Optimalsteuerprobleme unter Zustandsrestriktionen

Harald Abeßer, Joachim Steigenberger*

August 2005, revidierte Fassung: August 2009

Abstract In this paper, the authors consider a class of finite dimensional optimal control problems with state restrictions. These investigations are aimed at utilizable necessary optimality conditions. The purpose of the paper is twofold: first, to prepare a starting point for further investigations on a topic from mechanics begun in [11] and, second, finally to have a written material that can be used in teaching this somewhat unwieldy subject. The optimality conditions are derived by transforming the control problem into a Bolza-type variational problem and then using techniques coming from classical literature in Calculus of Variations. The results are applied to some modified and generalized problems of Dido type. The concluding chapter addresses variational problems and integral principles from Analytical Mechanics under state constraints.

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden notwendige Bedingungen für ein relativ allgemeines Optimalsteuerproblem mit Restriktionen $S(t,x) \geq 0$ für die Zustandsvariablen x bei beliebigem Relativgrad h von S bereitgestellt und bewiesen.
Für die Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen wird das Optimalsteuerproblem in ein spezielles klassisches Bolzaproblem der Variationsrechnung überführt. Für dieses werden dann die Strukturen und Beweistechniken der Variationsrechnung genutzt.
Die Arbeit verfolgt mehrere Ziele:
- Bereitstellung der mathematischen Grundlagen und Bedingungen für die spätere Behandlung von Aufgaben aus der Biomechanik in Fortsetzung der Untersuchungen in [11].
- Anwendung in der Lehre. Optimalsteuerprobleme mit Zustandsrestriktionen lassen sich wegen des aufwendigen Kalküls zeitlich kaum in eine allgemeine einsemestrige Vorlesung zur Optimalen Steuerung vernünftig integrieren. Die Benutzung eines Preprints erlaubt Einsichten in Beweisideen und Beweisstrukturen. Es werden Beispiele angeboten.
- Als Nebeneffekt der Arbeit ergibt sich: Es werden Zusammenhänge zwischen Variationsproblemen und Optimalsteuerproblemen aufgezeigt und bei der Bearbeitung konkreter Probleme ausgenutzt.

*Institut für Mathematik, joachim.steigenberger@tu-ilmenau.de, harald.abeszer@tu-ilmenau.de

Im Kapitel 2 der Arbeit wird die Überführung des Optimalsteuerproblems in ein spezielles Bolzaproblem der Variationsrechnung angegeben. Für dieses Variationsproblem werden die notwendigen Optimalitätsbedingungen hergeleitet. Die benötigten Existenzaussagen für zulässige Vergleichskurven finden sich in [1].
Im Kapitel 3 werden Variationsprobleme bzw. Optimalsteuerprobleme vom Typ Dido im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit Zustandsrestriktionen behandelt. Diese sollen (auch) als Vorarbeit zu den oben erwähnten Problemen aus der Mechanik aufgefaßt werden.
Im Kapitel 4 wird das Variationsprinzip der minimalen Wirkung aus der Analytischen Mechanik bei geometrischen (holonomen) und bei kinematischen (nichtholonomen) Beschränkungen vorgestellt. Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Vergleich zu Variationsproblemen mit Zustandsrestriktionen werden diskutiert.
Bei der Behandlung von Optimalsteuerproblemen bzw. Variationsproblemen unter Zustandsrestriktionen, insbesondere bei der Formulierung notwendiger Bedingungen, unterscheidet man verschiedene prinzipielle Vorgehensweisen:
- Nach [6] werden dafür die Begriffe *direkte* und *indirekte Methode* verwendet. Die *direkte Methode* konstruiert Lagrangefunktionen direkt durch Adjunktion von S aus den Restriktionen $S(t,x) \geq 0$ mit einem Multiplikator ρ. Dabei ergibt sich eine klassische Schlupfbedingung ($\rho S = 0$). Mit der *indirekten Methode* wird die Lagrangefunktion durch Adjunktion von $\dot{S} = S_{,t} + S_{,x} f$ mit einem Multiplikator $\bar{\rho}$ erzeugt. Die sich ergebende Schlupfbedingung ist nichtklassisch ($\dot{\bar{\rho}} S = 0$). ρ und $\bar{\rho}$ haben dann auch unterschiedliche Stetigkeiteigenschaften. In der Arbeit wird die indirekte Methode verwendet, da sie sich u. a. besser für Probleme mit Relativgrad $h > 1$ verallgemeinern läßt.
- Unterschiedliche Problembehandlungen werden auch durch die Tatsache verursacht, daß der Multiplikatorenvektor der Lagrangefunktion für Extremalenstücke auf dem Rand des zulässigen Gebietes ($S = 0$) nicht eindeutig ist. Eine unterschiedliche Verarbeitung dieser Tatsache führt jeweils auf notwendige Optimalitätsbedingungen mit verschiedenen Stetigkeitseigenschaften für Multiplikatoren.
- Die Multiplikatoren λ sind Lösungen der Eulergleichungen zwischen den Knickstellen von x (und lassen sich gegebenenfalls stetig fortsetzen). In der Arbeit werden notwendige Bedingungen mit *stetigen* λ begründet. Diese notwendigen Bedingungen sind mit denen von [7] bei einem Relativgrad $h = 1$ vergleichbar (bei anderer Beweismethode). Andere Autoren, z.B. [6] und [10], arbeiten mit unstetigen λ. Diese λ müssen in den Verbindungsstellen gewisse Sprungbedingungen erfüllen. In der Regel werden in der Literatur ($h = 1$)-Probleme behandelt, der Fall $h > 1$ wird manchmal als Möglichkeit angegeben. Zur Vergleichbarkeit der notwendigen Bedingungen nach direkter und indirekter Methode für den ($h = 1$)- Fall finden sich Bemerkungen und Sätze in [6].
Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für Optimalsteuerprobleme mit Zustandsrestriktionen in der behandelten Funktionenklasse ($x \in D^1$) sind - unabhängig von der verwendeten Beweismethode - alle nicht sehr "handlich". Dies liegt aber in der Natur des Problems begründet, da Extremalenstücke aus dem Innern und auf dem Rand des zulässigen Gebietes (optimal) verknüpft werden müssen. Überlagert wird das Geschehen durch das Auftreten möglicher Unstetigkeitsstellen der Steuerung u bzw. möglicher Knickstellen für die Zustandsvariable x.

