein Gegenbeispiel mit möglichst wenigen Kanten und

$\Delta := \Delta(G) \geq 3$ und $xy \in E(G)$. Dann besitzt mit jeder Komponente von $G - xy$ auch $G - xy$ selber eine Δ-Färbung $\mathfrak{C}$, und für jede solche Färbung liegen x, y im selben $A_{\mathfrak{C}}$ aus $\mathfrak{C}$ (*), weil sonst $\mathfrak{C}$ auch eine Δ-Färbung von G wäre. Es gilt $|\mathfrak{C}| = \Delta$, da sich sonst durch Umfärben von y eine Δ-Färbung von $G - xy$ gewinnen ließe, die (*) verletzte. Für jedes $B \in \mathfrak{C} \setminus A_{\mathfrak{C}}$ liegt y in der $A_{\mathfrak{C}}, B$-Kempe-Kette $H_{\mathfrak{C},B}$, die x enthält (**), denn sonst wäre $\mathfrak{C}(H_{\mathfrak{C},B})$ eine k-Färbung von $G - xy$, die (*) zuwiderliefe. Wegen $d_{G-xy}(x) \leq \Delta - 1 = |\mathfrak{C} \setminus \{A_{\mathfrak{C}}\}|$ folgt $d_{H_{\mathfrak{C},B}}(x) = 1$, ebenso für y. In $H := H_{\mathfrak{C},B}$ gibt es einen x, y-Weg P, und wäre $H \neq P$, so enthielte P eine innere Ecke vom Grad wenigstens 3 in H; sei z die erste derartige Ecke. Dann besitzt z Nachbarn in höchstens $\Delta - 2$ Farbklassen, so daß wir durch Umfärben von z eine Δ-Färbung von $G - xy$ gewinnen können die (**) verletzt. Weitherhin sind für $B \neq B'$ aus $\mathfrak{C}$ die x, y-Wege $H_{\mathfrak{C},B}$ und $H_{\mathfrak{C},B'}$ offendisjunkt, denn sonst hätten sie eine Ecke z aus A gemeinsam, die jeweils zwei Nachbarn in B und in B' hätte und daher abermals Nachbarn in höchstens $\Delta - 2$ Farbklassen hätte, so daß durch Umfärben von z wieder eine Δ-Färbung von $G - xy$ konstruiert werden könnte, die (**) verletzt. Enthielte $H_{\mathfrak{C},B}$ eine innere Ecke z aus A, so betrachte man $B' \in \mathfrak{C} \setminus \{A, B\}$. Die B', A-Kempe-Kette H die z enthält ist disjunkt zu $H_{\mathfrak{C},B'}$, daher verletzt $\mathfrak{C}(H)$ (**). Somit haben x, y dieselben, $\Delta - 1$ vielen Nachbarn, und weil $xy \in E(G)$ beliebig gewählt war, ist G der vollständige Graph der Ordnung $\Delta + 1$. $\square$

Anstelle der Ecken kann man auch Kanten färben bzw. in ,,unverbundene" Klassen einteilen. Die Begriffe ergeben sich ganz analog: Eine *k-Kantenfärbung* ist eine Partition von $E(G)$ in höchstens k Matchings. Alternativ ist eine *k-Kantenfärbung* eine Abbildung $f : E(G) \to C$ mit $|C| = k$ und $f(e) \neq f(g)$ für $e \neq g$ aus $E(G)$ mit $V(e) \cap V(g) \neq \emptyset$. G heißt *k-kantenfärbbar*, falls es eine k-Kantenfärbung gibt, und der *chromatische Index* von G ist die kleinste Zahl k derart, daß es eine k-Kantenfärbung gibt und wird mit $\chi'(G)$ bezeichnet.

Der Maximalgrad ist infolgedessen eine *untere* Schranke für den chromatischen Index. Tatsächlich kann der chromatische Index auch nicht wesentlich größer werden:

Satz 4.2.2 (Satz von Vizing)
Für jeden Graphen G gilt $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis. Ist $f : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ eine k-Kantenfärbung des Graphen G und $i \in \{1, \ldots, k\}$, $x \in V(G)$, so sagen wir, *i fehle bei x*, falls $i \notin f(E_G(x))$ ist. Wir zeigen zunächst:

(*) Sei G ein Graph vom Maximalgrad höchstens k. Sei $x \in V(G)$, $F \subseteq E_G(x)$, und $f : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ eine k-Kantenfärbung von $G - F$ so, daß für jedes $e \in F$ wenigstens eine Farbe bei beiden Endecken von e fehlt, mit höchstens einer Ausnahme sogar wenigstens zwei Farben. Dann ist G k-kantenfärbbar.

