Technische Universität Ilmenau SS 2019
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Michael Stiebitz

Leitfaden für die mündliche Prüfung Mathematik für Physiker

1 Grundlagen (Kapitel I)

1. Was versteht man unter einen Abbildung $f : X \to Y$? Wann ist eine solche Abbildung injektiv, surjektiv, bzw. bijektiv?
2. Wie ist die Komposition $g \circ f$ der Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ definiert?. Wann ist g die Umkehrabbildung von f, also $g = f^{-1}$?

2 Lineare Algebra (Kapitel II)

1. Was sind Ringe und Körper? Welche Körper kennen Sie? Rechnen mit komplexen Zahlen: algebraische und exponetielle Form komplexer Zahlen.
2. Es sei V eine Menge und K ein Körper. Für die Elemente von V sei eine Addition $a, b \in V \to a + b \in V$ sowie eine skalare Multiplikation $a \in V, \alpha \in K \to \alpha \cdot a \in V$ gegeben. Welche Eigenschaften müssen diese Operationen erfüllen, damit V ein Vektorraum über K ist?
3. Welche Standardvektorräume kennen Sie?
4. Schauen Sie sich folgende Begriffe für einen Vektorraum V über einem Körper K an: Linearkombination, lineare Hülle Erzeugendensystem, Basis, Dimension, lineare und affine Unterräume.
5. Es sei $C^0(I, \mathbb{R})$ die Menge der Funktionen $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche auf dem Intervall I stetig sind. Begründen Sie dass diese

Menge ein reeller Vektorraum ist. Von welchen Standardvektorraum ist dies ein linearer Unterraum?

6. Matrizenrechnung, Gauss-Jordan-Verfahren für Lineare Gleichungssysteme, Inverse Matrix

7. Lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$: Lösungsstruktur des homogenen bzw. inhomogenen Systems, Dimensionsformel für den Lösungsraum des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{o}$. Was besagt das Rangkriterium über die Lösbarkeit des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.

8. Es seien $\Gamma = \{\vec{r} \in K^n |\ A\vec{r} = \vec{b}\}$ die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS und $U = \{\vec{x} \in K^n |\ A\vec{x} = \vec{0}\}$ die Lösungsmenge des zugehörigen homegenen LGS. Man zeige, dass U eine linearer Unterraum und Γ ein affiner Unterraum des K-Vektorraumes K^n ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Γ und U?

9. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punktmengen

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{r} = \vec{b}\} \\ \Gamma_2 &= r_1 + [\vec{a}] \end{aligned}$$

gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie $\mathrm{rg}(A)$ und $\mathrm{rg}(A, \vec{b})$.
   (b) Ist $\Gamma_1 \neq \emptyset$? Falls ja, gebe man $\dim(\Gamma_1)$ an.
   (c) Gilt $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$? Gilt sogar die Gleichheit?

10. Lineare Abbildungen und allgemeine lineare Gleichungen: Es sei $\varphi : V \to W$ eine Abbildung und $b \in W$.

   (a) Wann heißt die Gleichung

$$\varphi(x) = b$$

   lineare Gleichung, d.h., was muss für V, W und φ gelten?

(b) Wenn diese Gleichung linear ist, welche Eigenschaft hat dann die Lösungsmenge $U = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0_W\}$ der homogenen linearen Gleichung?

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lösungsmenge $\Gamma = \{x \in V \mid \varphi(x) = b\}$ der inhomogenen linearen Gleichung und U?

11. Determinanten: Eigenschaften, Entwicklungssatz, Inversenformel, Cramersche Regel, Anwendung auf Linare Gleichungssysteme. Mit Hilfe der Determinante von A beantworte man folgende Fragen: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$$

invertierbar? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ eine nicht-triviale Lösung?

12. Euklidische Vektorräume: Abstand, Norm, Skalarprodukt, Winkel, Orthogonalsystem, Orthogonales Komplement, Orthogonale Projektionen, Abstand Punkt-affiner Unterraum.

13. Für den reellen Vektorraum $V = C^0(I, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ betrachten wir die Abbildung $<, >: V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Begründen Sie, warum $<, >$ ein Skalarprodukt auf V ist.

14. Im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^4$ sei die Ebene

$$\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$$

gegeben mit

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Punkt

$$\vec{r}_1 = (2,1,1,2)^T.$$

(a) Für das orthogonale Komplement $U^\perp$ des linearen Unterraumes $U = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ gebe man eine Basis und die Dimension an.

