Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Fachgebiet Kombinatorik/Graphentheorie

Abschlussarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Zur listenchromatischen Zahl signierter Graphen

Thomas Schweser

betreut von
Prof. Dr. Michael Stiebitz

Ilmenau, den 13. August 2015

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ilmenau, den 13.08.2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Färbungsprobleme nehmen eine zentrale Rolle in der Graphentheorie ein. So ist der Vierfarbensatz ohne Zweifel das berühmteste graphentheoretische Resultat. Dieser besagt, dass höchstens vier Farben benötigt werden, um die Länder einer Landkarte so zu färben, dass benachbarte Länder unterschiedliche Farben erhalten. Bereits 1852 von Francis Guthrie vermutet dauerte es mehr als 100 Jahre, einen Beweis des Satzes zu entwickeln [3] und selbst dieser konnte nur mit Hilfe von Computern erbracht werden. Aber nicht nur der Vierfarbensatz unterstreicht die Bedeutung von Färbungsproblemen für die Mathematik. Auch in vielfältigen Bereichen der kombinatorischen Optimierung ist es nötig, sich mit ihnen zu befassen.

Das klassische Färbungsproblem besteht darin, die Ecken eines Graphen so zu färben, dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind. Die kleinste Anzahl von Farben, mit denen dies möglich ist, wird chromatische Zahl genannt. Es existiert eine Vielzahl von Resultaten zur chromatischen Zahl. So ist es wohlbekannt, dass für jeden Graphen sein Maximalgrad plus 1 eine obere Schranke für die chromatische Zahl des Graphen darstellt. Der Satz von Brooks [2] lieferte 1941 einen fundamentalen Beitrag zur Verbesserung dieser Schranke. Er besagt, dass für jeden zusammenhängenden Graphen mit Maximalgrad Δ, der kein vollständiger Graph und kein Kreis ungerader Länge ist, Δ Farben ausreichen, um ihn zu färben. Brooks' Satz wird dadurch umso erstaunlicher, dass er nicht nur für gewöhnliche Färbungen gültig ist; Vizing (1976) [14] und Erdős, Rubin und Taylor (1979) [6] bewiesen beispielsweise unabhängig voneinander eine leicht modifizierte Listenversion des Satzes.

In dieser Arbeit werden wir den Schwerpunkt auf Listenfärbungen signierter Graphen legen. Ein signierter Graph ist ein Graph, dessen Kanten mit $+1$ oder -1 beschriftet (signiert) sind. Eingeführt 1953 von Frank Harary [8] begann erst Thomas Zaslavsky [15, 16, 17] sich intensiv mit Färbungen signierter Graphen auseinanderzusetzen. Er entwickelte ein spezielles Färbungskonzept, für das viele der zentralen Resultate für Färbungsprobleme ihre Gültigkeit behalten. Máčajová, Raspaud und Škoviera [11] gelang es 2014 durch Verwendung eines an Zaslavsky angelehnten Konzepts, den Satz von Brooks auf schlichte signierte Graphen zu übertragen. Wir werden im Verlauf dieser Arbeit den Satz auf signierte Graphen mit Mehrfachkanten erweitern und zudem eine Listenversion des Satzes von Brooks für signierte Graphen beweisen.

Das zweite Kapitel dient dazu, einige Grundlagen aus der Graphentheorie aufzufrischen und dem Leser die verwendeten Bezeichnungen gesammelt darzulegen. Des Weiteren werden signierte Graphen formal definiert und einige wichtige Konzepte und Eigenschaften wie Switchen und Balanciertheit erläutert. Danach werden wir das Färbungskonzept von Máčajová, Raspaud und Škoviera einführen und einige der bereits erarbeiteten Resultate zur signierten chromatischen Zahl $\chi_\pm$ darstellen und ggf. beweisen.

Den größten Teil des dritten Kapitels stellt der Beweis eines Satzes, angelehnt an ein ähnliches Resultat von Erdős, Rubin und Taylor [6], dar, welcher sogenannte unfärbbare Paare charakterisiert. Dieser Satz bildet das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit. Beim Beweis des Satzes orientieren wir uns jedoch nicht an der von Erdős, Rubin und Taylor [6] verwendeten Beweismethode, sondern benutzen konsequent eine Reduktionsmethode, welche erstmals in einer Arbeit von Kostochka, Stiebitz und Wirt [10] verwendet wurde. Bevor wir uns mit dem Hauptresultat befassen, werden wir Listenfärbungen (wie in [6]) für signierte Graphen einführen und die signierte listenchromatische Zahl $\chi_\pm^\ell$ definieren. Den Abschluss des Kapitels bilden einige einfache Folgerungen aus unserem Hauptresultat, sowie die Verallgemeinerung eines weiteren Resultats von Erdős, Rubin und Taylor [6] auf signierte Graphen und eine Listenversion des Satzes von Brooks für signierte Graphen, welche wir ebenfalls leicht aus dem Hauptresultat ableiten können.

Im vierten Kapitel führen wir kritische signierte Graphen und listenkritische signierte Graphen ein. Es wird sich zeigen, dass viele der Eigenschaften gewöhnlicher kritischer Graphen auch für kritische signierte Graphen gelten. Insbesondere lässt sich eine Schranke von Gallai [7] für die minimale Anzahl von Kanten in einem k-listenkritischen Graphen auf schlichte k-listenkritische signierte Graphen übertragen. Als Anwendung dieses Resultates werden wir einen Färbungssatz für toroidale Graphen beweisen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sollen noch zusammen mit dem Betreuer auf Englisch publiziert werden. Eine Vorabversion [13] dessen ist bereits auf Mathematics - arXiv erschienen.

Kapitel 2

Färbungskonzepte für signierte Graphen

In diesem Kapitel werden zunächst die für diese Arbeit relevanten Begriffe aus der Graphentheorie eingeführt. Im zweiten Abschnitt wird erläutert, was unter einem signierten Graphen zu verstehen ist. Ferner werden weitere grundlegende Definitionen und Konzepte, die für den Umgang mit signierten Graphen unabdingbar sind, dargestellt. Der letzte Abschnitt behandelt Färbungen signierter Graphen und fasst einige, in [11] erarbeitete, Ergebnisse zur signierten chromatischen Zahl zusammen.

2.1 Graphentheoretische Grundlagen

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit ausschließlich mit endlichen, ungerichteten, schlingenlosen Graphen, welche jedoch Mehrfachkanten enthalten dürfen.

Im vorliegenden Text werden größtenteils die aus der Graphentheorie geläufigen Begrifflichkeiten verwendet. Dabei richten wir uns weitgehend nach dem Buch „Graphentheorie" von Diestel [3]. Es sei $G = (V(G), E(G))$ ein beliebiger Graph mit Eckenmenge $V(G)$ und Kantenmenge $E(G)$. Die Kardinalität der Menge $|V(G)|$ heißt **Ordnung** von G, kurz $|G|$. Zu zwei Eckenmengen $X, Y \subseteq V(G)$ bezeichne $E_G(X,Y)$ die Menge aller Kanten, die Ecken aus X mit Ecken aus Y verbinden. Ferner sei $E_G[X] = E_G(X,X)$ und $\partial_G(X) = E_G(X, V(G) \setminus X)$. Dann ist $E_G[X]$ die Menge aller Kanten, deren Enden beide in X liegen, und $\partial_G(X)$ ist die Menge aller Kanten, die zwischen X und $V(G) \setminus X$ verlaufen. Offenbar ist $E(G)$ die disjunkte Vereinigung der Kantenmengen $E_G[X]$, $E_G[V(X) \setminus X]$ und $\partial_G(X)$. Der besseren Lesbarkeit halber werden wir gelegentlich auf Indizes und Klammern verzichten. Der **Grad** einer Ecke v, d.h., die Anzahl der Kanten, die mit v inzident (verbunden) sind, ist gegeben durch $d_G(v) = |\partial_G(v)|$. Eine Einschränkung des Grades auf eine Eckenmenge X erhalten wir durch $d_G(v : X) = |E_G(v, X)|$. Wie üblich bezeichnen wir mit

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

den **Maximalgrad** von G und mit

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

den **Minimalgrad** von G.

Verlaufen zwischen zwei Ecken u und v mehrere unterschiedliche Kanten, so werden diese **parallele Kanten** oder Mehrfachkanten genannt. Die **Vielfachheit** zweier unterschiedlicher Ecken $u, v \in V(G)$ ist gegeben durch $\mu_G(u, v) = |E_G(u, v)|$. Die **maximale Vielfachheit** des Graphen G ist dementsprechend definiert als

$$\mu(G) = \max_{u,v \in V(G)} |E_G(v, w)|.$$

Wir bezeichnen den Graphen G als **schlicht**, wenn es in ihm keine Mehrfachkanten gibt, d.h., wenn $\mu(G) \leq 1$ gilt. Wie üblich nennen wir einen Graphen **zusammenhängend**, wenn es zu zwei beliebigen Ecken aus $V(G)$ immer einen Weg in G gibt, der diese verbindet. Eine Ecke v ist eine **Artikulation** des zusammenhängenden Graphen G, wenn

$$G - v = (V(G) \setminus \{v\}, E(G) \setminus \partial_G(v))$$

nicht mehr zusammenhängend ist. In dieser Arbeit werden die geläufigen Bezeichnungen K_n für **vollständige Graphen** der Ordnung n und C_n für **Kreise** der Ordnung (Länge) n verwendet.

Ein **Untergraph** H von G ist ein Graph, für den gilt $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$. Es sei X eine beliebige Menge von Ecken aus G. Dann ist durch $G[X] = (X, E_G[X])$ der durch X **induzierte Untergraph** von G gegeben; ferner sei $G - X = G[V(G) \setminus X]$.

2.2 Signierte Graphen

Das Konzept des signierten Graphen wurde erstmals 1954 von Frank Harary [8] eingeführt. Ein signierter Graph ist ein Graph, in welchem jede Kante ein Vorzeichen hat. Formal verstehen wir unter einem **signierten Graphen** G ein Triple $G = (V(G), E(G), \sigma_G)$. Dabei bezeichnet $V(G)$ die **Eckenmenge** und $E(G)$ die **Kantenmenge** von G. Die Funktion

$$\sigma_G : E(G) \to \{-1, 1\}$$

schließlich weist jeder Kante von G einen Wert aus der Menge $\{-1, 1\}$ zu, den wir die **Signatur** der Kante nennen. Offenbar können alle der im vorigen Abschnitt eingeführten Begriffe analog für signierte Graphen verwendet werden. Um besser zwischen signierten und unsignierten Graphen unterscheiden zu können, nennen wir den unsignierten Graphen mit denselben Ecken und Kanten wie G den **zugrundeliegenden Graphen** und bezeichnen ihn mit $\underline{G}$. Negieren wir die Vorzeichen aller Kanten von G, so heißt der dadurch entstehende signierte Graph **Negation** von G; wir bezeichnen ihn mit $-G$.

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff *Graph* häufig äquivalent zum Begriff *signierter Graph* verwendet, die richtige Bedeutung ergibt sich allerdings stets aus dem Kontext.

Switchen

Ist die Signatur einer Kante eines signierten Graphens $+1$, so nennen wir die Kante **positiv**; andernfalls **negativ**. Ein **positiver signierter Graph** ist ein signierter Graph, dessen Kanten alle positiv sind, ein **negativer signierter Graph** ist dementsprechend ein signierter Graph, dessen Kanten alle negativ sind. Offenbar ist ein signierter Graph G genau dann positiv, wenn gilt $\sigma_G = \mathbb{1}$, d.h., $\sigma(e) = 1$ für alle $e \in E(G)$.

Für eine Ecke $v \in V(G)$ bezeichne $N_G^+(v)$ die Menge aller Ecken $u \in V(G)$, für die $E_G(u, v)$ wenigstens eine positive Kante enthält. Analog bezeichne $N_G^-(v)$ die Menge aller Ecken $u \in V(G)$, für welche $E_G(u, v)$ wenigstens eine negative Kante enthält.

Aus einem signierten Graphen G und einer beliebigen Eckenmenge $X \subseteq V(G)$ können wir einen neuen signierten Graphen G' erzeugen, indem wir die Signaturen aller Kanten aus $\partial_G(X)$ negieren. Dieser Prozess wird **Switchen** von G an X genannt; wir bezeichnen den entstehenden Graphen G' mit $G' = G/X$. Offenbar ist $\underline{G} = \underline{G'}$ und es gilt

$$\sigma_{G'}(e) = \begin{cases} \sigma_G(e) & \text{für } e \notin \partial_G(X) \\ -\sigma_G(e) & \text{für } e \in \partial_G(X). \end{cases}$$

Wir nennen zwei Graphen G und G' **switching-äquivalent**, wenn es eine Menge $X \subseteq V(G)$ gibt, sodass $G' = G/X$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $G \equiv G'$.

Proposition 2.1. *Die Relation $G \equiv G'$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der signierten Graphen.*

Beweis: Wir zeigen, dass die Relation reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Es sei G ein beliebiger signierter Graph. Offenbar ist $G/\varnothing = G$ und damit $G \equiv G$; die Relation ist also reflexiv.

