Prof. Dr. Matthias Kriesell
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Prüfungsaufgaben zur Informations- und Codierungstheorie

Abgabe elektronisch bis zum Freitag, den 14.8.2020 um 12.00 Uhr bei

ute.leithold@tu-ilmenau.de,

Betreffzeile: IC Klausur, Name, Matrikelnummer.

1. In einem „durchschnittlichen Text" zweier Sprachen treten die 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets mit Häufigkeiten nach folgenden Tabellen auf.

Topbuchstaben Sprache 1	E	N	A,I,R,S,T
Häufigkeit in % jeweils:	17	10	6

Topbuchstaben Sprache 2	A, I, N, T	E, L, S	K,M,O
Häufigkeit in % jeweils:	10	7	4

   Alle nicht gelisteten Buchstaben (19 bzw. 16) treten jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, teilen sich also die verbleibende Wahrscheinlichkeitsmasse von 43% bzw. 27%. Welche der beiden Sprachen erlaubt eine Codierung über dem Alphabet $\{0, 1\}$ mit besserer (also: geringerer) mittlerer Codewortlänge?

   Hinweis. Huffman-Codierung von Hand ist aufwendig und wird ein wenig übersichtlicher, wenn man für die Wahrscheinlichkeit der nicht gelisteten Symbole eine Abkürzung, zum Beispiel $\varepsilon = 43/19\,\%$ für Sprache 1 bzw. $\varepsilon = 27/16\,\%$ für Sprache 2 einführt. Die zusammengefaßten Wahrscheinlichkeiten haben dann immer die Form $a + b\varepsilon$ und man muß sich nur Gedanken über deren Größenordnung machen. — Die optimalen mittleren Codewortlängen unterscheiden sich erst in der zweiten Nachkommastelle, das Material ist ganz grob der Verteilung im Deutschen und Finnischen nachempfunden.

2. Bei der in Abschnitt 2.2 zum Satz von Shannon dargestellten Übertragung wird jedes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von p gestört. Sei nun ℓ die aus den letzten beiden Stellen Ihrer Matrikelnummer gebildete Zahl zwischen 0 und 99 und $p_0 := \ell/1000$ (also $0 \leq p_0 < 10\%$). Sie haben die Auswahl unter drei Übertragungsmethoden, bei denen die einzelnen Bits mit jeweils folgenden Wahrscheinlichkeiten gestört werden: (a) mit $p = p_0$ (b) mit $p = 2\%$ und (c) mit $p = 99\%$. Welche würden sie wählen und welche Maßnahme würden Sie gegebenenfalls dem Empfänger verordnen, um $0, 1$-Wörter möglichst fehlerfrei zu übertragen? Wie würden Sie bei *beliebigem* $p_0 \in [0, 1]$ unter den Alternativen (a),(b),(c) wählen?

3. Wie groß kann ein 1-fehlerkorrigierender 5-Code über dem Alphabet $\{0, 1\}$ höchstens sein? Konstruieren Sie einen derartigen optimalen Code C und schätzen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit p_C von C unter der Störung X bei Maximum-Likelihood-Decodierung m_C nach oben ab, wobei die Störung $X = (X_1, \ldots, X_5)$ ein Vektor aus stochastisch unabhängigen mit Parameter $p = 1/100$ Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen ist. Nach Möglichkeit versuchen Sie $p_C \leq 0.001$ zu zeigen.

4. Man zeige: Es gibt eine Hadamard-Matrix der Ordnung 560.

5. Über welchen Körpern und für welche n gibt es einen linearen $[n, k]$-Code mit genau 27 Wörtern? Man konstruiere in allen Fällen einen derartigen Code mit Minimalabstand wenigstens $\lfloor n/3 \rfloor$.

6. Sei C ein n-Code über dem Alphabet A mit Minimalabstand $d \geq 1$. Man zeige: $|C| \leq |A|^{n-d+1}$. Man gebe für jede Primzahlpotenz $q \geq 3$ und jedes d mit $3 \leq d \leq q$ einen linearen q-adischen n-Code C über dem Körper $\mathbb{F}_q$ an mit $|C| = q^{n-d+1}$ (die Codewortlänge n darf jeweils geeignet gewählt werden).

   Hinweis: Für den ersten Teil betrachte man die Abbildung $\varphi : C \to A^{n-d+1}$, $\varphi(x_1 \ldots x_n) := x_1 \ldots x_{n-d+1}$ (das heißt die letzten $d - 1$ Buchstaben werden „abgeschnitten”).

Ilmenau, den 11. August 2020 · Matthias Kriesell