(b) Man berechne den Fußpunkt $\vec{r}_F$ des Lotes von $\vec{r}_1$ auf Γ sowie den Lotvektor $\vec{d}$ von $\vec{r}_1$ auf Γ.

(c) Man gebe den Abstand $d(\vec{r}_1, \Gamma)$ von $\vec{r}_1$ und Γ an.

15. Gegeben seien die vier Punktpaare

$$\begin{array}{rclcrcl} (x_1,y_1) & = & (-1,0) & \qquad & (x_2,y_2) & = & (0,1) \\ (x_3,y_3) & = & (2,2) & & (x_4,y_4) & = & (3,5) \end{array}$$

Gesucht ist eine Ausgleichsgerade, d.h. eine Gerade

$$p(x) = a \cdot x + b,$$

für welches die quadratische Abweichung

$$D = (y_1 - p(x_1))^2 + ... + (y_5 - p(x_5))^2$$

den kleinsten Wert annimmt. Man gebe diesen Wert W an und berechne $p(8)$.

16. Im euklidischen Standardraum $\mathbb{E}^3$ seien die Vektoren $\vec{a} = (0,1,11)^T$, $\vec{b} = (1,1,-5)^T$ und $\vec{c} = (3,2,1)^T$ gegeben.

a) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $< \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} >$, $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ und $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge

$$\Gamma = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{c} \times \vec{r} = \vec{b}\}$$

an. Ist Γ ein affiner Unterraum? Welche Dimension hat Γ?

c) Für die Ebene $\Gamma' = \vec{r}_0 + [\vec{a}, \vec{b}]$ mit $\vec{r}_0 = (-1,0,1)^T$ bestimme man einen Normalenvektor $\vec{n}$ sowie die Hessesche Form.

d) Die Ebene Γ' teilt den Raum $\mathbb{R}^3$ in zwei Hälften (Halbräumen). Man untersuche, ob die Punkte $\vec{r}_1 = (0,1,1)^T$ und $\vec{r}_2 = (1,1,0)^T$ im selben Halbraum bzgl. Γ' liegen.

17. Lineare Abbildungen, Orthogonale Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Welche Besonderheiten treten bei symmetrischen Matrizen auf?

18. Im $\mathbb{E}^3$ sei die Ursprungsebene $\Gamma = [\vec{a}, \vec{b}]$ gegeben mit $\vec{a} = (1, 1, -1)^T$ und $\vec{b} = \vec{e}_3$. Weiterhin sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an Γ.

    a) Geben Sie $L(\vec{o})$, $L(\vec{a})$, $L(\vec{b})$ und $L(\vec{a} \times \vec{b})$ an.
    b) Bestimmen Sie die Matrizendarstellung von L, d.h., eine Matrix M mit $L(\vec{x}) = M\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
    c) Für den Punkt $\vec{x} = \vec{e}_1$ bestimme man $L(\vec{x})$ sowie den Abstand $d(\vec{x}, \Gamma)$.

19. Quadratische Gleichungen und Hauptachsentransformation. Für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$$

bestimme man die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und die zugehörigen (reellen) Eigenräume $E(A, \lambda)$. Für die quadratische Gleichung

$$-x^2 + 6xy + 7y^2 = 16$$

in den Koordinaten $\vec{x} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ führe man die Hauptachsentransformation durch mit den neuen Koordinaten $\vec{u} = (u, v)^T \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie die zugehörige Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ sowie die transformierte quadratische Gleichung an und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der x-y-Ebene.

20. Grundbegriffe der Topologie: Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $D \subseteq V$. Was versteht man unter der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ eines Punktes a aus V? Was sind innere Punkte bzw. Randpunkte von D? Wann ist D offen bzw. abgeschlossen?