Wir zeigen dies induktiv über $|F|$. Die Aussage ist trivial für $|F| = 0$ (und offensichtlich für $|F| = 1$). Nach Voraussetzung gibt es eine Kante $g = xy \in F$ und für jedes $e \in F$ eine Menge von Farben $\overline{e} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ mit den Eigenschaften:

(1) Jedes $i \in \overline{e}$ fehlt bei jeder Ecke aus $V(e)$ und (2) $|\overline{g}| = 1$ und $|\overline{e}| = 2$ für alle $e \in F \setminus \{g\}$. Natürlich ist $\sum_{e\in F} |\overline{e}| = 2|F| - 1$.

Falls es ein i gibt, das in genau einem $\overline{e}$ vorkommt, so ist $h := f \cup \{(e, i)\}$ eine k-Färbung von $G - (F \setminus \{e\})$, und die Voraussetzungen von (*) sind erfüllt für h, $F \setminus \{e\}$ anstelle von f, F, so daß die Behauptung induktiv folgt.

Andernfalls gibt es kein i, das in genau einem $\overline{e}$ vorkommt. Wegen $k \geq d_G(x)$ gibt es wenigstens $|F|$ Farben aus $\{1, \ldots, k\}$, die bei x fehlen, und wenn jede von ihnen in einem $\overline{e}$ vorkäme, dann sogar in zweien, somit gilt $\sum_{e\in F} |\overline{e}| \geq 2|F|$, ein Widerspruch.

Daher gibt es eine Farbe i, die bei x fehlt, jedoch in keinem $\overline{e}$ vorkommt. Sei j die Farbe aus $\overline{g}$. Somit fehlen i, j bei x, und j (vielleicht auch: i) fehlt bei y. Also ist die Komponente P von $G[f^{-1}(\{i, j\})]$, die y enthält, ein y, z-Weg mit $z \neq x$ ($z = y$ möglich). Durch *Tausch entlang* P entsteht eine neue k-Färbung f' von $G - F$ (das heißt $f'(e) := i$ für $e \in E(P)$ mit $f(e) = j$, $f'(e) := j$ für $e \in E(P)$ mit $f(e) = i$ und $f'(e) = f(e)$ sonst), und $f'' := f' \cup \{(g, i)\}$ ist eine k-Färbung von $G - (F \setminus \{g\})$. Die bei den Ecken aus $V(G)$ fehlenden Farben haben sich beim Übergang von f nach f'' nur bei x, y, z verändert. Genauer gibt es zu jedem $e \in F \setminus \{g\}$ immer noch wenigstens eine Farbe, die bei beiden Endecken fehlt, und für jedes $e \in F \setminus \{g\}$ mit Ausnahme höchstens einer Kante (die dann z enthält) sogar zwei solche Farben. Daher folgt die Behauptung abermals induktiv und (*) ist bewiesen

Wir zeigen jetzt die Behauptung des Satzes mit Hilfe von (*) durch Induktion über $V(G)$; die Behauptung ist richtig für $|V(G)| \leq 2$. Sei jetzt $k := \Delta(G) + 1$ und $x \in V(G)$. Der Graph $G - x$ besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine k-Kantenfärbung, und weil der Grad bei jedem Nachbarn von x höchstens $k - 2$ ist, fehlen bei jedem Nachbarn von G wenigstens zwei Farben. Somit folgt die Behauptung aus (*) mit $F = E_G(x)$. □