2 Optimalsteuerprobleme mit beschränktem Zustand

2.1 Problemformulierung und notwendige Optimalitätsbedingungen

Betrachtet wird das folgende Optimalsteuerproblem

$$I = g_0(t_0, x(t_0)), T, x(T)) + \int_{t_0}^{T} f_0(t, x, u)dt \rightarrow min, \tag{1}$$

$$x \in D_n^1[t_0, T],\ u \in D_m^0[t_0, T],$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad f : \mathbb{R}^{1+n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$Q(t, x, u) \geq 0, \quad Q : \mathbb{R}^{1+n+m} \rightarrow \mathbb{R}^r, \tag{3}$$

$$S(t, x) \geq 0, \quad S : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^1, \tag{4}$$

$$g(t_0, x(t_0)), T, x(T)) = 0, \quad g : \mathbb{R}^{2+2n} \rightarrow \mathbb{R}^q,\ q \leq 2n + 2. \tag{5}$$

Das Zielfunktional I charakterisiert das Problem als Bolzaproblem, (2) beschreibt die Dynamik. Die Ungleichungen in (3) sind im Wesentlichen Steuerbeschränkungen. Q muß von u abhängen (siehe auch Rangvoraussetzung V3). Es wird angenommen, daß nur eine Zustandsbeschränkung $S(t, x) \geq 0$ (4) vorliegt. Für $S : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k > 1$ können die notwendigen Bedingungen sinngemäß übertragen werden (siehe Kapitel 4). Dabei ist zu beachten, daß der Relativgrad der Komponenten von S verschieden sein kann. Die Gleichungen (5) charakterisieren die zugehörige Mannigfaltigkeit für die Randvariablen $(t_0, x(t_0), T, x(T))$.

Bezeichnung: Sei h der *Relativgrad von S bezüglich f*: h sei die kleinste Ordnung der Ableitungen von S längs des Vektorfeldes f, für die sich eine explizite Abhängigkeit von u ergibt. D.h. es gilt mit $L_f S := S_{,t} + S_{,x}\, f$ und $L_f^k S := L_f(L_f^{k-1} S),\ k = 2, 3, \ldots,\ L_f^1 := L_f$,

$$(L_f^\kappa S)_{,u} = 0, \quad \kappa = 1 \ldots h - 1,\ (L_f^h S)_{,u} \neq 0.$$

$R_0(t, x, u) := L_f^h S$ ist die h-te Ableitung von S längs f.
Der *Relativgrad* ist ein Begriff aus der Steuerungstheorie. In der Variationsrechnung heißt der Relativgrad *Ordnung* des Problems.