3 Differentialrechnung (Kapitel III)

3.1 Folgen und Reihen

1. Grenzwertregeln für Folgen (a_n) in $\mathbb{E}^1$: Wie ist $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ definiert?. Welche Grenzwertregeln kennen Sie? Welche Unbe-

stimmeten Ausdrücke kennen Sie?. Wan besitzen monnotone Folgen einen endlichen Grenzwert? Man untersuche die folgenden reellen Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a)\quad a_n = \frac{3n^2 - \sqrt{n}}{4n^2 + 5n + 1} \qquad b)\quad a_n = (1 - \frac{3}{5n})^{4n} \qquad c)\quad a_n = \sqrt[n]{4n^2}$$

2. Wann ist (a_n) eine Cauchyfolge? Was besagt das Cauchykriterium?

3. Man untersuche die folgenden Reihen $\sum a_k$ auf Konvergenz:

$$a)\quad a_k = \frac{k}{k+1} \qquad b)\quad a_k = \frac{(-1)^k \cdot 2}{k^3} \qquad c)\quad a_k = \frac{3^k}{k!}$$

4. Potenzreihen, Konvergenzintervall: Gegeben sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{81^k}(x-2)^{4k}$$

   (a) Bestimmen Sie das offene Konvergenzintervall I der Potenzreihe. Wie sieht es in den Randpunkten von I aus?

   (b) Man gebe die Ableitungen $f^{(k)}(2)$ für $k = 40, 41, 42, 43, 44$ an (siehe Taylorreihen).

5. Wie ist die Konvergenz von Folgen $x = (x^{(n)})$ in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ definiert? Was versteht man unter Banachräumen bzw. Hilberträumen?

6. Im Standardraum $\mathbb{E}^2$ sei die Punktfolge $(x^{(n)})$ gegeben mit $x^{(n)} = (2 + \frac{1}{n}, \sqrt[n]{n})^T$. Welchen Grenzwert besitzt diese Folge?

3.2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

1. Es sei $f : D \subseteq V \to W$ eine Abbildung zwischen den normierten Räumen $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ und es sei $a \in \mathrm{cl}(D) = D \cup \mathrm{bd}(D)$. Wie ist $\lim_{x \to a, D} f(x) = b$ definiert? Wann ist die Funktion f stetig im Punkt $a \in D$? Wann ist f stetig auf D. Wie lautet das ε-δ-Kriterium für die Stetigkeit? Wann ist f gleichmäßig stetig auf D? Wann ist f L-stetig auf D.

2. Grenzwerte und Stetigkeit von Fuktionen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, Einseitige Grenzwerte. Für welche $A, B \in \mathbb{R}$ ist die Fkt. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für} \quad x < 0 \\ \sqrt{x+1} + Ax + B & \text{für} \quad 0 \leq x < 3 \\ 1 + \cos(\frac{x-3}{2}) & für \quad 3 \leq x \end{cases}$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig? (Begründen Sie!)

3. Was besagt der Banachsche Fifpunktsatz für eine Abbildung $g : D \subseteq V \to V$ von einem Banachraum $(V, \|\cdot\|)$ in sich selbst?

4. Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Abbildung vom Standardraum $\mathbb{E}^n$ ind den Standardraum $\mathbb{E}^1$. Welche Eigenschaften müssen f und D erfüllen, damit sowohl $\min_{x \in D} f(x)$ als auch $\max_{x \in D} f(x)$ existieren? Was besagt der Zwischenwertsatz für Funktionen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$?

3.3 Differentialrechnung

1. Totale Ableitung von Funktionen $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Wie ist die totale Ableitung $f'(a) = A$ definiert? Was ist das Differential $Df(a)$? Was besagt die allgemeine Kettenregel für Funktionen h mit $h(x) = f(g(x))$.

2. Wie lässt sich die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einen inneren Punkt x des Intervalls I als Grenzwert eines Differenzquotienten drstellen. Welche geometrische Bedeutung hat dann $f'(x)$? Wie lauten die wichtigen Regeln für das Differenzieren solcher Funktionen: Summenregel, Linearität, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{x^2} \sin(5x + 1)$$

   bestimme man die 1. und 2. Ableitung.

3. Mit Hilfe der Grenzwertregeln von l'Hospital bestimme man
   (a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{2x}\right)^{\sin 4x}$

4. Ableitungsregeln für Funktionen $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Wie ist die Ableitung $D_u f(x)$ von f an der Stelle $x \in E$ in Richtung von $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definiert. Was ist der Gradient $\nabla f(x)$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der totalen Ableitung $f'(x)$, der Richtungsableitung $D_u f(x)$ und dem Gradienten $\nabla f(x)$?

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{-x} \cos y$.

   (a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f.

   (b) Geben Sie den Gradienten $\text{grad} f(x, y)$ von f an.