4.3 Komplexität von Färbungsproblemen

Ein Entscheidungsproblem X gehört zur Klasse NP, wenn eine polynomielle Turing-Maschine A (den *Verifikator*) und ein Polynom p existieren, so daß eine Eingabe G genau dann eine Ja-Instanz ist, wenn ein *Zertifikat* (auch: *Zeuge*) Z mit $|Z| \leq p(|G|)$ und $A(G, Z) = Ja$ gilt. (Eine polynomielle Turing-Maschine bricht in einer Zeit bzw. nach einer Anzahl ,,elementarer" Rechenschritte ab, die nach oben durch ein Polynom der Größe der Eingabe beschränkt ist). Es ist NP-vollständig, wenn außerdem jedes andere Problem aus NP in Polynomialzeit auf X zurückgeführt werden kann. (Man kann also jedes Problem aus NP bis auf eine Polynomialzeittransformation mindestens so ,,schnell" lösen, wie ein NP-vollständiges.) Was das formal en detail bedeutet, kann man zum Beispiel in [3] nachlesen. Hier genügt die Bemerkung, daß X aus NP dann NP-vollständig ist, wenn es in Polynomialzeit auf ein bereits als NP-vollständig bekanntes Problem zurückgeführt werden kann. Ein solches Problem ist 3SAT: Gegeben ist dabei eine 3SAT-Formel, das heißt eine aussagenlogische Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ der Gestalt $F = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$, worin die Klauseln die Gestalt $(P \vee Q \vee R)$ haben und P, Q, R jeweils eine Variable x_i oder deren Negation $\neg x_i$ ist. Das Problem ist, zu entscheiden, ob eine Belegung der Variablen existiert, für die F wahr wird. (Natürlich kann in Polynomialzeit nachgeprüft werden, *ob* eine feste Belegung den Wahrheitswert ,,wahr" liefert, 3SAT ist also in NP; daß 3SAT NP-vollständig ist, ist dagegen ein berühmter Satz der Theoretischen Informatik (die zu jener Zeit übrigens Reine Mathematik war).)

Wir möchten zeigen, daß das Entscheidungsproblem 3COLORABLE, ob ein gegebener Graph G 3-färbbar ist, NP-vollständig ist. Zunächst ist festzustellen, daß man in Polynomialzeit nachrechnen kann, ob eine Abbildung $f : V(G) \to \{1, 2, 3\}$ wirklich eine 3-Färbung ist. 3COLORABLE ist also in NP. Wir führen nun 3SAT auf 3COLORABLE zurück (!), indem wir aus einer 3SAT-Eingabe F wie oben in Polynomialzeit einen Graphen G konstruieren, der genau dann 3-färbbar ist, wenn eine Belegung der Variablen existiert, für die F wahr wird. G besteht aus einem Dreieck t, f, b, für jede Variable x_i kommen zwei Ecken v_i, w_i, die zueinander und zu b benachbart sind. Für jede Klausel $C_j = (P \vee Q \vee R)$ wird ein kleines *gadget* H_j hinzugefügt; es besteht aus zwei Dreicken mit Ecken p_j, q_j, s_j und r_j, t_j, u_j, wobei p_j mit v_i verbunden ist wenn P die Variable x_i ist und mit w_i wenn P die $\neg x_i$ ist. Sinngemäß werden q_j und r_j entsprechend der Terme Q bzw. R verbunden. Alsdann wird s_j mit t_j verbunden und u_j mit f, b.

Sei nun G 3-färbbar und etwa c eine 3-Färbung, o.B.d.A. mit den Farben $true, false, X$ sowie $c(t) = true$, $c(f) = false$, $c(b) = X$. Dann sind $c(v_i), c(w_i)$ verschieden und aus $\{true, false\}$, und es ist $c(u_j) = true$. Wir betrachten die durch $\beta(x_i) := f(v_i)$ gegebene Belegung der Variablen und behaupten, daß für sie F wahr ist. Hierzu genügt es zu zeigen, daß jede Klausel C_j wahr wird, das heißt wenigstens einer der drei Nachbarn des gadgets H_j in $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ ist mit $true$ gefärbt. Wäre das aber nicht der Fall, so sind alle drei mit $false$ gefärbt, und dies erzwingt zunächst $c(s_j) = false$ und dann $c(u_j) = false$, ein Widerspruch.

Sei nun umgekehrt β eine Belegung der Variablen so, daß F wahr wird. Wir konstruieren daraus eine 3-Färbung von G mit den Farben $true, false, X$ und setzen $c(t) := true, v(f) := false, c(b) = X$ sowie $c(v_i) = \beta(x_i)$, $c(w_i) = true$ falls $\beta(x_i) = false$ und $c(w_i) = false$ sonst, sowie $c(u_j) = true$. Es genügt zu zeigen, daß sich diese Färbung auf die noch ungefärbten fünf Ecken jedes gadgets H_j fortsetzen läßt. Hierzu seien p', q', r' jeweils die Nachbarn von p_j, q_j bzw. r_j außerhalb des gadgets. Nach Konstruktion ist davon wenigstens einer mit $true$ gefärbt und die anderen mit $true$ oder $false$. Die folgende Tabelle liefert die Fortsetzungen in den korrespondierenden sieben Fällen:

p	q'	r'	p_j	q_j	s_j	r_j	t_j
$false$	$false$	$true$	$true$	X	$false$	$false$	X
$false$	$true$	$false$	X	$false$	$true$	X	$false$
$false$	$true$	$true$	X	$false$	$true$	X	$false$
$true$	$false$	$false$	$false$	X	$true$	X	$false$
$true$	$false$	$true$	$false$	X	$true$	X	$false$
$true$	$true$	$false$	$false$	X	$true$	X	$false$
$true$	$true$	$true$	$false$	X	$true$	X	$false$

4.4 Der 4-Farben-Satz

Ein Graph G soll *plättbar* heißen, falls er sich überschneidungsfrei in die Ebene einbetten läßt. Wir wollen dies etwas formaler definieren und zunächst unser Graphenkonzept ein wenig ausdehnen. Ein *Multigraph* ist ein Tripel $G = (V, E, I)$ bestehend aus einer Ecken- und Kantenmenge (jetzt ganz beliebig), und einer *Inzidenzrelation* $I \subseteq V \times E$ derart, daß es zu jeder Kante $e \in E(G)$ höchstens zwei Ecken x aus $V(G)$ mit xIe gibt; diese Ecken heißen dann *Endecken* von e und $V(e)$ bezeichnet die Menge ihrer Endecken. Graphen (V, E) können kanonisch als spezielle Multigraphen $(V, E, \in |V \times E)$ aufgefaßt und praktisch alle zuvor definierten Begriffe sinngemäß erweitert werden (insbesondere gilt dort $V(e) = e$).

Da es nun mehr als eine Kante zwischen zwei Ecken geben kann, schaltet man in die Folgenbeschreibungen von Wegen und analog von Kreisen noch die konkreten Kanten zwischen, die der Weg „durchlaufen" soll und definiert z. Bsp. $P = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, e_\ell, x_\ell$ als Weg von x_0 nach x_ℓ der Länge ℓ, wenn die x_i paarweise verschieden sind und $V(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt, $V(P)$ ist wie üblich gleich $\{x_0, \ldots, x_\ell\}$, $E(P) = \{e_1, \ldots, e_\ell\}$, und der Teilmultigraph $(V(P), E(P), I|V(P) \times E(P))$ von G heißt ebenfalls ein Weg.

Ein Multigraph G heißt *eben* oder *planar*, falls seine Eckenmenge aus Punkten und seine Kantenmenge aus Jordan-Bögen der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ besteht, xIe genau dann gilt, wenn x Endpunkt des Bogens e ist, und zwei Kanten keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen.[1] Die Vereinigung X der Ecken und (Punktmengen der) Kanten ist dann eine Punktmenge der euklidischen Ebene, und $\mathbb{R}^2 - X$ zerfällt in topologisch (weg-) zusammenhängende Gebiete. Deren Ränder bestehen aus Punkten und (Punktmengen von) Jordan-Bögen und können darum umgekehrt als Teilmultgraphen von G aufgefaßt werden, die dann ihrerseits die *Gebiete* von G heißen und mit $F(G)$ bezeichnet werden. Eine umfassende Rückführung vieler kombinatorischer Sachverhalte auf die topologischen Gegebenheiten der Ebene (zum Beispiel auf den Jordanschen Kurvensatz)

[1] Ein *Jordan-Bogen* ist hier eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ (jeweils in der euklidischen Topologie) mit $f(x) \neq f(y)$ für alle $(x, y) \in ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}$. Die Menge $f([0, 1])$ ist die *Punktmenge des Bogens* f, die Punkte aus $f((0, 1))$ heißen *innere Punkte*, ein Punkt aus $f(\{0, 1\})$ ein *Endpunkt* von f.

wird in [1] versucht; wir appellieren hier an die geometrische Intuition.