Um die Transitivität nachzuweisen, wählen wir signierte Graphen G, G' und $\tilde{G}$ mit $G \equiv G'$ und $G' \equiv \tilde{G}$. Dann existieren per Definition eine Menge X mit $G' = G/X$ und eine Menge Y mit $\tilde{G} = G'/Y$. Ist nun $Z = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ die symmetrische Differenz von X und Y, so folgt $\tilde{G} = G/Z$, also $G \equiv \tilde{G}$.

Im Falle $G' = G/X$ für eine Menge X gilt klarerweise auch $G = G'/X$ und die Symmetrie der Relation ist bewiesen. ■

Balanciertheit

Ist G ein signierter Graph und ist H ein signierter Untergraph von G, d.h., $\underline{H}$ ist ein Untergraph von $\underline{G}$ und $\sigma_H = \sigma_G|_{E(H)}$, so nennen wir

$$\sigma_G(H) = \prod_{e \in E(H)} \sigma_G(e)$$

das **Vorzeichenprodukt** von H. Ein signierter Graph G heißt **balanciert**, wenn das Vorzeichenprodukt jedes Kreises von G positiv ist. Ferner nennen wir einen signierten Graphen **unbalanciert**, wenn er nicht balanciert ist. Frank Harary [8] gelang es, balancierte Graphen wie folgt zu charakterisieren.

Satz 2.2. *Es sei G ein signierter Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

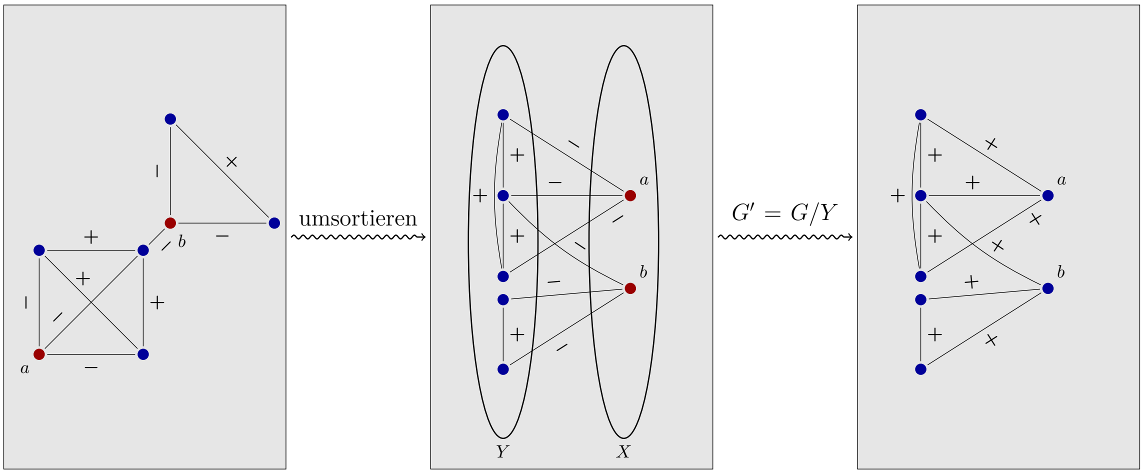
(a) *G ist balanciert.*

(b) *Die Eckenmenge von G ist die disjunkte Vereinigung zweier Mengen X und Y, sodass eine Kante aus $e \in E(G)$ genau dann negativ ist, wenn $e \in E_G(X, Y)$ gilt.*

(c) *G ist switching äquivalent zu einem positiven signierten Graphen.*

Offenbar ist also jeder zu einem balancierten Graphen switching äquivalente Graph ebenfalls balanciert. Im Folgenden bezeichnen wir die beiden Teilmengen aus Aussage (b) als **Klassen** des balancierten Graphen G. Abbildung 2.1 zeigt einen signierten Graphen der switching äquivalent zu einem positiven Graphen und somit wegen Satz 2.2 balanciert ist. Ein signierter Graph G heißt **antibalanciert**, wenn $-G$ balanciert ist (vgl. [16]).

Korollar 2.3. *Ein signierter Graph G ist genau dann antibalanciert, wenn in G jeder Kreis gerader Länge ein positives Vorzeichenprodukt und jeder Kreis ungerader Länge ein negatives Vorzeichenprodukt besitzt.*



G | $G, X = \{a, b\}$ | $G'{=}G/X$, wobei $\sigma_{G'} = \mathbb{1}$

Abbildung 2.1: Die Aussagen des Satzes 2.2 am Beispiel.

Eine weitere, äquivalente Charakterisierung ergibt sich aus Satz 2.2.

Satz 2.4. *Für einen signierten Graphen G sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *G ist antibalanciert.*

(b) *Die Eckenmenge von G ist die disjunkte Vereinigung zweier Mengen X und Y, sodass eine Kante aus $e \in E(G)$ genau dann positiv ist, wenn $e \in E_G(X, Y)$ gilt.*

(c) *G ist switching äquivalent zu einem negativen signierten Graphen.*

Der Beweis des obigen Satzes folgt sofort aus der Balanciertheit von $-G$; offenbar sind die Mengen X und Y die Klassen von $-G$.

2.3 Färbungen signierter Graphen

Das erste Konzept, die Ecken eines signierten Graphen zu färben, wurde von Thomas Zaslavsky [15, 16, 17] eingeführt. Das Färbungskonzept, das wir auch in unserer Arbeit verwenden werden, beschrieb er in [17]. Es sei G ein signierter Graph. Eine **Färbung** von G ist eine Abbildung $\varphi : V(G) \to \mathbb{Z}$, sodass für zwei beliebige Ecken u, v und für jede Kante $e \in E_G(u, v)$ gilt: $\varphi(u) \neq \sigma(e)\varphi(v)$. Um einen signierten Graphen zu färben, muss man also auch signierte Farben verwenden. Verlaufen zwischen zwei beliebigen Ecken

$u, v \in V(G)$ zwei unterschiedlich signierte parallele Kanten, so impliziert obige Definition offenbar $|\varphi(u)| \neq |\varphi(v)|$.

Das beschriebene Konzept bringt einige schöne Eigenschaften mit sich. So ist jede Färbung eines positiven signierten Graphen G auch eine zulässige Färbung des zugrundeliegenden Graphen $\underline{G}$. Ferner verhalten sich die Färbungen stabil bezüglich des Switchens. Ist φ eine Färbung des signierten Graphen G und ist $G' = G/X$ für eine Eckenmenge $X \subseteq V(G)$, so ist die Abbildung φ' mit

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi(u) & \text{für } u \notin X, \\ -\varphi(v) & \text{für } u \in X \end{cases}$$

eine Färbung von G'. Wir bezeichnen in diesem Fall die Färbung φ' mit φ/X.

Ein großer Nachteil dieses Färbungskonzepts ist jedoch, dass die Farbe 0 eine Sonderrolle zugewiesen bekommt. So kann man zu einer Ecke mit Färbung 0 benachbarte Ecken niemals mit 0 färben, unabhängig davon, ob die beiden Ecken durch eine positive oder negative Kante verbunden sind.

Wir nennen eine Teilmenge der ganzen Zahlen eine **Farbmenge**. Für eine Farbmenge C definieren wir $-C = \{-c \mid c \in C\}$; C heißt **symmetrisch**, falls $C = -C$ gilt. Die signierte chromatische Zahl $\chi_\pm$ definieren wir wie in [11]. Für eine beliebige Zahl $k \geq 1$ sei

$$M_k = \begin{cases} \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell\} & \text{für } k = 2\ell \\ \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell\} & \text{für } k = 2\ell + 1. \end{cases}$$

Dann heißt jede Färbung eines signierten Graphen G, welche nur Farben aus M_k verwendet, **k-Färbung** von G. Die kleinste Zahl k, sodass eine k-Färbung von G existiert, heißt **signierte chromatische Zahl** von G und wird mit $\chi_\pm(G)$ bezeichnet. Ist $\chi_\pm(G) \leq k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so nennen wir G auch **k-färbbar**.

Máčajová, Raspaud und Škoviera [11] erarbeiteten einige grundlegenden Ergebnisse zur signierten chromatischen Zahl.

Proposition 2.5. *Für einen signierten Graphen G gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist G positiv, so ist $\chi_\pm(G) = \chi(G)$.*

(b) *Ist $G' \equiv G$, so ist $\chi_\pm(G') = \chi_\pm(G)$.*

(c) *Ist G balanciert, so ist $\chi_\pm(G) = \chi(\underline{G})$.*

(d) $\chi_\pm(G) \leq 2\chi(\underline{G}) - 1$.

Wir wollen nun eine ganze Klasse signierter Graphen einführen, für welche die Schranke in Aussage (d) scharf ist. Ist H ein schlichter Graph, so bezeichnen wir mit $G = 2H$ den signierten Graphen der entsteht, wenn wir alle Kanten von H durch eine positive und eine negative Kante ersetzen. Es ergibt sich die folgende Beobachtung.

Lemma 2.6. *Es sei G ein signierter Graph. Ist $G = 2H$ für einen schlichten Graphen H, so gilt*

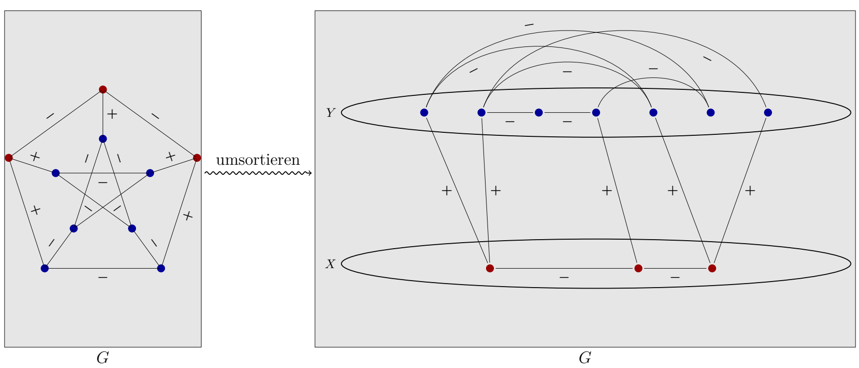
$$\chi_{\pm}(G) = 2\chi(H) - 1.$$

Beweis: Es sei $h = \chi(H)$ und $k = \chi_{\pm}(G)$. Dann existiert eine Färbung des unsignierten Graphen H, die ausschließlich die Farben $0, 1, \ldots, h-1$ verwendet. Diese Färbung φ ist klarerweise auch eine Färbung des signierten Graphen G mit $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq M_{2h-1}$. Somit gilt $\chi_{\pm}(G) \leq 2\chi(H) - 1$.

Wir behaupten nun, dass $\chi_{\pm}(G) \geq 2\chi(H) - 1$ gilt. Dazu betrachten wir eine k-Färbung φ von G und die Menge $X = \{v \in V(G) \mid \varphi(v) < 0\}$. Nach Konstruktion von G gilt $G/X = G$, also ist $\varphi' = \varphi/X$ ebenfalls eine $k-$Färbung von G mit $\varphi'(v) \geq 0$ für alle $v \in V(G)$. Wegen $G = 2H$ ist dann φ' auch eine Färbung von H mit einer Farbmenge $C \subseteq \{0, 1, \ldots, \ell\}$ für $\ell = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Daraus folgt $\chi(H) \leq \ell + 1$, d.h. $\chi(H) \leq \frac{k+1}{2}$. Dies ist offensichtlich äquivalent zu unserer Behauptung. ∎

Offenbar ist ein signierter Graph genau dann 1-färbbar, wenn es in ihm keine Kanten gibt. Die Beantwortung der Frage, wann ein signierter Graph 2-färbbar ist, ist in [11] vorzufinden und folgt leicht aus Satz 2.4.

Satz 2.7. *Ein signierter Graph ist genau dann 2-färbbar, wenn er antibalanciert ist.*



Färben wir nun alle Ecken aus X mit der Farbe 1 und alle Ecken aus Y mit der Farbe -1, so erhalten wir eine zulässige Färbung von G; G ist also antibalanciert.
Weiter fällt auf, dass die Eckenmengen X und Y die Klassen des balancierten Graphen $-G$ sind.

Abbildung 2.2: Ein antibalancierter Petersengraph.