   (c) Für welche Richtung $\underline{u}$ hat die Richtungsableitung $D_u f(a)$ der Funktion f im Punkte $a = (0, 0)$ den größten bzw. den kleinsten Wert? Geben Sie jeweils den zugehörigen Wert $D_u f(a)$ an.

   (e) Für die Höhenlinie der Funktion f, die durch den Punkt $a = (0, 0)$ verläuft (d.h. $f(x, y) = f(0, 0)$), gebe man eine Gleichung für die Tangente im Punkt a an. Wie groß ist die Richtungtsableitung $D_u f(a)$, falls u ein Richtungsvektor der Tangente ist?

   (d) Geben Sie die Hesse-Matrix $H_f(x, y)$ an.

   (e) Ist $f \in C^2(E, \mathbb{R})$? Welche Eigenschaft hat die Hesse-Matrix?

   (f) Geben Sie die quadratische Approximation $T_2 f(x, y)$ von f im Punkt $a = (0, 0)$ an.

6. Ableitungsregeln für Funktionen $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Wecher Zusammenhang besteht zwischen der totalen Ableitung und den partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen von f? Was ist die Jacobimatrix?. Für $f(x, y) = (xy, x+y^2, x^2y)T$ gebe man die totale Ableitung $f'(x, y)$ an. Weiterhin gebe man die Tangentialfunktion $T_1 f(x, y)$ von f an der Stelle $a = (1, 1)$ an.

7. Wie lautet die Kettenregel für die partiellen Ableitungen $D_k F(u)$ eine Funktion F der Form

$$F(u) = F(u_1, \ldots, u_m) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

mit

$$x_i = g_i(u_1, \ldots, u_m)$$

8. Taylorpolynome und Taylorreihe einer Fuktion: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$ gebe man das 2te Taylorpolynom $T_2(x)$ mit dem Zentrum $x_0 = 0$ an. Mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange gebe man eine Abschätzung für den Betrag des 2ten Restgliedes $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ an, falls $0 \leq x$ ist.

9. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$. Man bestimmen das globale Maximum und das globale Minimum von f auf dem Intervall $I = [0, 2\pi]$.

10. Man bestimme alle lokalen Extremalstellen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 + 4y^3 - 25x - 12y + 10$.

11. Nach der Multiplikatorregel von Lagrange bestimme man alle Punkte, die als lokale Extremwertstellen für die Funktion f unter der jeweiligen Nebenbedingung in Frage kommen.

    (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ mit $5x^2 + 5y^2 - 8xy = 18$

    (b) $f(x, y, z) = xyz$ mit $x + y + z = 9$.

12. Es sei $P = (0, a)$ ein Punkt in der Ebene. Bestimmen Sie die Punkte $Q = (x, y)$ der Parabel $y = 4x^2$, die zu P den kleinsten Abstand haben.

13. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2y + 2y^2 + 2x^2 + 10$$

und die Menge

$$D = \{(x, y)| - 1 \leq x \leq 1, -1, \leq y \leq 1\}.$$

Bestimmen Sie die globalen Extremwertstellen und die globalen Extremwerte von f auf D.

4 Integralrechnung (Kapitel IV)

1. Welcher Zusammanhang besteht zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integral einer Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ über dem Intervall $I = [a, b]$.

2. Integrationstechniken: partielle Integration, Substitution, Partialbruchzerlegung, Uneigentliche Integrale. Berechnen Sie

   (a) das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x}{(x-1)(x+2)^2}dx$

   (b) das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}dx$

3. Was versteht man unter einen ebenen bzw. räumlichen Normalbereich?

4. Erläutern Sie die Berechnung ebener bzw. räumlicher Bereichsintegrale durch Doppel -bzw. Dreifachintegrale.

5. Es sei $I = \iint_B f(x,y)db$ wobei gilt: $f(x,y) = x + y^2$, und B wird durch $x = \frac{y^2}{4}$ und $y = 2x - 12$ begrenzt. Man berechne I durch ein Doppelintegral wobei die Integrationsreihenfolge einmal $db = dxdy$ und einmal $db = dydx$ sein soll.

6. Man Erläutere die Berechnung eines ebenen Bereichsintegrals $I = \iint_B f(x,y)db$ mit Hilfe einer Koordinatentransformation der Form $x = x(u,v), y = y(u,v)$. Wie lautet die entsprechende Formel für räumliche Bereichsintegrale.