Satz 4.4.1 (Eulersche Formel)
Für jeden nichtleeren, zusammenhängenden, ebenen Multigraphen G gilt

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Beweis. (Skizze.) Wir führen Induktion nach der Kantenzahl. Ist G ein Baum, so ist $|F(G)| = 1$ und $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Andernfalls gibt es eine Kante $e \in E(G)$, die auf einem Kreis liegt. Diese Kante grenzt an genau zwei Gebiete von G, die nach Löschung von e zusammenfallen (alle anderen Gebiete bleiben unverändert). Daher gilt nach Induktion $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = |V(G-e)| - (|E(G-e)|+1) + (|F(G-e)|+1) = |V(G-e)| - |E(G-e)| + |F(G-e)| = 2$. □

Ein Multigraph G heiße nun *plättbar*, wenn er isomorph zu einem ebenen Multigraphen ist (dieser heißt dann eine *Zeichnung* oder *Darstellung* von G). Man beachte, daß einundderselbe plättbare Multigraph im allgemeinen Darstellungen mit verschiedenen Gebieten erlauben kann, so daß man nicht ohne weiteres von *den* Gebieten eines plättbaren Graphen sprechen kann. Dies ändert sich aber infolge des nächsten Satzes, sofern der vorgelegte Multigraph 3-zusammenhängend ist und keine Schlingen oder Mehrfachkanten enthält (also ein Graph ist), da sich dann die Gebiete auch rein kombinatorisch beschreiben lassen.

Satz 4.4.2
Die Gebiete eines 3-zusammenhängenden plättbaren Graphen sind genau seine nichttrennenden induzierten Kreise.

Man kann sich mit Hilfe der Sätze 4.4.1 und 4.4.2 überlegen, daß bestimmte Graphen nicht plättbar sind. Wäre etwa K_5 plättbar, so wären seine zehn Dreiecke nach Satz 4.4.2 genau seine Gebiete, woraus $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 5 - 10 + 10 = 5$ folgt, im Widerspruch zu Satz 4.4.1. Analog ist $K_{3,3}$ nicht plättbar.

Glücklicherweise läßt sich die an sich topologische Eigenschaft eines Graphen, plättbar zu sein, ebenfalls rein kombinatorisch beschreiben. Eine *Unterteilung* des Graphen G entsteht aus G, indem jede Kante mit zwei Endpunkten $x \neq y$ durch einen x, y-Weg der Länge wenigstens 1 zwischen ihren Endpunkten und jede Schlinge bei x durch einen Kreis C_x durch x der Länge wenigstens 1 ersetzt wird derart, daß die Ersetzungsgraphen keine inneren Ecken gemeinsam haben (alle Ecken aus C_x außer x sind dabei innere Ecken). Jeder Graph ist daher Unterteilung seiner selbst. „Offensichtlich" ist jede Unterteilung eines plättbaren Graphen plättbar, und jede Unterteilung eines nicht-plättbaren Graphen ist nicht plättbar. Auch ist klar, daß jeder Teilgraph eines plättbaren Graphen plättbar ist. Weil nun die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ nicht plättbar sind, kann ein Graph nur dann plättbar sein, wenn er keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ enthält. Daß auch die Umkehrung gilt, besagt der berühmte Satz von Kuratowski.

Satz 4.4.3 (Satz von Kuratowski)
Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn er keine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ enthält.

Entsprechend heißen K_5 und $K_{3,3}$ auch *Kuratowski-Graphen* (für die Ebene). Wir können nun den 4-Farben-Satz formulieren.

Satz 4.4.4 (Vierfarbensatz)
Jeder plättbare Graph ist 4-färbbar.

Der Beweis von Satz 4.4.4 ist ein Paradebeispiel wenn nicht der Prototyp eines computergestützten Beweises. Zunächst kann man sich überlegen, daß es genügt, die Aussage für *Triangulierungen* zu beweisen. Dies sind planare Graphen in denen jedes Gebiet [in jeder Zeichnung] ein Dreieck ist. Eine *Konfiguration* (C, H) bestehe nun aus einem trennenden induzierten Kreis C und dem von den Ecken einer Komponente von $G - V(C)$ und denen von C in G induzierten Teilgraphen H. Sie heißt *reduzibel*, falls sich (im einfachsten Fall:) jede 4-Färbung (als Abbildung) von C zu einer 4-Färbung von H erweitern läßt (und natürlich ist diese Eigenschaft invariant unter der (naheliegend zu definierenden) Isomorphie zwischen Konfigurationen. Da man $G - V(H)$ durch Hinzufügen von Kanten zwischen Ecken aus C wieder triangulieren kann, dient eine reduzible Konfiguration als Induktionsmotor: Wenn man also eine Liste von Konfigurationen herstellen kann derart, daß in jeder Triangulierung eine davon (bis auf Isomorphie) vorkommt — eine sogenannte *unvermeidbare Liste* — und außerdem jede dieser Konfiguration reduzibel ist, dann folgt der Vier-Farben-Satz. Tatsächlich gelang dieses Unterfangen. Die gegenwärtig kürzeste Liste umfaßt etwa 800 Konfigurationen, und man kann sich von der Unvermeidbarkeit mit Hilfe eines Computers (und nötigenfalls noch von Hand) überzeugen. Der Nachweis der Reduzibilität all dieser Konfigurationen (oder auch nur einer von ihnen mit großem Randkreis C) gelingt dagegen nur mit Computerhilfe, was im wesentlichen an der sehr großen Zahl möglicher 4-Färbungen von C liegt, die ja alle erfaßt und fortgesetzt werden müssen.