Greedy-Algorithmus und Reihenzahl

Der **Greedy-Algorithmus** (vgl. [3]) ist ein in der Graphentheorie überaus geläufiger Algorithmus, welcher eine einfache Methode beschreibt, die Ecken eines (unsignierten) Graphen G zu färben. Ist G ein Graph der Ordnung n, so betrachten wir eine feste Aufzählung der Ecken von G, etwa $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ausgehend von v_1 färben wir die Ecke v_i mit der kleinstmöglichen Farbe $\alpha \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, welche unter keinem der Nachbarn v_j von v_i mit $j < i$ auftritt. Offenbar verwendet dieser Algorithmus nur Farben aus der Menge $\{0, 1, \ldots, \Delta(G)\}$, woraus sofort folgt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Natürlich kann der Greedy-Algorithmus leicht auf das Färbungskonzept für signierte Graphen übertragen werden. Es sei G ein beliebiger signierter Graph der Ordnung n und es sei $\Delta = \Delta(G)$. Ziel ist es, eine Färbung φ von G mit der Farbmenge $M_{\Delta+1}$ zu konstruieren. Wir legen zunächst eine Eckenaufzählung $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von G fest und färben die Ecken entsprechend dieser Aufzählung, wobei die Ecke v_i die kleinstmöglichen Farbe $\varphi(v_i)$ aus $M_{\Delta+1}$ erhält. Die Menge der erlaubten Farben

$$C_i = M_{\Delta+1} \setminus (\{\varphi(v_j) \mid v_j \in N_G^+(v_i), i < j\} \cup \{-\varphi(v_j) \mid v_j \in N_G^-(v_i), i < j\})$$

ist wegen $d_G(v_i) \leq \Delta$ nicht leer und wir können $\varphi(v_i) = \min C_i$ setzen. Daraus erhalten wir die Ungleichung $\chi_\pm(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Diese Abschätzung lässt sich allerdings durch die Betrachtung der sogenannten Reihenzahl häufig verbessern. Die **Reihenzahl** $\mathrm{col}(G)$ eines (signierten) Graphen G ist der maximale Minimalgrad aller Untergraphen von G plus 1. Formal bedeutet dies

$$\mathrm{col}(G) = \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Reihenzahl eines (signierten) Graphen der Ordnung n genau dann höchstens $k + 1$ ist, wenn es eine Eckenaufzählung $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von G gibt, in der für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Ecke v_i in dem von den Ecken $v_1, v_2, \ldots, v_i$ induzierten Untergraphen höchstens den Grad k hat. Durch Verwendung dieser Beziehung in Verbindung mit dem oben beschriebenen Greedy-Algorithmus können wir leicht folgern (vgl. [11]), dass für jeden signierten Graphen $\chi_\pm(G) \leq \mathrm{col}(G)$ gilt und somit

$$\chi_\pm(G) \leq \mathrm{col}(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

In Lemma 3.1 werden wir eine analoge Ungleichung für die listenchromatische Zahl beweisen.

Die Ungleichung $\chi_{\pm}(G) \leq \Delta(G) + 1$ wirft die Frage auf, für welche Graphen die Gleichheit gilt. Für die chromatische Zahl wurde dieses Problem bereits von Brooks [2] gelöst. Er bewies, dass die vollständigen Graphen und die Kreise ungerader Länge die einzigen zusamenhängenden Graphen G sind, für die $\chi(G) = \Delta(G)+1$ gilt. Für die signierte chromatische Zahl wurde das entsprechende Problem in einer Arbeit von Máčajová, Raspaud und Škoviera [11] gelöst, wobei nur schlichte signierte Graphen betrachtet wurden. Sie bewiesen das folgende Resultat.

Satz 2.8. *Es sei G ein zusammenhängender signierter Graph mit schlichtem zugrundeliegenden Graphen. Falls G kein balancierter vollständiger Graph, kein balancierter Kreis ungerader Länge und kein unbalancierter Kreis gerader Länge ist, so gilt $\chi_{\pm}(G) \leq \Delta(G)$.*

Ist G ein balancierter vollständiger Graph oder ein balancierter Kreis ungerader Länge, so folgt aus Proposition 2.5 die Beziehung $\chi_{\pm}(G) = \chi(\underline{G}) = \Delta(G)+1$. Ist G ein unbalancierter Kreis gerader Länge, so ist G insbesondere nicht antibalanciert und es folgt aus Satz 2.7, dass $\chi_{\pm}(G) = \Delta(G) + 1 = 3$ gilt.

Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit Satz 2.8 auch auf signierte Graphen mit Mehrfachkanten ausweiten. Ferner werden wir eine Listenversion des Satzes für signierte Graphen beweisen.

Kapitel 3

Listenfärbungen signierter Graphen

Dieses Kapitel soll dazu dienen, das bekannte Konzept der Listenfärbungen (vgl. z.B. [3] , [14], [6]) auf signierte Graphen zu übertragen. So werden zunächst Listenfärbungen für signierte Graphen definiert und die signierte listenchromatische Zahl $\chi_{\pm}^{\ell}$ eingeführt. Den Großteil des Kapitels stellt ein Satz dar, der ursprünglich von Erdős, Rubin und Taylor [6] für unsignierte Graphen bewiesen und als zentrales Ergebnis dieser Arbeit auf signierte Graphen übertragen wurde. Mit Hilfe dieses Satzes ist es möglich, Listenfärbungen sogenannter unfärbbarer Paare zu charakterisieren und auch einen Brooks-ähnlichen Satz für Listenfärbungen signierter Graphen zu beweisen. Dies wird im letzten Abschnitt des Kapitels durchgeführt.

3.1 Listenfärbungskonzept

Die Idee hinter dem Konzept der Listenfärbungen ist es, statt, wie üblich, alle Farben für die Färbung eines Graphen zuzulassen, jeder Ecke eine Menge (Liste) von Farben zuzuweisen. Jede Listenfärbung darf dann für alle Ecken nur Farben aus der jeweiligen Farbliste verwenden. Wir formalisieren dies nun. Es sei G ein signierter Graph, $f : V(G) \to \mathbb{N}$ eine Abbildung und $k \geq 0$ eine ganze Zahl. Eine **Listenzuweisung** von G ist eine Abbildung $L : V(G) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, die jeder Ecke $v \in V(G)$ eine Menge (Liste) $L(v)$ von Farben zuordnet. Ist $|L(v)| = f(v)$ für alle $v \in V(G)$, so bezeichnen wir L als ***f*-Zuweisung**, bzw. als ***k*-Zuweisung**, falls $|L(v)| = k$ ist für alle $v \in V(G)$. Eine ***L*-Färbung** von G ist eine Färbung φ von G, sodass $\varphi(v) \in L(v)$ für alle $v \in V(G)$ gilt. Existiert eine L-Färbung des signierten

Graphen G, so nennen wir G auch L-**färbbar**. Des Weiteren heißt G f**-listenfärbbar**, wenn für jede f-Zuweisung L gilt, dass G eine L-Färbung besitzt. Ist in diesem Fall $f(v) = k$ für alle $v \in V(G)$, so nennen wir G k**-listenfärbbar**. Die **signierte listenchromatische Zahl** $\chi^{\ell}_{\pm}(G)$ ist die kleinste Zahl $k \geq 0$, für die G k-listenfärbbar ist.

Lemma 3.1. *Es sei G ein beliebiger signierter Graph und es sei $f : V(G) \to \mathbb{N}$ mit $f(v) = d_G(v) + 1$ für alle $v \in V(G)$. Dann ist G f-listenfärbbar. Des Weiteren gilt für jeden signierten Graphen G die Beziehung*

$$\chi_{\pm}(G) \leq \chi^{\ell}_{\pm}(G) \leq \mathrm{col}(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Beweis: Wir beweisen zunächst die Beziehung $\chi_{\pm}(G) \leq \chi^{\ell}_{\pm}(G)$. Ist $\chi^{\ell}_{\pm}(G) = k$, so besitzt G insbesondere eine L-Färbung mit $L(v) = M_k$ für alle $v \in V(G)$, wobei M_k wie in Kapitel 2 definiert werde. Dann ist jede L-Färbung auch eine k-Färbung von G und damit gilt $\chi_{\pm}(G) \leq k = \chi^{\ell}_{\pm}(G)$.

Die zweite Abschätzung, $\chi^{\ell}_{\pm}(G) \leq \mathrm{col}(G)$, folgt mit Hilfe des Greedy-Algorithmus für signierte Graphen. Sei G ein signierter Graph der Ordnung n und sei $\mathrm{col}(G) = k + 1$. Dann existiert eine Eckenaufzählung $v_1, v_2, \ldots, v_n$, sodass die Ecke v_i im von den Ecken $v_1, v_2, \ldots, v_i$ induzierten Untergraphen höchstens den Grad k hat. Es sei L nun eine beliebige Listenzuweisung mit $|L(v)| = k + 1$ für alle $v \in V(G)$. Wir färben, beginnend bei v_1, nacheinander jede Ecke v_i mit der kleinsten Farbe $\varphi(v_i) \in L(v_i)$, sodass keiner der Nachbarn v_j von v_i mit $j < i$ die Farbe $\sigma(e)\varphi(v_i)$ für beliebiges $e \in E_G(v_j, v_i)$ besitzt. Somit ist $\varphi(v_i)$ also die kleinste Farbe aus der Menge

$$L(v_i) \setminus (\{\varphi(v_j) \mid v_j \in N^+_G(v_i), i < j\} \cup \{-\varphi(v_j) \mid v_j \in N^-_G(v_i), i < j\}),$$

welche wegen $d_{G[v_1,v_2,\ldots,v_i]}(v_i) \leq k \leq |L(v_i)| - 1$ nicht leer ist. Damit ist $\chi^{\ell}_{\pm}(G) \leq \mathrm{col}(G)$.

Ist f nun die Abbildung mit $f(v) = d_G(v) + 1$ für alle $v \in V(G)$ und ist L eine beliebige Listenzuweisung von G mit $|L(v)| = f(v)$ für alle $v \in V(G)$, so können wir mit zum Beweis der zweiten Abschätzung analoger Vorgehensweise (d.h. mit dem Greedy-Algorithmus) schließen, dass G eine L-Färbung besitzt und somit f-listenfärbbar ist.

Die Abschätzung $\mathrm{col}(G) \leq \Delta(G) + 1$ folgt direkt aus der Definition der Reihenzahl $\mathrm{col}(G)$ (vgl. Kapitel 2). ∎

3.2 Unfärbbare Paare

Es seien G ein signierter Graph und f die Abbildung mit $f(v) = d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$. Es stellt sich die Frage, wann G f-listenfärbbar ist. Das restliche Kapitel befasst sich intensiv mit dieser Frage und charakterisiert alle Graphen, welche nicht bezüglich der beschriebenen Abbildung f-listenfärbbar sind.

Wir nennen (G, L) ein **unfärbbares Paar**, wenn G ein zusammenhängender signierter Graph und L eine Listenzuweisung mit $|L(v)| \geq d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$ ist, sodass G nicht $L-$färbbar ist.

Im weiteren Verlauf wird sich zeigen, dass alle unfärbbaren Paare eine ganz bestimmte Struktur haben. Um diese möglichst präzise beschreiben zu können, definieren wir die folgende Klasse spezieller signierter Graphen. Ein nichtleerer signierter Graph heißt **Baustein**, wenn er ein vollständiger balancierter Graph, ein balancierter Kreis ungerader Länge, ein unbalancierter Kreis gerader Länge, ein $2K_n$ für $n \geq 2$ oder ein $2C_n$ für ungerades $n \geq 3$ ist. Einige typische Bausteine sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Wir wollen nun zwei Methoden zum Umgang mit unfärbbaren Paaren angeben.

Reduktion unfärbbarer Paare

Es sei (G, L) ein unfärbbares Paar mit signiertem Graphen G der Ordnung wenigstens 2. Weiter sei $v \in V(G)$ eine beliebige Ecke, die keine Artikulation ist, und $\alpha \in L(v)$ sei eine beliebige Farbe. Für den signierten Graphen $G' = G - v$ betrachten wir die Listenzuweisung L' mit

$$L'(u) = \begin{cases} L(u) \setminus \{\alpha\} & \text{für } u \in N_G^+(v) \setminus N_G^-(v), \\ L(u) \setminus \{-\alpha\} & \text{für } u \in N_G^-(v) \setminus N_G^+(v), \\ L(u) \setminus \{-\alpha, \alpha\} & \text{für } u \in N_G^+(v) \cap N_G^-(v), \\ L(u) & \text{sonst.} \end{cases}$$

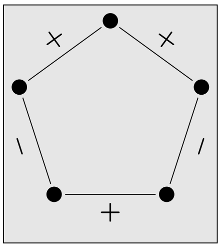
Dann ist offenbar $|L'(u)| \geq d'_G(u)$ für alle $u \in V(G')$. Außerdem ist G' nicht L'-färbbar, da eine L'-Färbung von G' zu einer L-Färbung von G führen würde, indem wir v mit α färbten. Also ist (G', L') ein neues unfärbbares Paar und wir schreiben kurz $(G', L') = (G, L)/(v, \alpha)$. Durch iterative Anwendung dieser Reduktion auf einen signierten Graphen G zusammen mit einer Listenzuweisung L haben wir außerdem die Möglichkeit, leicht zu überprüfen, ob (G, L) kein unfärbbares Paar ist (vgl. Abbildung 3.2).