7. Was versteht man unter Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten? Berechnen Sie das Bereichsintegral $I = \iint_B f(x,y)db$ mit Hilfe der Polarkoordinaten, wobei gilt $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ und $B = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \leq 3,\ y \geq 0\}$.

8. Was sind Wege γ im $\mathbb{E}^n$ und was sind Kurven Γ im $\mathbb{E}^n$. Was ist eine Jordankurve? Was sind glatte bzw. stckweise glatte Jordankurven?. Wie sind Integrale über Wege von Skalarfeldeln bzw. Vektorfeldern definiert und wie berechnet man diese?

9. Was versteht man unter einem Kurvenintegral 1.Art

$$\int_\Gamma u(\vec{x})\ ds$$

bzw. einem Kurvenintegral 2.Art

$$\int_\Gamma \vec{v}(\vec{x})\, d\vec{x}$$

mit $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und wie erfolgt die Berechnung dieser Kurvenintegrale mittels einer Parameterdarstellung $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

10. Welche Eigenschaften haben Kurvenintegrale 1.Art bzw. 2.Art? Welche geometrischen bzw. physikalischen Deutungen haben diese Kurvenintegrale?

11. Erläutern Sie die Begriffe: Potentialfeld sowie Wegunabhängigkeit eines Weg- bzw. Kurvenintegrals 2.Art. Was besagt die Integrabilitätsbedingung sowie der Hauptsatz über Potentialfelder?

12. Für die beiden Vektorfelder $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ des $\mathbb{R}^2$ mit $\vec{x} = (x, y)^T$ und

    (a) $\vec{v}(x, y) = (x^2 - y, y^2 + x)^T$ und
    (b) $\vec{v}(x, y) = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3yx^2)^T$,

    berechne man jeweils die Kurvenintegrale 2.Art

    $$\int_\Gamma \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x}$$

    wobei $\Gamma = \Gamma_i$ $(i = 1, 2)$ eine der folgenden Kurven ist, die jeweils den Anfangspunkt $A = (2, 0)^T$ sowie den Endpunkt $E = (-2, 0)^T$ haben und doppelpunktfrei sind.

    (a) Γ_1 ist die Strecke $\overline{AE}$.
    (b) Γ_2 sei die Verbindung von A und E entlang dem oberen Halbkreis $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$.

    Weiterhin überprüfe man, welche der beiden Vektorfelder $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ ein Potentialfeld ist und bestimme gegebenenfalls ein zugehöriges Potential $u = u(\vec{r})$.

13. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = (axy + e^z,\ x^2 + z,\ y + xe^z)^T$$

des $\mathbb{R}^3$ mit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Man berechne $rot\,\vec{v}$.

(b) Für welche Werte von a ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Man bestimme dann ein zugehöriges Potential $u = u(x,y,z)$ und berechne das Integral

$$I = \int_\Gamma \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

wobei Γ eine Kurve mit dem Anfangspunkt $A = (2,1,0)^T$ und dem Endpunkt $E = (2,0,5)^T$ ist.

14. Was versteht man unter einem Oberflächenintegral 1.Art

$$\int_F u(x,y,z)\, dA$$

bzw. einem Oberflächenintegral 2.Art

$$\int_F \vec{v}(x,y,z)\, d\vec{A}$$

und wie erfolgt die Berechnung dieser Oberflächenintegrale mittels einer geeigneten Parameterdarstellung $\Phi : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ der Fläche F mit $\Phi = \Phi(u,v)$.

15. Welche geometrischen und physikalischen Deutungen haben Oberflächenintegrale 1.Art bzw. 2.Art.

16. Es sei F die reguläre Fläche mit der Parameterdarstellung

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ -uv \\ v^2/2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (u,v)^T \in B$$

wobei gilt

$$B = \{(u,v)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le u \le 0,\ u \le v \le -u\}.$$

(a) Man berechne die Tangentenvektoren Φ_u und Φ_v sowie den Normalenvektor $N_\Phi = \Phi_u \times \Phi_v$ von F.

(b) Ist F tatsächlich eine reguläre Fläche?

(c) Man bestimme den Flächeninhalt $A(F)$.

(d) Man berechne das Oberflächenintegral $\int_F \vec{v} \cdot d\vec{A}$ für das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = (x, 0, 0)^T$.

17. Wie lauten die Integralsätze von Gauß und Stokes? Welche physikalischen Deutung besitzen diese Sätze?