Dagegen läßt sich recht einfach zeigen, daß jeder plättbare Graph 5-färbbar ist; die 6-Färbbarkeit folgt aus folgendem Satz.

Satz 4.4.5
Sei G eine Triangulierung. Dann ist $|E(G)| = 3|V(G)| - 6$.

Beweis. (Skizze.) Jedes Gebiet ist ein Dreieck und jede Kante begrenzt zwei Gebiete. Daraus folgt $3|F(G)| = 2|E(G)|$ und mit der Eulerformel kommt $3|V(G)| - 6 = 3|E(G)| - 3|F(G)| = |E(G)|$. □

Satz 4.4.6
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Beweis. Wir führen Induktion über die Eckenzahl. Graphen mit höchstens 5 Ecken sind 5-färbbar. Sei nun G ein plättbarer Graph auf wenigstens 6 Ecken. Er ist aufspannender Teilgraph einer Triangulierung, und eine 5-Färbung dieser Triangulierung ist offensichtlich eine 5-Färbung von G. Daher dürfen wir annehmen, daß G selber eine Triangulierung ist. Da der Durchschnittsgrad von G kleiner als 6 ist, enthält G eine Ecke x des Grades höchstens 5. $G - x$ besitzt eine 5-Färbung f, etwa mit Farben $C := \{1, \ldots, 5\}$, und existiert ein $i \in C \setminus f(N_G(x))$, so nennen wir f *gut*, denn $f \cup \{(x, i)\}$ ist eine 5-Färbung von G. Wir dürfen daher annehmen, daß $f(x_i) = i$ ist, wobei $x_1, \ldots, x_5$ die Nachbarn von x in der zyklischen Folge ihres Auftretens um x in einer beliebigen Zeichnung von G seien. Tatsächlich induzieren $x_1, \ldots, x_5$ ein Kreis R in G. Nun liege 1 und 3 in derselben $1,3$-Kempe-Kette, weil wir andernfalls eine gute Färbung von $G - x$ durch Kempetausch herstellen könnten, ebenso 2 und 4. Daher gibt es einen x_1, x_3-Weg P, Q und einen dazu disjunkten x_2, x_4-Weg in $G - x - x_2$, so daß $P \cup Q \cup R$ eine Unterteilung von K_4 in $G - x$ mit Verzweigungsecken x_1, x_2, x_3, x_4 ist und folglich G eine Unterteilung von K_5 mit Unterteilungsecken x_1, x_2, x_3, x_4, x besitzt. □

4.5 Übungen

1. Man zeige, daß für feste k, c das Entscheidungsproblem, ob ein Graph eine k-Färbung besitzt, für die Klasse der Graphen mit Baumweite höchstens c in Polynomialzeit lösbar ist.

2. Man überlege sich, daß das Entscheidungsproblem, ob ein Graph zusammenhängend ist, in NP liegt. Man zeige, daß dies auch für das Entscheidungsproblem, ob ein Graph unzusammenhängend ist, zutrifft.

3. Kann ein Gebiet eines ebenen Graphen im allgemeinen mehr als einen Kreis enthalten? Ist ein Gebiet stets ein zusammenhängender Teilmultigraph?

4. Man zeige, daß für festes $k > 3$ das Entscheidungsproblem, ob ein Eingabegraph $\chi(G) = k$ erfüllt, NP-vollständig ist.

5. Man zeige, daß $K_{3,3}$ nicht plättbar ist. Welche vollständigen Graphen sind plättbar, welche vollständig bipartiten Graphen sind es?

6. Man zeige, daß der Durchschnittsgrad eines plättbaren Graphen stets kleiner als 6 ist und überlege sich, daß (darum) jeder plättbare Graph 6-färbbar ist (zum Beispiel mit Satz 4.1.2).