Switching-äquivalente unfärbbare Paare

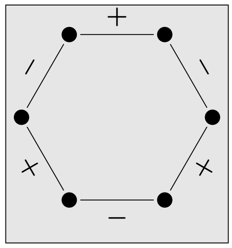
Es sei (G, L) ein unfärbbares Paar und es sei $X \subseteq V(G)$ eine Menge von Ecken. Für den signierten Graphen $G' = G/X$ betrachten wir die Listenzuweisung L' mit

$$L'(v) = \begin{cases} -L(v) & \text{für } v \in X, \\ L(v) & \text{für } v \notin X, \end{cases}$$

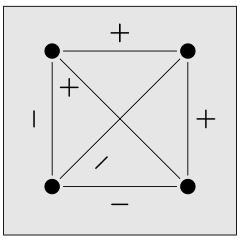
und schreiben dafür kurz $L' = L/X$. Es ist leicht einzusehen, dass (G', L') wieder ein unfärbbares Paar bildet. Besäße nämlich G' eine L'-Färbung φ', so wäre $\varphi = \varphi'/X$ nach Konstruktion von L' eine L-Färbung von G, ein Widerspruch.



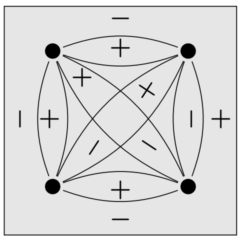
balancierter C_5



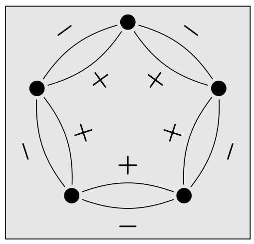
unbalancierter C_6



balancierter K_4



$2K_4$



$2C_5$

Abbildung 3.1: Typische Bausteine.

Hauptsatz der Arbeit

Das nächste Resultat (Satz 3.2) wurde nach dem Vordbild eines ähnlichen Satzes von Erdős, Rubin und Taylor [6] erarbeitet; es stellt die Erweiterung dessen auf signierte Graphen dar und bildet das Hauptresultat dieser Arbeit. Zum Verständnis des folgenden Satzes erinnere man sich daran, dass ein **Block** B eines (signierten) Graphen G ein maximaler zusammen-

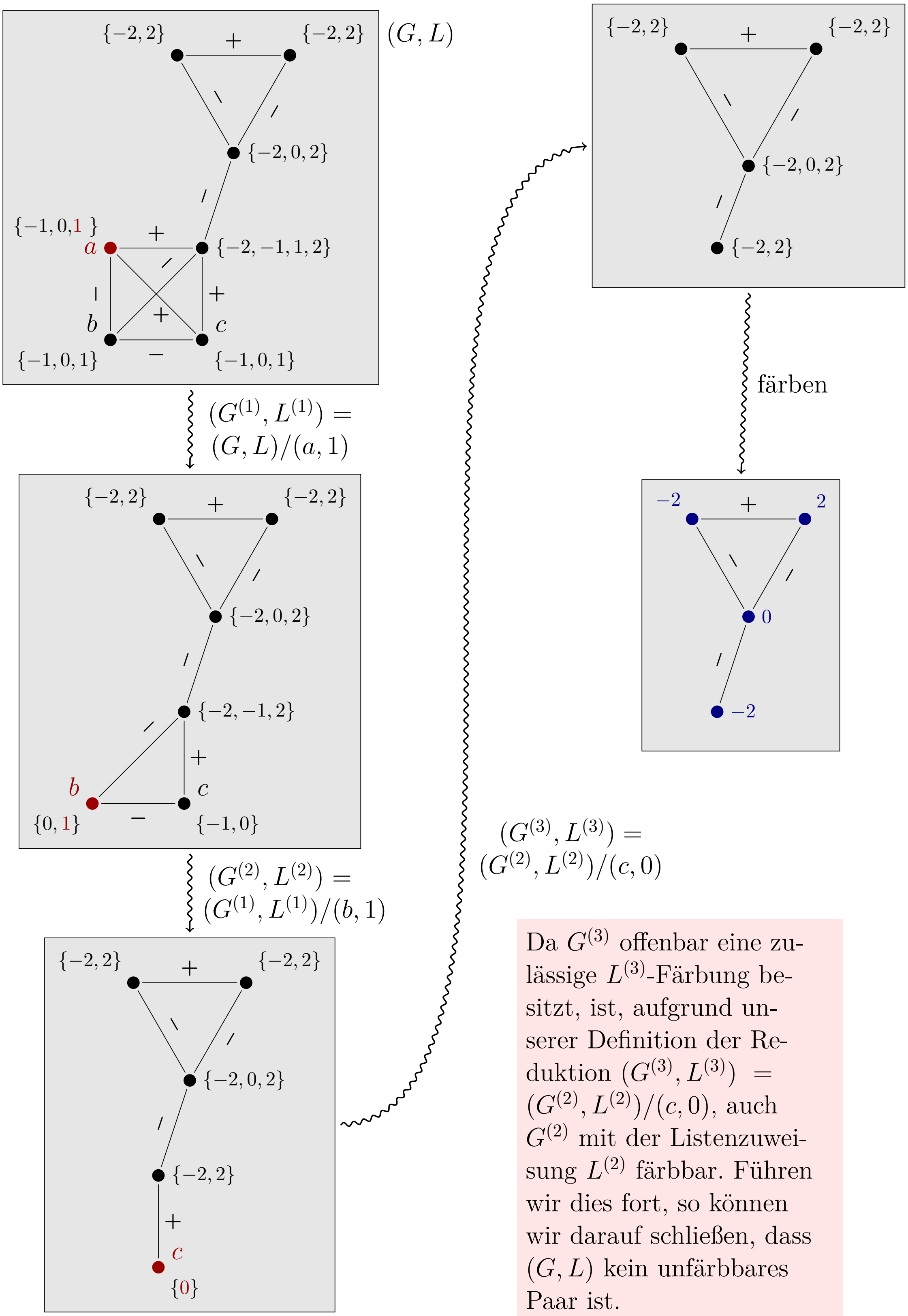


Abbildung 3.2: Eine Möglichkeit, zu überprüfen, ob (G, L) kein unfärbbares Paar ist.

hängender Untergraph von G ist, welcher keine Artikulation enthält. Mit $\mathcal{B}(G)$ werden wir in Zukunft die Menge aller Blöcke des (signierten) Graphen G bezeichnen. Existiert in G keine Artikulation, so ist $\mathcal{B}(G) = \{G\}$. Ist G die Vereinigung der (signierten) Graphen G_1 und G_2, welche nur eine Ecke gemeinsam haben, so ist $\mathcal{B}(G) = \mathcal{B}(G_1) \cup \mathcal{B}(G_2)$, sofern $|G_i| \geq 2$ für $i = 1, 2$ erfüllt ist. Eine weitere Eigenschaft von Blöcken ist es, dass zwei unterschiedliche Blöcke von G höchstens eine Ecke gemeinsam haben können. Eine Ecke $v \in V(G)$ ist genau dann eine Artikulation von G , wenn sie zu mehreren Blöcken aus $\mathcal{B}(G)$ gehört. Ein **Endblock** von G ist ein Block, welcher höchstens eine Artikulation von G enthält. Im Falle der Existenz einer Artikulation von G sind wenigstens zwei Blöcke aus $\mathcal{B}(G)$ Endblöcke.

Satz 3.2. *Es sei (G, L) ein unfärbbares Paar. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $|L(v)| = d_G(v)$ *für alle* $v \in V(G)$.

(b) *Gibt es Mehrfachkanten in G, so bestehen diese immer aus genau einer positiven und einer negativen Kante.*

(c) *Ist G ein Block, so gelten folgende Aussagen:*

  (c1) *Ist G balanciert mit Klassen X, Y, so existiert eine Farbmenge C mit $L(v) = C$ für alle $v \in X$ und $L(v) = -C$ für alle $v \in Y$.*

  (c2) *Ist G unbalanciert, so existiert eine symmetrische Farbmenge C mit $L(v) = C$ für alle $v \in V(G)$.*

  Insbesondere folgt daraus die Regularität von G.

(d) *Ist G ein Block mit $\mu(G) \geq 2$, so ist G r-regulär für ein gerades $r \geq 2$.*

(e) *Jeder Block von G ist ein Baustein.*

Beweis: Wir führen den Beweis für das unfärbbare Paar (G, L) durch Induktion nach der Ordnung n von G. Ist $n = 1$, so gelten offenbar die Aussagen. Sei also $n \geq 2$.

Für den Beweis von (a) wählen wir eine beliebige Ecke $v \in V(G)$. Da G zusammenhängend ist und $n \geq 2$, enthält G eine Ecke $u \neq v$, welche keine Artikulation von G ist. Da (G, L) ein unfärbbares Paar mit wenigstens zwei Ecken ist, gilt für jede Ecke $w \in V(G)$ die Ungleichung $|L(w)| \geq d_G(w) \geq 1$. Insbesondere ist somit $L(u) \neq \varnothing$ und wir können eine beliebige Farbe $\alpha \in L(u)$ wählen. Nun betrachten wir das reduzierte unfärbbare Paar $(G', L') = (G, L)/(u, \alpha)$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $d_{G'}(v) = |L'(v)|$. Daraus erhalten wir, wegen der Konstruktion von L' aus L und der Ungleichung $|L(v)| \geq d_G(v)$, die Gleichung $d_G(v) = |L(v)|$.

Den Beweis von (b) führen wir indirekt. Angenommen, zwei Ecken u und v von G sind durch zwei positive oder zwei negative Kanten in G verbunden. Entfernen wir eine dieser Kanten, so ergibt sich der signierte Graph G', welcher zusammen mit L ein unfärbbares Paar bildet. Für dieses gilt dann allerdings $d_{G'}(u) < |L(u)|$, im Widerspruch zu (a).

Für den Beweis von (c) nehmen wir an, dass G ein Block ist. Wir zeigen zunächst, dass für beliebige Ecken $u, v \in V(G)$ und für alle Kanten $e \in E_G(u, v)$ die Gleichung

$$L(v) = \sigma(e)L(u) \tag{3.1}$$

gilt. Angenommen, es gäbe eine Kante $e \in E_G(u, v)$ mit $L(u) \neq \sigma(e)L(u)$. Wegen Symmetrie könnten wir in diesem Fall die Existenz einer Farbe $\alpha \in L(u)\backslash(\sigma(e)L(v))$ voraussetzen. Somit wäre $\sigma(e)\alpha \notin L(v)$, woraus für das unfärbbare Paar $(G', L') = (G, L)/(u, \alpha)$ die Ungleichung $d_{G'}(v) < d_G(v) \leq |L(v)| = |L'(v)|$ folgen würde, ein Widerspruch zu (a).

Ist G balanciert mit Klassen X und Y, so wissen wir nach Satz 2.2, dass innerhalb der Klassen nur positive und zwischen den Klassen nur negative Kanten verlaufen. Wir betrachten das unfärbbare Paar (G', L') mit $G' = G/Y$ und $L' = L/Y$. Alle Kanten des signierten Graphen G' sind positiv und Gleichung (3.1) angewendet auf (G', L') impliziert wegen des Zusammenhangs von G' sofort die Existenz einer Farbmenge C mit $L'(v) = C$ für alle $v \in V(G')$. Da wegen $L' = L/Y$ auch $L = L'/Y$ gilt, ist folglich $L(v) = C$ für alle $v \in X$ und $L(v) = -C$ für alle $v \in Y$, womit (c1) bewiesen ist.

Betrachten wir nun den Fall, dass G unbalanciert ist. Aus dem Zusammenhang von G und aus Gleichung (3.1) können wir auf die Existenz einer Farbmenge C mit $L(v) = \pm C$ für alle $v \in V(G)$ schließen. Es verbleibt zu zeigen, dass C symmetrisch ist. Existieren Mehrfachkanten in G, so folgt aus (b), dass diese immer aus genau einer positiven und einer negativen Kante bestehen und Gleichung (3.1) impliziert sofort $C = -C$. Wir müssen also nur noch den Fall betrachten, dass G schlicht ist. Da G unbalanciert ist, existiert in G wenigstens ein Kreis H mit negativem Vorzeichenprodukt. Somit enthält H eine negative Kante, etwa $e \in E_H(u, v)$. Aus Gleichung (3.1) folgt $L(u) = -L(v)$ und wegen Symmetrie können wir dann $L(u) = C$ und $L(v) = -C$ voraussetzen. Der Teilweg P von H, der e nicht enthält, verbindet u mit v und hat offenbar ein positives Vorzeichenprodukt. Somit hat P insbesondere eine gerade Anzahl von negativen Kanten und mit Hilfe von Gleichung (3.1) erhalten wir $L(u) = L(v) = C$. Demnach ist $-C = L(v) = C$ und die Symmetrie ist gezeigt.

Die Regularität von G schließlich wird in beiden Fällen durch $|L(v)| = |C| = |-C|$ in Verbindung mit (a) impliziert. Damit ist Aussage (c) bewiesen.

