

6. Studienbrief zur Informations- und Codierungstheorie

In dieser Woche geht es um den Satz von Shannon und seinen Beweis. Da ist zunächst einmal der durch die technischen Bedingungen vorgegebene Parameter $p \in (0, 1/2)$, der die Wahrscheinlichkeit des Verrauschens eines einzelnen Bits beschreibt. Der Anwender wünscht sich einen Code mit kleiner Fehlerwahrscheinlichkeit ε . Das Ziel ist umso schwerer zu erreichen, je näher der Parameter p bei $1/2$ liegt, und ein Teil des Preises, den man dafür zu bezahlen hat, ist eine kleinere und kleinere Informationsrate: Diese ist durch die Funktion

$$1 + p \log p + (1 - p) \log(1 - p)$$

begrenzt, die übrigens auf dem Intervall $[0, 1]$ einer um $1/2$ nach rechts verschobenen und den Faktor 4 gestreckten Normalparabel ähnelt (Scheitelpunkt bei $1/2$ in der Mitte (Wert 0), Wert 1 an den Rändern von $[0, 1]$). Je näher p also bei 0 liegt, umso besser kann die Rate werden. Der Satz von Shannon besagt nun, daß ein Code mit vorgegebener kleiner Fehlerwahrscheinlichkeit und vorgegebener Rate existiert, sofern man nur Willens ist, lange Codewörter zu verwenden.

Der Beweis ist *nicht konstruktiv* sondern eine reine Existenzaussage, so daß das Problem bestehen bleibt, einen entsprechenden Code auch wirklich anzugeben. Er ist außerdem einer der frühesten Beweise, die mit der sogenannten „probabilistischen Methode“ argumentieren, das bedeutet hier: Indem die erwartete Fehlerwahrscheinlichkeit unter allen n -Codes einer gewissen Bauart nach oben durch ε begrenzt wird, also letztlich eine Aussage über den Mittelwert der Fehlerwahrscheinlichkeiten einer riesigen Auswahl an Codes getroffen wird (umso gewaltiger, je größer die Codewortlänge n ist), kann man schließen, daß in mindestens einer Ausprägung, also einem konkreten derartigen Code, die Fehlerwahrscheinlichkeit nach oben durch ε begrenzt ist. *Welche* Ausprägung das ist, erfährt man dadurch nicht.

*

Lesepensum bis zum 29. Mai 2020:

Kapitel 2 Teil 1 bis zum Ende.

*

Übungspensum bis zum 29. Mai 2020:

Siehe 5. Studienbrief.

*

Fragen und Anregungen gerne per email an mich — IC am Anfang der Betreffzeile nicht vergessen!

Ilmenau, den 24. Mai 2020 · Matthias Kriesell