7. Man zeige, daß jeder planare Graph auf wenigstens drei Ecken aufspannender Teilgraph einer Triangulierung ist.

8. Man zeige, daß jede planare Triangulierung auf wenigstens vier Ecken 3-zusammenhängend ist und der von der Nachbarschaft einer Ecke induzierte Graph ein Kreis ist.

Literaturverzeichnis

[1] R. DIESTEL, “Graphentheorie”, 3te Auflage, Springer–Verlag Berlin–Heidelberg (2006).

[2] W. T. TUTTE, “A short proof of the factor theorem for finite graphs”, Can. J. Math. 6 (1954), 347–352.

[3] A. SCHRIJVER, “Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency” (3 Bde), Algorithms and Combinatorics, 1881 Seiten, Springer Berlin (2003).

Index

3SAT, 34

A, B-Kempe-Kette, 31
A, B-Separator, 28
A, B-Weg, 28
Abstand, 5
allgemeiner Graph, 28
Anticlique, 15
Anticliquenzahl, 30
aufspannend, 3
Austauscheigenschaft
  für Graphen, 8

Barriere, 17
Basis, 9
Baum, 4
Baumordnung, 7
Baumweite, 11
Baumzerlegung, 11
benachbart, 3
BFS-Baum, 5
bipartit, 15
Breitensuchbaum, 5
Breitensuche, 5

chromatische Zahl, 30
chromatischer Index, 32
Clique, 30
Cliquenzahl, 30

Darstellung, 36
DFS-Baum, 6
Digraph, 23
doppelt-stochastisch, 21

eben, 35
Ecke, 3
  wesentliche, 18
Elementarfluß, 24
Endecke, 4

faktorkritisch, 17
Farbentausch, 33
Farbklasse, 15
Farbtausch, 31
f-Faktor, 19
Fluß, 23
  elementarer, 24
  ganzzahliger, 24

Gebiet, 35
Grad, 19
Graph, 3
  allgemeiner, 28
  ebener, 35
  endlicher, 3
  faktorkritischer, 17
  gerichteter, 23
  planarer, 35
  zusammenhängender, 4
Greedy-Färbung, 30

induziert, 3
Inzidenzrelation, 35
inzidieren, 3

Jordan-Bogen, 35

k-kantenfärbbar, 32
k-Kantenfärbung, 32
k-zusammenhängend, 27
Kante, 3
  im Digraphen, 23
kantendisjunkt, 25
Kantenfärbung, 32
Kapazität, 24

Kapazitätsfunktion, 23
Kempe-Kette, 31
k-färbbar, 15
k-Färbung, 15
Kirchhoff-Regel, 24
Komponente, 4
    ungerade, 17
Konfiguration, 37
    reduzible, 37
k-regulär, 19
Kreis, 7, 23

Länge
    eines Kreises, 7
    eines Weges, 3
Löschung, 3

Matching, 15
    größtes, 15
    perfektes, 17
    von A, 16
Matrix
    doppelt-stochastisch, 21
    Permutationsmatrix, 20
Matroid, 9
Maximalgrad, 30
Metrik, 5
Minimalgrad, 30
MSO_2, 12
Multigraph, 35

Nachbar, 3
Nachbarschaft, 16
Netzwerk, 23
NP, 33
NP-vollständig, 33

offendisjunkt, 26

Permutationsmatrix, 20
pláttbar, 36
plättbar, 35
planar, 35

Quelle, 23

reduzibel, 37
Reihenzahl, 31
Repräsentantensystem, 21
Residualkapazität, 24
Residualweg, 24
Rückwärtskante, 24

s, t trennende Eckenmenge, 26
s, t trennende Kantenmenge, 25
S-disjunkt, 28
Schnitt, 24
Senke, 23
Stärke, 24

Teilgraph, 3
    aufspannender, 3
    induzierter, 3
Tiefensuchbaum, 6
Tiefensuche, 6
trennende Eckenmenge, 27
Triangulierung, 37
TSP, 9

Überdeckung, 21
Umfärbung, 31
unabhängig, 9
Unterteilung, 36
unvermeidbare Liste, 37

Verbesserungsweg, 16
Vorwärtskante, 24

Wald, 8
Weg, 3, 23, 28, 35
    M-alternierender, 16
Weite, 11

Zeichnung, 36
Zerlegungsbaum, 11
Zusammenhangskomponente, 4