Zum Beweis der Aussage (d) nehmen wir an, dass G ein Block ist mit $\mu(G) \geq 2$. Aus (c) wissen wir, dass G regulär vom Grad r ist. Angenommen, r ist ungerade. Aus (b) schließen wir, dass G einen Kreis der Länge 2 mit negativem Vorzeichenprodukt enthält und somit unbalanciert ist. Dann gibt es, wegen (c2) und (a), eine symmetrische Farbmenge C mit Mächtigkeit r, sodass $L(v) = C$ für alle $v \in V(G)$ ist. Wegen der Symmetrie von C gilt dann $0 \in C$. Seien nun u, v zwei durch parallele Kanten verbundene Ecken von G. Für das unfärbbare Paar $(G', L') = (G, L)/(u, 0)$ gilt dann $|L'(v)| = |L(v)| - 1 = d_G(v) - 1 > d'_G(v)$, ein Widerspruch zu (a).

Abschließend wollen wir die Aussage (e) beweisen, d.h., wir wollen zeigen, dass für das unfärbbare Paar (G, L) jeder Block von G ein Baustein ist. Dafür benötigen wir einige Fallunterscheidungen.

Fall 1: *Es existiert eine Artikulation in G.* Dann gibt es in G wenigstens zwei Endblöcke B_1, B_2. Jeder Endblock B_i enthält klarerweise eine Ecke v_i, sodass $G - v_i$ zusammenhängend ist. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt dann für $(G_i, L_i) = (G, L)/(v_i, \alpha_i)$ mit beliebigem $\alpha_i \in L(v_i)$ $(i = 1, 2)$, dass alle Blöcke von G_i Bausteine sind. Da jeder Block $B \neq B_i$ von G auch ein Block von $G - v_i$ ist, folgt die Aussage.

Fall 2: *Es existiert keine Artikulation in G.* Dies ist gleichbedeutend damit, dass G ein Block ist. Aus (c) wissen wir, dass G regulär vom Grad r ist.

Seien $v \in V(G)$ eine beliebig gewählte Ecke und $\alpha \in L(v)$ eine Farbe. Die Induktionsvoraussetzung impliziert für $(G', L') = (G, L)/(v, \alpha)$, dass alle Blöcke von $G' = G - v$ Bausteine sind. Insbesondere ist dann jeder Block von G' regulär. Für die Endblöcke von G' gilt außerdem wegen (b), dass sie nur den Regularitätsgrad $r - 1$ oder $r - 2$ haben können. Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle.

Fall 2.1: *Es existiert keine Artikulation in G'.* Dann ist G' ein Block und somit ein Baustein, welcher regulär vom Grad $r - 1$ oder $r - 2$ ist.

Ist G' regulär vom Grad $r - 2$, so gibt es von jeder Ecke aus $V(G')$ in G zwei parallele Kanten nach v. Wegen $|G| = n$ ist dann $r = 2|G'| = 2(n - 1)$ und dementsprechend ist

$$r - 2 = 2 \cdot (n - 1) - 2 = 2 \cdot |G'| - 2.$$

Dies ist nach (b) nur möglich, wenn $G = 2K_n$ und $G' = 2K_{n-1}$ gilt. Also ist G in diesem Fall ein Baustein.

Ist G' regulär vom Grad $r - 1$, so ist G' wegen Aussage (d) schlicht, denn entweder ist r ungerade und sowohl G, als auch G' sind schlicht, oder $r - 1$ ist ungerade und G' ist schlicht. Also ist G' ein schlichter Baustein. Wegen der r-Regularität von G ist die Ecke v in G mit jeder Ecke von G' durch genau eine Kante verbunden und für den Regularitätsgrad von G

gilt somit $r = |G'| = |G| - 1$. Da G' ein schlichter Baustein ist, schließen wir dann, dass sowohl G als auch G' vollständige signierte Graphen sind.

Es verbleibt zu zeigen, dass G balanciert ist. Den Beweis führen wir indirekt und nehmen an, dass G unbalanciert ist. Aufgrund der Tatsache, dass G ein Block ist, folgt dann wegen Aussage (c) die Existenz einer symmetrischen Farbmenge C mit $L(v) = C$ für alle $v \in V(G)$. Da G vollständig ist, erhalten wir $|G| \geq 3$ und, wegen (a), gilt dann $|C| = |G| - 1 \geq 2$. Die Farbmenge C enthält also (aufgrund der Symmetrie von C) eine positive Farbe α. Wegen der Unbalanciertheit von G besitzt G wenigstens eine negative Kante, etwa $e \in E_G(u, v)$. Für das unfärbbare Paar $(G', L') = (G, L)/(u, \alpha)$ gilt dann $L'(v) = C \setminus \{-\alpha\}$. Da die Farbmenge $C' = C \setminus \{-\alpha\}$ offenbar nicht symmetrisch ist, erhalten wir aus Aussage (c), dass der Block G' balanciert mit Klassen X und Y ist. Wegen (c1) und wegen Symmetrie ergibt sich dann $L'(w) = C'$ für alle $w \in X$ und $L'(w) = -C'$ für alle $w \in Y$. Nach Konstruktion von L' ist somit jede Kante aus $E_G(u, X)$ negativ und jede Kante aus $E_G(u, Y)$ positiv. G ist also ein balancierter Graph mit Klassen $X, Y \cup \{u\}$. Damit ist Fall 2.1 abgeschlossen.

Fall 2.2: *Es existiert eine Artikulation in G'.* Dann gibt es in G' mindestens zwei Endblöcke B_1 und B_2, die jeweils $(r-1)$-reguläre oder $(r-2)$-reguläre Bausteine sind.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass beide Blöcke B_1 und B_2 den Regularitätsgrad $r - 1$ haben. Ist r ungerade, so ist G schlicht (wegen Aussage (d)) und damit insbesondere auch B_1 und B_2. Andernfalls ist $r - 1$ ungerade und B_1 und B_2 sind Bausteine ungeraden Regularitätsgrades, also schlicht. Somit sind aus jedem der beiden Blöcke wenigstens $r - 1$ Ecken in G zu v adjazent; es gilt also $2(r-1) \leq d_G(v) = r$. Daraus folgt $r = 2$ und G ist demnach ein Kreis.

Es verbleibt zu zeigen, dass der Kreis G ein Baustein ist, d.h. ein balancierter Kreis ungerader Länge oder ein unbalancierter Kreis gerader Länge. Zum Nachweis können wir die Aussage (c) verwenden.

Ist G balanciert mit Klassen X, Y, so gibt es nach (a) und (c1) eine 2-elementige Farbmenge C mit $L(v) = C$ für alle $v \in X$ und $L(v) = -C$ für alle $v \in Y$. Es sei $G' = G/X$ und es sei $L' = L/X$. Dann ist (G', L') ein unfärbbares Paar (siehe Switching-äquivalente unfärbbare Paare), G' ist ein positiver signierter Graph und $L'(v) = C$ für alle $v \in V(G')$. Da der positive signierte Kreis G' nicht L'-färbbar ist, muss er ungerade Länge haben. Somit ist auch G ein balancierter Kreis ungerader Länge, also ein Baustein.

Andernfalls ist der Kreis G unbalanciert und es existiert nach (a) und (c2) eine 2-elementige, symmetrische Farbmenge C mit $L(v) = C$ für alle $v \in V(G)$. Die Unbalanciertheit von G impliziert ferner, dass das Vorzeichenprodukt von G negativ ist. Wäre G nun ein unbalancierter Kreis ungerader Länge, so folgt aus Folgerung 2.3, dass G antibalanciert ist und daher $\chi_{\pm}(G) \leq 2$ gilt (Satz 2.7). Da C eine symmetrische, 2-elementige Menge ist, existiert eine L-Färbung von G, ein Widerspruch. Folglich ist G ein unbalancierter Kreis gerader Länge und damit ein Baustein.

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass B_1 regulär vom Grad $r-1$ und B_2 regulär vom Grad $r-2$ ist. Wie im vorigen Fall schließen wir dann, dass B_1 schlicht ist und somit in G wenigstens $r-1$ Kanten von Ecken aus B_1 nach v verlaufen. Dann kann aber in G nur noch höchstens eine Kante von B_2 nach v führen. Dies widerspricht der Tatsache, dass B_2 den Regularitätsgrad $r-2$ und G den Regularitätsgrad r hat.

Abschließend müssen wir noch den Fall betrachten, dass jeder Endblock von $G' = G - v$ den Regularitätsgrad $r-2$ hat. Zunächst wollen wir zeigen, dass in G' genau zwei Endblöcke existieren. Es sei k die Anzahl aller Endblöcke von G'. Des Weiteren sei B ein beliebiger Endblock von G' und v' sei die einzige Artikulation von G', die zu B gehört. Dann ist B ein Baustein vom Regularitätsgrad $r-2$ und somit gilt $|B| \geq \frac{r-2}{2} + 1$. Da die Ecke v in G mit jeder Ecke aus $B - v'$ durch genau zwei parallele Kanten verbunden ist, folgt

$$r = d_G(v) \geq 2k\frac{r-2}{2} = k(r-2).$$

Da G wenigstens zwei Endblöcke hat, ist der Regularitätsgrad r mindestens 4; obige Ungleichung ist also nur für $k = 2$ und $r = 4$ erfüllt. Somit gibt es genau zwei Endblöcke. Da wir die Ecke v beliebig gewählt haben, können wir leicht folgern, dass jeder Block von G' ein $2K_2$ ist; es gilt also $G = 2C_n$ für ein $n \geq 3$. Damit ist G unbalanciert und es existiert nach (a) und (c2) eine symmetrische Farbmenge C mit Kardinalität 4, sodass $L(v) = C$ für alle $v \in V(G)$ ist. Da (G, L) ein unfärbbares Paar ist, ist es leicht einzusehen, dass n ungerade ist und der Beweis ist abgeschlossen. ∎

Obiger Satz liefert uns eine Charakterisierung der signierten Graphen, die in unfärbbaren Paaren auftreten können. Wir wollen nun noch weiter ins Detail gehen und auch die Listenzuweisungen analysieren, welche in unfärbbaren Paaren vorkommen. Das nächste Lemma beschreibt diese für den Spezialfall, dass der signierte Graph selbst ein Baustein ist.

Lemma 3.3. *Es sei B ein Baustein und es sei L eine Listenzuweisung für B. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *Ist B balanciert mit Klassen X, Y, so ist (B, L) genau dann ein unfärbbares Paar, wenn eine Farbmenge C existiert mit $|C| = \Delta(B)$, sodass $L(v) = C$ für alle $v \in X$ und $L(v) = -C$ für alle $v \in Y$ gilt.*

(b) *Ist B unbalanciert, so ist (B, L) genau dann ein unfärbbares Paar, wenn eine symmetrische Farbmenge C existiert mit $|C| = \Delta(B)$, sodass $L(v) = C$ für alle $v \in V(B)$ gilt.*

Beweis: Ist (B, L) ein unfärbbares Paar, so folgt die Existenz der gesuchten Farbmenge sowohl im balancierten als auch im unbalancierten Fall sofort aus den Aussagen (c1) und (c2) des Satzes 3.2.

Sei B nun balanciert mit Klassen X, Y; ferner existiere eine Farbmenge C mit $|C| = \Delta(B)$, sodass $L(v) = C$ für alle $v \in X$ und $L(v) = -C$ für alle $v \in Y$ gelte. Angenommen, es existiert eine L-Färbung φ von B. Dann ist die Abbildung $\varphi' = \varphi/Y$ eine L'-Färbung für den positiven Graphen $B' = B/Y$ mit der Listenzuweisung $L' = L/Y$. Somit gilt $\chi_\pm(B') = \chi(\underline{B})$ (Proposition 2.5) und $L'(v) = C$ für alle $v \in V(G')$. Da $\underline{B}$ ein vollständiger Graph oder ein ungerader Kreis ist folgt dann aber

$$\chi^\ell_\pm(B') \geq \chi_\pm(B') = \chi(\underline{B}) > \Delta(\underline{B}) = |C| = |L'(v)|$$

für alle $v \in V(B')$. Der Graph B' ist also nicht L'-färbbar, im Widerspruch zur Annahme.

Zu betrachten verbleibt der Fall, dass B unbalanciert ist und eine symmetrische Farbmenge C mit $|C| = \Delta(B)$ existiert, sodass $L(v) = C$ für alle $v \in V(G)$ gilt. Ist B ein unbalancierter Kreis gerader Länge, so ist B klarerweise nicht antibalanciert und Satz 2.7 impliziert $\chi^\ell_\pm(B) \geq \chi_\pm(B) > 2$, d.h., B ist nicht L-färbbar. Da trivialerweise $d_B(v) \leq |L(v)|$ für alle $v \in V(B)$ erfüllt ist, bildet (B, L) ein unfärbbares Paar. Ist hingegen B ein $2K_n$ mit $n \geq 2$ oder ein $2C_n$ mit ungeradem $n \geq 3$, so folgt aus Lemma 2.6 mit $B = 2H$ ($H = 2K_n$ bzw. $H = 2C_n$) die Beziehung

$$\chi_\pm(B) = 2\chi(H) - 1 = 2\Delta(H) + 1 = \Delta(B) + 1.$$

Wegen $\chi_\pm(B) \leq \chi^\ell_\pm(B)$ und $|C| < \Delta(B) + 1$ ist B nicht L-färbbar. Da auch $d_B(v) \leq |L(v)|$ für alle $v \in V(B)$ erfüllt ist, bildet (B, L) ein unfärbbares Paar und der Beweis ist abgeschlossen. ∎

Um diese Erkenntnis auch auf allgemeine unfärbbare Paare übertragen zu können, benötigen wir das folgende Lemma. Dieses bekundet, dass man aus zwei unfärbbaren Paaren ein neues unfärbbares Paar erzeugen kann, wenn man zwei geeignete Ecken miteinander „verschmilzt".

Lemma 3.4. *Es seien* (G_1, L_1) *und* (G_2, L_2) *unfärbbare Paare mit* $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$, *ferner sei* $G = G_1 \cup G_2$. *Wir definieren die Listenzuweisung* L *durch*

$$L(u) = \begin{cases} L_i(u) & \text{\textit{für} } u \in V(G_i) \setminus \{v\} \quad (i = 1, 2), \\ L_1(v) \cup L_2(v) & \text{\textit{für} } u = v. \end{cases}$$

Ist $L_1(v) \cap L_2(v) = \varnothing$, *so ist* (G, L) *ein unfärbbares Paar.*

Beweis: Angenommen, es existiere eine L-Färbung φ von G. Dann wäre $\varphi(v) \in L_i(v)$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und die Einschränkung von φ auf G_i wäre eine L_i-Färbung von G_i, ein Widerspruch. Somit ist G also nicht L-färbbar. Wegen $L_1(v) \cap L_2(v) = \varnothing$ ist $L(u) \geq d_G(u)$ für alle $u \in V(G)$. Da G zusammenhängend ist, bildet (G, L) also ein unfärbbares Paar. ■

Allerdings gilt nicht nur, dass je zwei unfärbbare Paare zusammen wieder ein unfärbbares Paar ergeben können. Es ist ebenso möglich, aus der gegebenen Listenzuweisung L eines unfärbbaren Paares (G, L) für die Blöcke $B \in \mathcal{B}(G)$ neue Listenzuweisungen L_B zu konstruieren, sodass (B, L_B) wieder ein unfärbbares Paar bildet. Diese Aussage präzisiert das folgende Lemma. Im Folgenden bezeichne $\mathcal{B}_v(G)$ die Menge aller Blöcke des signierten Graphen G, welche die Ecke v enthalten.

Lemma 3.5. *Es sei* (G, L) *ein unfärbbares Paar. Dann existiert für jeden Block* $B \in \mathcal{B}(G)$ *eine Listenzuweisung* L_B *derart, dass* (B, L_B) *ein unfärbbares Paar ist, ferner gilt* $L(v) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_v(G)} L_B(v)$ *für alle* $v \in V(G)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach Anzahl m der Blöcke von G. Ist $m = 1$, so ist die Aussage evident. Im Folgenden sei also $m \geq 2$.

Es sei G_1 ein Endblock von G; dieser enthält genau eine Artikulation v von G. Sei $G_2 = G - (G_1 - v)$. Dann ist $G_1 \cap G_2 = (\{v\}, \varnothing)$ und $\mathcal{B}(G_2) = \mathcal{B}(G) \setminus \{G_1\}$. Für $i = 1, 2$ sei C_i die Menge aller Farben $\alpha \in L(v)$, für die G_i keine L-Färbung φ_i mit $\varphi_i(v) = \alpha$ besitzt. Enthielte $L(v) \setminus (C_1 \cup C_2)$ eine Farbe α, so gäbe es eine L-Färbung φ_i von G_i mit $\varphi_i(v) = \alpha$ (für $i = 1, 2$) und $\varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2$ wäre eine L-Färbung von G, im Widerspruch dazu, dass (G, L) ein unfärbbares Paar ist. Somit gilt also $L(v) = C_1 \cup C_2$. Für den signierten Untergraphen G_i $(i = 1, 2)$ definieren wir die Listenzuweisung L_i durch

$$L_i(u) = \begin{cases} L(u) & \text{für } u \in V(G_i) \setminus \{v\}, \\ C_i & \text{für } u = v. \end{cases}$$

Aufgrund der Wahl von C_i ist G_i nicht L_i-färbbar. Da (G, L) ein unfärbbares Paar ist, gilt $|L_i(u)| = |L(u)| \geq d_G(u) = d_{G_i}(u)$ für alle $u \in V(G_i) \setminus \{v\}$. Der signierte Graph G_i ist nicht L_i-färbbar; also folgt aus Satz 3.2, dass $|C_i| = |L_i(v)| \leq d_{G_i}(v)$ ist. Wegen $L(v) = C_1 \cup C_2$ folgt weiterhin $|C_1| + |C_2| \geq |C_1 \cup C_2| = |L(v)| \geq d_G(v) = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v)$, also $|L_i(v)| = |C_i| = d_{G_i}(v)$. Damit ist (G_i, L_i) ein unfärbbares Paar. Nach Induktionsvoraussetzung existiert dann für jeden Block $B \in \mathcal{B}(G_2)$ eine Listenzuweisung L_B derart, dass (B, L_B) ein unfärbbares Paar ist; ferner gilt $L_2(u) = \bigcup_{B \in B_u(G_2)} L_B(u)$ für alle $u \in V(G_2)$. Da $\mathcal{B}(G) = \mathcal{B}(G_2) \cup \{G_1\}$ ist, schließen wir, dass die Aussage auch für das unfärbbare Paar (G, L) gilt. Damit ist der Beweis abgeschlossen. ■

Es sei G ein zusammenhängender signierter Graph und es sei $f : V(G) \to \mathbb{N}$ mit $f(v) = d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$. Mit den in diesem Abschnitt bewiesenen Ergebnissen sind wir in der Lage, die Klasse aller signierten Graphen anzugeben, die nicht f-listenfärbbar sind.

Satz 3.6. *Es sei G ein zusammenhängender signierter Graph und es sei f die Abbildung mit $f(v) = d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$. Genau dann ist G nicht f-listenfärbbar, wenn jeder Block von G ein Baustein ist.*

Beweis: Ist jeder Block von G ein Baustein, so folgt durch Induktion nach Anzahl der Blöcke von G aus den Lemmata 3.3 und 3.4, dass es eine Listenzuweisung L mit $|L(v)| = d_G(v)$ gibt, sodass (G, L) ein unfärbbares Paar ist. Wegen $f(v) = d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$ ist G also nicht f-listenfärbbar.

Ist G nicht f-listenfärbbar, so existiert eine Listenzuweisung L mit $|L(v)| = d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$, sodass G nicht L-färbbar ist. Dann ist (G, L) offensichtlich ein unfärbbares Paar und Satz 3.2 impliziert, dass alle Blöcke von G Bausteine sind. ■

Abschließend soll es unser Ziel sein, den Satz von Brooks [2] auf Listenfärbungen signierter Graphen auszuweiten.

Satz 3.7. *Ist G ein zusammenhängender signierter Graph, welcher kein Baustein ist, so ist $\chi^{\ell}_{\pm}(G) \leq \Delta(G)$.*

Beweis: Wir beweisen den Satz indirekt. Angenommen, für einen zusammenhängenden signierten Graphen G, welcher kein Baustein ist, gilt $\chi^{\ell}_{\pm}(G) > \Delta(G)$. Dann gibt es eine Δ-Listenzuweisung L von G, mit $\Delta = \Delta(G)$, für die G keine L-Färbung besitzt. Demnach ist (G, L) ein unfärbbares Paar und aus Satz 3.2 folgt, dass G ein Δ-regulärer Graph ist, dessen Blöcke alle Bausteine sind. Da Bausteine regulär sind, ist dann G selbst ein Block und somit ein Baustein, im Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes. ■

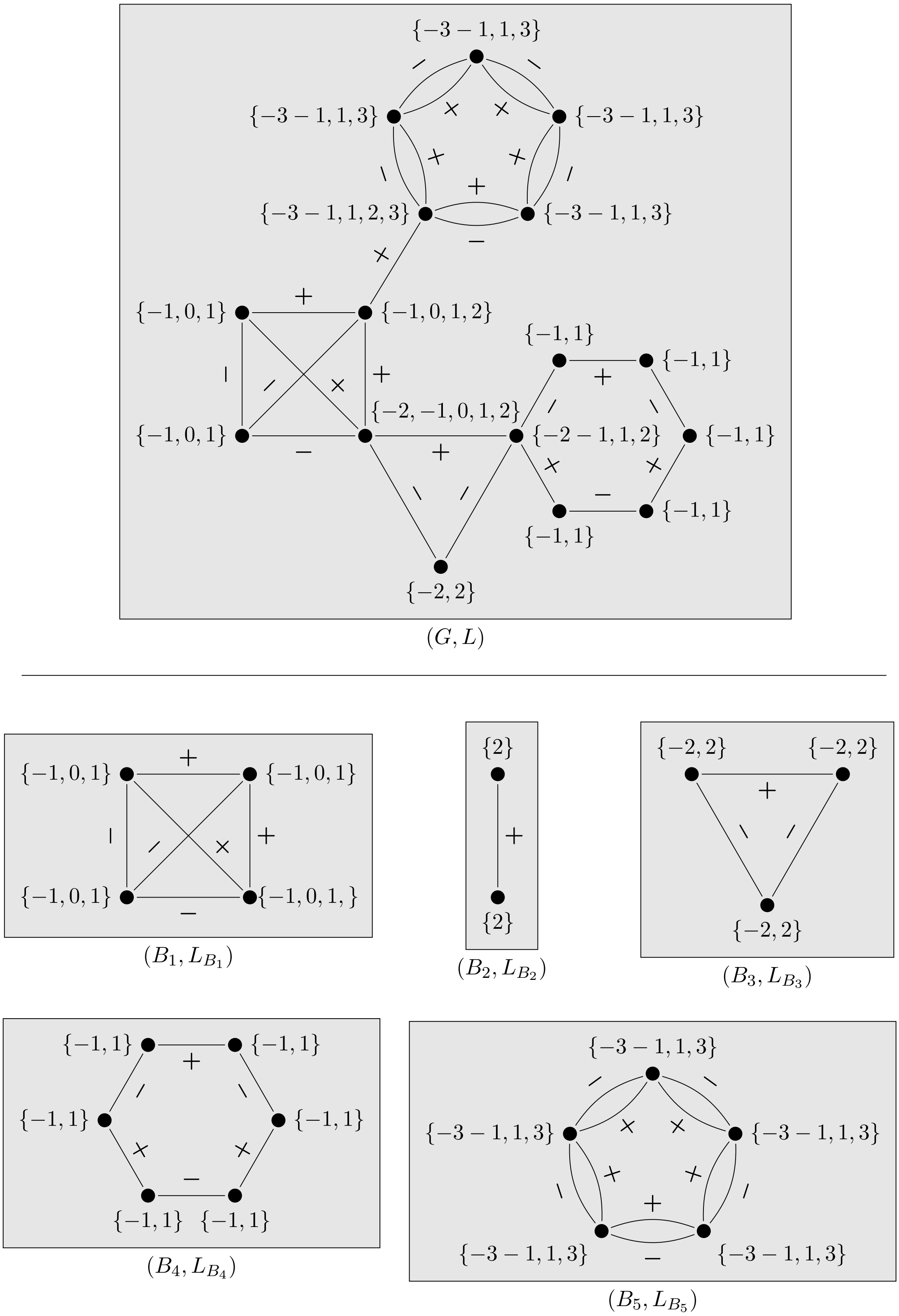


Abbildung 3.3: Konstruktion von Listenzuweisungen für die einzelnen Blöcke von (G, L).

Kapitel 4

Listenkritische signierte Graphen

Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden die Klassen der kritischen und listenkritischen signierten Graphen eingeführt. So werden wir zunächst einige grundlegende Eigenschaften dieser erläutern und schließlich, im zweiten Abschnitt, eine Schranke für die minimale Anzahl von Kanten in einem schlichten listenkritischen signierten Graphen beweisen. Den Abschluss bildet ein kurzer Exkurs zu toroidalen signierten Graphen, bei denen die Schranke Anwendung findet.

4.1 Kritische und listenkritische signierte Graphen

In der Graphentheorie versteht man unter einem **k-kritischen** Graphen G einen Graphen mit chromatischer Zahl k, dessen echte Untergraphen alle eine kleinere chromatische Zahl besitzen, als G selbst. Formal ausgedrückt, bedeutet das

$$\chi(H) < \chi(G) = k \text{ für alle } H \subset G.$$

Wir wollen nun analog auch für signierte Graphen die kritischen signierten Graphen einführen: Ein signierter Graph G heißt **k-kritisch**, falls für jeden echten signierten Untergraphen H von G gilt

$$\chi_{\pm}(H) < \chi_{\pm}(G) = k.$$

Des Weiteren heißt ein signierter Graph G **kritisch**, falls ein $k \geq 0$ existiert, sodass G k-kritisch ist. Mit $\mathrm{Crit}_{\pm}(k)$ wollen wir für $k \geq 0$ in Zukunft die Klasse aller k-kritischen signierten Graphen bezeichnen. Offenbar ist jeder Baustein B ein kritischer Graph mit

$\chi_\pm(G) = \Delta(G)+1$. Dies folgt im Wesentlichen aus Lemma 3.3 und aus Satz 3.7. Insbesondere ist also der balancierte vollständige Graph mit k Ecken k-kritisch. Es gilt $\mathrm{Crit}_\pm(0) = \varnothing$ und $\mathrm{Crit}_\pm(1) = \{K_1\}$; die Menge $\mathrm{Crit}_\pm(2)$ setzt sich zusammen aus dem positiven signierten K_2 und dem negativen signierten K_2.

Proposition 4.1. *Ein signierter Graph ist genau dann* 3*-kritisch, wenn G ein balancierter Kreis ungerader Länge oder ein unbalancierter Kreis gerader Länge ist.*

Beweis: Ist G ein balancierter Kreis ungerader Länge, oder ein unbalancierter Kreis gerader Länge so impliziert Satz 2.7, dass $\chi_\pm(G) = 3$ gilt. Andererseits erfüllt jeder echte signierte Untergraph H von G trivialerweise $\chi_\pm(H) \leq 2$; G ist also 3-kritisch. Sei nun G ein beliebiger 3-kritischer Graph. Enthält G keinen balancierten Kreis ungerader Länge und keinen unbalancierten Kreis gerader Länge, so ist G antibalanciert und aus Satz 2.7 folgt $\chi_\pm(G) \leq 2$, ein Widerspruch. Es muss also einen Untergraphen H von G geben, der ein balancierter Kreis ungerader Länge oder ein unbalancierter Kreis gerader Länge ist. Da für diesen $\chi_\pm(H) = 3$ gilt und G 3-kritisch ist, sind H und G identisch. ■

Bei der Untersuchung von Färbungsproblemen für signierte Graphen können wir uns häufig auf die Untersuchung kritischer signierter Graphen beschränken. Dies ergibt sich aus der folgenden einfachen Überlegung.

Proposition 4.2. *Jeder signierte Graph G enthält einen kritischen signierten Untergraphen G' mit $\chi_\pm(G) = \chi_\pm(G')$.*

Beweis: Für den Beweis betrachten wir einen minimalen signierten Untergraphen G' von G mit $\chi_\pm(G') = \chi_\pm(G)$. Dann gilt für jeden echten signierten Untergraphen H von G' natürlich $\chi_\pm(H) < \chi_\pm(G')$. Also ist G' der gesuchte kritische Untergraph von G. ■

Ein erwähnenswerter Unterschied zwischen kritischen Graphen und kritischen signierten Graphen ist der folgende. Für einen k-kritischen Graphen G gilt:

$$\chi(G - s) = k - 1$$

für alle $s \in V(G) \cup E(G)$ von G; für einen k-kritischen signierten Graphen G jedoch nur

$$k - 2 \leq \chi_\pm(G - s) \leq k - 1$$

für alle $s \in V(G) \cup E(G)$. Der Fall $\chi_\pm(G - s) = k - 2$ tritt beispielsweise ein, wenn man aus dem k-kritischen Graphen $G = 2K_l$ mit $k = 2l - 1$ eine beliebige Ecke $s \in V(G)$ entfernt.

Listenkritische signierte Graphen

Natürlich bietet es sich an, das Konzept der kritischen signierten Graphen auch auf Listenfärbungen auszuweiten. Wir nennen einen signierten Graphen G **L-kritisch**, bzw. **listenkritisch** für eine Listenzuweisung L von G, wenn jeder echte signierte Untergraph von G L-färbbar ist, G selbst aber nicht. Des Weiteren heißt ein Graph G **k-listenkritisch**, wenn es eine $(k-1)$-Listenzuweisung L gibt, sodass G L-kritisch ist.

Ist G ein k-kritischer Graph und ist L die Listenzuweisung mit $L(v) = M_{k-1}$ für alle $v \in V(G)$, so ist G offenbar L-kritisch. Jeder k-kritische Graph ist somit auch k-listenkritisch.

Wir wollen nun einige einfache Eigenschaften listenkritischer Graphen angeben. Zunächst überzeugen wir uns, dass listenkritische Graphen zusammenhängend sein müssen. Danach beweisen wir einen nützlichen Satz über die Struktur listenkritischer Graphen.

Proposition 4.3. *Jeder nichtleere listenkritische Graph ist zusammenhängend.*

Beweis: Sei G ein nichtleerer Graph, welcher bezüglich einer Listenzuweisung L listenkritisch ist. Wäre G nicht zusammenhängend, so besäße er mehrere Komponenten. Da jede Komponente K ein echter signierter Untergraph von G wäre, würde also eine L-Färbung φ_K von K existieren. Da zwischen den Komponenten keine Kanten verliefen, wäre dann aber die Vereinigung all dieser Listenfärbungen φ_K eine L-Färbung von G, ein Widerspruch. ■

Der nächste Satz wurde 1996 von Kostochka, Stiebitz und Wirth für unsignierte Hypergraphen bewiesen [10]; Teile ihres Beweises wurden in unseren übernommen.

Satz 4.4. *Es sei G ein bezüglich der Listenzuweisung L listenkritischer signierter Graph. Des Weiteren sei $H = \{v \in V(G) \mid d_G(v) > |L(v)|\}$, $N = V(G) \setminus H$ und $\varnothing \neq X \subseteq N$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $d_G(v) = |L(v)|$ *für alle* $v \in X$.

(b) *Alle Blöcke von $G[X]$ sind Bausteine.*

(c) *Ist L eine $(k-1)$-Listenzuweisung mit $k \geq 1$, so gilt $H \neq \varnothing$, oder G ist selbst ein Baustein. Enthält $G[X]$ einen signierten K_k, so ist G ein vollständiger balancierter Graph der Ordnung k.*

Beweis: Für den Beweis von (a) und (b) können wir uns auf den Fall beschränken, dass $G[X]$ zusammenhängend ist. Es sei $Y = V(G) \setminus X$. Wegen $X \neq \varnothing$ ist Y eine echte Teilmenge von $V(G)$. Da G L-kritisch ist, existiert also eine L-Färbung φ von $G[Y]$. Wir definieren für den verbleibenden, ungefärbten Untergraphen $G' = G[X]$ des signierten Graphen G die reduzierte Listenzuweisung L' durch

$$L'(v) = L(v) \setminus (\{\varphi(u) \mid u \in Y \cap N_G^+(v)\} \cup \{-\varphi(u) \mid u \in Y \cap N_G^-(v)\})$$

für alle $v \in V(G')$. Da G nicht L-färbbar ist, folgt ebenso, dass G' nicht L'-färbbar ist. Andernfalls würde eine L'-Färbung φ' von G' existieren und $\varphi' \cup \varphi$ wäre eine L-Färbung von G, ein Widerspruch. Aus $X \subseteq N$ können wir für alle $v \in X$ auf die Gleichung

$$|L(v)| \geq d_G(v) = d_{G'}(v) + d_G(v : Y)$$

und somit auf

$$|L'(v)| \geq |L(v)| - d_G(v : Y) \geq d'_G(v) \tag{4.1}$$

schließen. Folglich ist (G', L') ein unfärbbares Paar und aus Satz 3.2 folgt, dass alle Blöcke von G' Bausteine sind. Satz 3.2(a) impliziert ferner die Gleichheit in (4.1) und damit $|L(v)| = d_G(v)$ für alle $v \in X$. Somit sind (a) und (b) bewiesen.

Um die Gültigkeit von (c) zu zeigen, nehmen wir an, dass $|L(v)| = k-1$ für alle $v \in V(G)$ gilt. Ist $H = \varnothing$, dann gilt $G = G[N]$. Da G L-kritisch ist, ist G insbesondere zusammenhängend. Nach (a) und (b) ist G also regulär vom Grad $k-1$ und alle Blöcke von G sind Bausteine. Da alle Bausteine regulär sind, kann G dann aber nur aus einem Block bestehen und ist somit selbst ein Baustein.

Angenommen, $G[X]$ enthält einen vollständigen signierten Graphen K der Ordnung k. Dann haben sämtliche Ecken von K den Grad $k-1$ in G (wegen (a)) und somit muss K eine Komponente von G sein. Da der L-kritische Graph G zusammenhängend ist, folgt die Beziehung $K = G = G[X]$ und somit die Balanciertheit von G (wegen (b)). Damit ist der Beweis abgeschlossen. ■

Eine unmittelbare Folgerung aus dem obigen Satz ist die Tatsache, dass für den Grad jeder Ecke v eines L-kritischen Graphen G gilt $d_G(v) \geq |L(v)|$. Wir erhalten damit insbesondere die folgende Aussage.

Korollar 4.5. *Ist G ein k-listenkritischer signierter Graph mit $k \geq 1$, so gilt $\delta(G) \geq k-1$.*

Hautpunkte und Nebenpunkte

Durch Korollar 4.5 haben wir die Möglichkeit, eine sinnvolle Einteilung der Eckenmenge eines k-listenkritischen signierten Graphen G vorzunehmen. Die Ecken vom Grad $k-1$

bezeichnen wir als **Nebenpunkte** von G, die anderen Ecken als **Hauptpunkte** von G. Korollar 4.5 besagt dann, dass alle Hauptpunkte vom Grad wenigstens k sind. Wir nennen den durch die Nebenpunkte induzierten Untergraphen G_N den **Nebenpunktegraph** von G und den durch die Hauptpunkte induzierten Untergraphen G_H den **Hauptpunktegraph** von G. Die nächste Aussage ist eine einfache Folgerung aus Satz 4.4; in ihrer ursprünglichen Form wurde sie von Gallai [7] für kritische unsignierte Graphen bewiesen.

Korollar 4.6. *Der Nebenpunktegraph G_N jedes k-listenkritischen signierten Graphen G besitzt als Blöcke ausschließlich Bausteine.*

4.2 Listenkritische Graphen mit geringer Kantenzahl

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich schlichte listenkritische signierte Graphen. Für positive natürliche Zahlen k und n bezeichne $\mathrm{Crit}_{\pm}(k,n)$ die Klasse aller k-listenkritischen schlichten Graphen der Ordnung n. Ist H ein unsignierter k-listenkritischer Graph, so erhalten wir daraus einen k-listenkritischen signierten Graphen G, indem wir alle Kanten positiv signieren. Somit ist für $k \geq 4$ die Klasse $\mathrm{Crit}_{\pm}(k,n)$ genau dann nicht leer, wenn $n \geq k$ ist. Wir interessieren uns im Folgenden insbesondere für das Wachstum der Funktion

$$\mathrm{ext}(k,n) = \min\{|E(G)| \mid G \in \mathrm{Crit}_{\pm}(k,n)\},$$

wobei wir uns auf $k \geq 4$ beschränken. Die entsprechende Funktion für kritische unsignierte Graphen wurde erstmals von Dirac [4] und Gallai [7] untersucht. Aus Korollar 4.5 erhalten wir sofort die Ungleichung

$$\mathrm{ext}(k,n) \geq \frac{1}{2}(k-1)n.$$

Für $k \geq 4$ gilt die Gleichheit dann und nur dann, wenn $n = k$ ist; in diesem Fall ist der zugehörige extremale signierte Graph nur der balancierte vollständige Graph der Ordnung n. Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.4(c). Diesen Satz werden wir nun benutzen, um eine Verbesserung dieser Schranke nachzuweisen. Zuvor benötigen wir jedoch noch eine Aussage über die Klasse der Nebenpunktegraphen listenkritischer signierter Graphen.

Zu einer ganzen Zahl $k \geq 4$ bezeichne $\mathcal{T}_k$ die Klasse der signierten zusammenhängenden Graphen T für die gilt: $\mu(T) \leq 1$, $\Delta(G) \leq k-1$, alle Blöcke von T sind Bausteine und $\underline{T}$ ist kein vollständiger Graph der Ordnung k. Das nächste Lemma und der daraus folgende Satz sind Erweiterungen analoger Ergebnisse von Gallai [7] für kritische unsignierte Graphen auf listenkritische signierte Graphen.

Lemma 4.7. *Es sei $k \geq 4$. Dann gilt für jeden Graphen $T \in \mathcal{T}_k$:*

$$(k-2+\frac{2}{k-1})|V(T)|-2|E(T)| \geq 2.$$

Beweis: Im weiteren Verlauf sei

$$r = (k-2+\frac{2}{k-1})$$

und für $T \in \mathcal{T}_k$, sei $m(T)$ definiert durch

$$m(T) = r|V(T)| - 2|E(T)| = \sum_{v \in V(T)} \big(r - d_T(v)\big).$$

Sei nun $T \in \mathcal{T}_k$ beliebig. Unser Ziel ist es, durch Induktion nach Anzahl der Blöcke von T zu zeigen, dass $m(T) \geq 2$ gilt.

Ist $T = B$ ein Block, so ist $\underline{B}$ entweder ein vollständiger Graph der Ordnung b mit $1 \leq b \leq k-1$ und es gilt

$$m(B) = b(r-b+1) \begin{cases} \geq r & \text{für } 1 \leq b \leq k-2, \\ = 2 & \text{für } b = k-1, \end{cases}$$

oder $\underline{B}$ ist ein Kreis mit wenigstens 4 Ecken und wir erhalten $m(B) \geq (r-2)4 \geq r \geq 2$, da $k \geq 4$ und somit $r \geq 2$ vorausgesetzt wurde.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass T wenigstens zwei Blöcke hat. Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle.

Fall 1: *T enthält einen Endblock B mit $\underline{B} \neq K_{k-1}$.* In B gibt es genau eine Artikulation v von G. Wir definieren $T' = T - (V(B) \setminus \{v\})$. Da $V(T') \cap V(B) = \{v\}$ und $T = T' \cup B$ gelten, ist dann

$$m(T) = m(T') + m(B) - r.$$

Der Block B gehört zu $\mathcal{T}_k$ und wegen $\underline{B} \neq K_{k-1}$ gilt nach dem Induktionsanfang $m(B) \geq r$ und damit $m(T) \geq m(T')$. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf T' erhalten wir schließlich $m(T) \geq m(T') \geq 2$.

Fall 2: *Für jeden Endblock B von T gilt $\underline{B} = K_{k-1}$.* Es sei B ein beliebiger Endblock von T und es sei v die einzige Artikulation von T in B. Da $\underline{B} = K_{k-1}$ ist, T wenigstens 2 Endblöcke enthält und $\Delta(T) \leq k-1$ gilt, gibt es einen Block $B' \in \mathcal{B}(T)$ mit $\underline{B'} = K_2$, welcher v enthält. Der Graph $T' = T - V(B)$ gehört offensichtlich zu $\mathcal{T}_k$ und es gilt

$$m(T) = m(T') + m(B) - 2.$$

Nach Induktionsanfang ist $m(B) = 2$ und damit $m(T) = m(T')$. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung schließen wir, dass $m(T')$ wenigstens 2 ist und der Beweis ist abgeschlossen. ∎

Satz 4.8. *Ist $k \geq 4$ und $n \geq k+1$, so gilt* $\mathrm{ext}(k,n) \geq \frac{1}{2}(k - 1 + \frac{k-3}{k^2-3})\, n$.

Beweis: Für den Beweis genügt es, einen beliebigen k-listenkritischen signierten Graphen G der Ordnung n zu betrachten und die Ungleichung

$$2|E(G)| \geq \big(k - 1 + \frac{k-3}{k^2-3}\big)n \tag{4.2}$$

nachzuweisen. Es sei $V = V(G)$ und für $X \subseteq V$ sei $e(X) = |E(G[X])|$. Weiterhin sei $H = \{v \in V(G) \mid d_G(v) \geq k\}$ und $N = \{v \in V(G) \mid d_G(v) = k-1\}$. Ist $N = \varnothing$, dann ist $2e(V) \geq k|V|$ und die Ungleichung 4.2 ist erfüllt. Im Folgenden sei also $N \neq \varnothing$. Aus Satz 4.4 folgt $V = H \cup N$ und jeder Block von $G[N]$ ist ein Baustein. Da $n \geq k+1$ gilt, ist G kein vollständiger balancierter Graph der Ordnung k und aus Satz 4.4(c) folgt, dass $G[N]$ keinen signierten K_k als Untergraphen enthält. Da $\Delta(G[N]) \leq k-1$ und $\mu(G) \leq 1$ gilt, schließen wir somit, dass jede Komponente von $G[N]$ zur Klasse $\mathcal{T}_k$ gehört. Das Lemma 4.7 impliziert dann

$$(k - 2 + \frac{2}{k-1})|N| - 2e(N) \geq 2.$$

Einerseits führt dies zu

$$\begin{aligned} 2e(V) &= 2e(H) + 2(k-1)|N| - 2e(N) \\ &\geq 2(k-1)|N| - 2e(N) \geq (k - \frac{2}{k-1})|N|. \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir

$$\begin{aligned} 2e(V) &= (k-1)|V| + |N| + \sum_{v \in H}(d_G(v) - k) \\ &\geq (k-1)|V| + |N| = k|V| - |N|. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die zweite Ungleichung mit $k - \frac{2}{k-1}$ und addieren wir die erste Ungleichung, so folgt

$$2e(V)\big(1+k-\frac{2}{k-1}\big) \geq k\big(k-\frac{2}{k-1}\big)|V|.$$

Dies ist äquivalent zu

$$2e(V)\big(\frac{k^2-3}{k-1}\big) \geq \big(\frac{(k-1)(k^2-3)+k-3}{k-1}\big)|V|$$

und somit zu

$$2e(V) \geq \big(k-1+\frac{k-3}{k^2-3}\big)|V|,$$

was unser Ziel war. ■

Der Grund, warum wir uns bei der Untersuchung der Funktion $\mathrm{ext}(k,n)$ auf schlichte signierte Graphen beschränkt haben, liegt zum Einen darin, dass wir obigen Satz im nächsten Abschnitt für die Untersuchung schlichter toroidaler Graphen benutzen wollen. Zum Anderen ist die Schranke aus dem obigen Satz für listenkritische signierte Graphen mit Mehrfachkanten nicht gültig. Dazu betrachten wir den Graphen $G = 2C_7$. Offenbar gilt für diesen $|E(2C_7)| = 14$ und $|V(2C_7)| = 7$. Des Weiteren ist G, wie leicht aus Satz 3.7 folgt, k-listenkritisch für $k = 5$. Ein Vergleich mit der Schranke aus Satz 4.2 ergibt

$$2|E(2C_7)| = 28 < (4+\frac{1}{11})\cdot 7 = (k-1+\frac{k-3}{k^2-3})|V(2C_7)|,$$

obwohl $n \geq k+1$ klarerweise erfüllt ist.

4.3 Toroidale signierte Graphen

Die Untersuchung der Funktion $\mathrm{ext}(k,n)$ für unsignierte kritische und listenkritische Graphen hat bereits eine Vielzahl von Arbeiten hervorgebracht. Der Grund liegt vor allem darin, dass gute untere Schranken für diese Funktion zu interessanten Färbungsresultaten führen. Wir wollen in diesem abschließenden Abschnitt unserer Arbeit eine kleine Anwendung von Satz 4.2 diskutieren. Dabei kommen wir nochmals auf einen fundamentalen Bereich der Färbungstheorie zu sprechen, nämlich Färbungen von Graphen auf Flächen. Die erste Frage, die sich ergibt, ist, ob es ein zum Vierfarbensatz analoges Resultat für signierte Graphen gibt. Für die Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst einen planaren signierten Graphen G. Dann ist $\chi_{\pm}(G) \leq 2\chi(\underline{G})-1 \leq 7$ (verwende Proposition 2.5 und Vierfarbensatz) und der Graph $G = 2K_4$ belegt, dass Gleichheit gelten kann (siehe Lemma 2.6). Für planare signierte Graphen mit Mehrfachkanten ist die Frage somit beantwortet.

Ist hingegen G ein schlichter planarer signierter Graph, so haben Máčajová, Raspaud und Škoviera [11] die Ungleichung $\chi_{\pm}(G) \leq 5$ gezeigt und Jin, Kang und Steffen [9] bewiesen $\chi^{\ell}_{\pm}(G) \leq 5$. Máčajová, Raspaud und Škoviera [11] stellten zudem die Vermutung auf, dass für schlichte planare signierte Graphen $\chi_{\pm} \leq 4$ gilt.

Bereits Heawood (siehe [12]) betrachtete Graphen auf beliebigen orientierbaren und nicht orientierbaren Flächen. Er bewies, dass es zu jeder Fläche Σ eine Zahl $H(\Sigma)$ gibt, sodass für jeden schlichten unsignierten Graphen G, welcher sich auf Σ kreuzungsfrei zeichnen lässt $\chi(G) \leq H(\Sigma)$ ist. Die Zahl $H(\Sigma)$ wurde ihm zu Ehren **Heawood-Zahl** getauft. Später bewies Dirac [5], dass die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn G einen vollständigen Graphen der Ordnung $H(\Sigma)$ enthält. Dazu benutzte er eine untere Schranke für die Anzahl der Kanten in einem kritischen Graphen, welche besser ist, als die in Satz 4.2 angegebene. Eine Listenversion des Satzes von Dirac wurde später von Böhme, Mohar und Stiebitz [1] bewiesen. Wir können dieses Resultat leider nicht auf schlichte signierte Graphen übertragen. Lediglich für den Torus ist unsere Schranke gut genug.

Satz 4.9. *Es sei G ein schlichter signierter Graph, welcher sich auf dem Torus kreuzungsfrei zeichnen lässt. Dann ist $\chi^{\ell}_{\pm}(G) \leq 7$ und die Gleichheit gilt genau dann, wenn G einen vollständigen balancierten K_7 enthält.*

Beweis: Aus Eulers Formel für toroidale Graphen (siehe [12]) folgt $\mathrm{col}(G) \leq 7$ und somit, wegen Lemma 3.1, $\chi^{\ell}_{\pm}(G) \leq 7$. Enthält G einen vollständigen balancierten K_7, so ist die Gleichheit evident. Es verbleibt also noch, den Fall zu betrachten, dass $\chi^{\ell}_{\pm}(G) = 7$ ist. Wir betrachten nun einen minimalen signierten Untergraphen G' von G mit $\chi^{\ell}_{\pm}(G') = \chi^{\ell}_{\pm}(G) = 7$. Dann gilt für jeden echten signierten Untergraphen H von G' klarerweise $\chi^{\ell}_{\pm}(H) < \chi^{\ell}_{\pm}(G') = 7$. Daraus folgern wir, dass G' ein 7-listenkritischer signierter Graph ist. Ist G' ein balancierter K_7, so ist nichts zu zeigen. Angenommen, G' ist kein balancierter K_7. Dann ist, da G' schlicht ist, $|G'| > 7$ und aus Satz 4.2 erhalten wir

$$2E(G') \geq (6 + \frac{4}{46})|G'|.$$

Da G' ein signierter Untergraph von G ist, lässt sich natürlich auch G' kreuzungsfrei auf den Torus zeichnen und aus Eulers Formel erhalten wir $2|E(G)| \leq 6|V(G)|$, ein Widerspruch. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ∎

Literaturverzeichnis

[1] Böhme, T., Mohar, B. und Stiebitz, M., Dirac's map-colour theorem for choosability. *J. Graph Theory* **32** (1999) 311-326. 34

[2] Brooks, R. L., On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc., Math. Phys. Sci.* **37** (1941) 194–197. 1, 11, 24

[3] Diestel, R., *Graphentheorie.* 4. Auflage. Springer 2010. 1, 3, 10, 12

[4] Dirac, G. A., A theorem of R.L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger. *Proc. London Math. Soc.* **7** (1957) 161–195. 30

[5] Dirac, G. A., Short proof of a map colour theorem. *Canad. J. Math* **9** (1957) 225–226. 34

[6] Erdős P., Rubin, A. L. und Taylor, H., Choosability in graphs. *Congr. Numer.* **XXVI** (1979) 125–157. 1, 2, 12, 15

[7] Gallai, T., Kritische Graphen I.. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **8** (1963) 165–192. 2, 30

[8] Harary, F., On the notation of balance of a signed graph. *Michigan Math. J.* **2** (1953-1954) 143–146. 1, 4, 6

[9] Jin, L., Kang, Y. und Steffen, E., Choosability in signed planar graphs. *arXiv:1502.04561* 34

[10] Kostochka, A. V., Stiebitz, M. und Wirth, B., The color theorems of Brooks and Gallai extended. *Discrete Math.* **191** (1996) 125–137. 2, 28

[11] Máčajová, E., Raspaud, A. und Škoviera, M., The chromatic number of a signed graph. *arXiv:1412.6349* 2, 3, 8, 9, 10, 11, 34

[12] Mohar, B. und Thomassen, C. , *Graphs on Surfaces.* Johns Hopkins University Press, 2001. 34

[13] Schweser, T. und Stiebitz, M. , Degree choosable signed graphs. *arXiv:1507.04569* 2

[14] Vizing, V. G. , Vertex coloring with given colors (auf Russisch). *Diskret. Analiz.* **29** (1976) 3–10. 1, 12

[15] Zaslavsky, T. , Chromatic invariants of signed graphs. *Discrete Math.* **42** (1982) 287–312. 1, 7

[16] Zaslavsky, T. , How colorful the signed graph?. *Discrete Math.* **52** (1984) 279–284. 1, 6, 7

[17] Zaslavsky, T. , Signed graph coloring. *Discrete Math.* **39** (1982) 215–228. 1, 7