Vereinbarungen:
1. Es wird - so weit wie möglich - die Vektorschreibweise verwendet: x und u sollen Spaltenvektoren sein, die Multiplikatoren λ, μ, ρ und die Gradienten Zeilenvektoren.
2. Die Ein- bzw. Austrittsstellen t der Extremalen $x(\cdot)$ in die Randmannigfaltigkeit $\{(t, x),\ S(t, x) = 0\}$ von $S(t, x) \geq 0$ heißen *Verbindungsstellen.* Es wird o.E.d.A. angenommen, daß es nur einen Eintrittspunkt t_1 und einen Austrittspunkt t_2 gibt. Diese sollen nicht beide auf dem Rand von $[t_0, T]$ liegen. Es kann $t_1 = t_2$ sein. (Falls es mehrere Paare von Verbindungsstellen gibt, müssen auch dort die entsprechenden notwendigen Optimalitätsbedingugen gelten.)

3. Ausnahmemengen

$$\begin{array}{ll} B := & \{t_\beta \in [t_0, T],\ t_\beta\ \text{Unstetigkeitspunkt von}\ u(t),\ \beta = 3 \dots \beta_0\} \\ C := & \{t_1, t_2\}, \quad t_1, t_2\ \text{Verbindungsstellen} \\ D := & \{t_\gamma \in [t_0, T] : in\, t_\gamma\ \text{findet mindestens ein Aktivitätswechsel} \\ & \text{der Ungleichungen}\ Q(t, x, u) \geq 0\, \text{statt},\ \gamma = \beta_0 + 1 \dots \gamma_0\} \end{array}$$

Damit ist die Menge der Ausnahmepunkte gleich $E := B \cup C \cup D = \{t_s,\ s = 1 \dots \gamma_0\}$. Die t_s müssen nicht alle verschieden sein.
4. $D^0_m[a, b] := \{x : [a, b] \to \mathbb{R}^m,\ x$ in $[a, b]$ stückweise stetig$\}$
$D^1_n[a, b] := \{x : [a, b] \to \mathbb{R}^n,\ x$ in $[a, b]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar $\}$

Voraussetzungen:

$$\begin{array}{ll} V1: & f_i(\cdot,\cdot,\cdot), \in C^{h+1}(M), i = 1 \dots n,\ h \geq 1, Q_\nu(\cdot,\cdot,\cdot), f_0(\cdot,\cdot,\cdot)\ \in C^2(M),\ \nu = 1 \dots r, \\ & g_0(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot),\ g_k(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \in C^2(N),\ k = 1 \dots q, \\ & S(\cdot,\cdot) \in C^{h+1}(\bar{M}), \quad rg(S_{,x})\, max, \\ & M \subset \mathbb{R}^{1+n+m},\ N \subset \mathbb{R}^{2n+2},\ \bar{M} \subset \mathbb{R}^{n+1},\ \text{Gebiete} \\ V2: & \text{Mit}\ R_0(t, x, u) := L^h_f S\ \text{gelte:} \\ & \text{es sind nicht mehr als}\ m\ \text{Ungleichungen}\ Q \geq 0,\ S \geq 0\ \text{gleichzeitig aktiv.} \\ & \text{Sei}\ r_1 \leq m\ \text{die Anzahl der in}\ t\ \text{aktiven Ungleichungen. Ist (nach Umordnung)} \\ & Q_1 = 0, \dots Q_{r_1} = 0 \quad \text{für} \quad S > 0 \qquad \text{und} \\ & Q_1 = 0, \dots Q_{r_1 - 1} = 0,\ \text{für}\ S = 0,\ \text{dann soll in}\ t \\ & rg((Q_1,\, Q_2,\, \dots, Q_{r_1})_{,u_\mu}) = r_1\ \text{bei}\ S > 0,\ \text{und} \\ & rg((Q_1,\, Q_2,\, \dots, Q_{r_1 - 1},\, R_0)_{,u_\mu}) = r_1\ \text{bei}\ S = 0\ \text{sein.} \\ V3: & \text{Die Extremale}\ x(t)\ \text{endet im Innern der durch}\ S(t, x) \geq 0\ \text{beschriebenen} \\ & \text{Mannigfaltigkeit. Es gilt also}\ S(T, x(T)) > 0. \\ & \text{(Falls dies nicht erfüllbar ist, dann soll}\ S(t_0, x(t_0)) > 0\ \text{sein.)} \\ V4: & rg(g_{,(t_0, x(t_0), T, x(T))}) = q\ (max) \end{array}$$

Satz 2.1 (notwendige Optimalitätsbedingungen)
(x, u) auf $[t_0, T]$ löst das Bolzaproblem (1)...(5) unter den Voraussetzungen *V1... V4.*
Dann existiert ein Multiplikatorenvektor $(l_0, l, \lambda(\cdot), \mu(\cdot), \rho(\cdot)) \neq 0\, \forall\, t$, mit $l_0 \geq 0$,
$l \in \mathbb{R}^q$, $\lambda \in D^1_n[t_0, T]$, $\mu \in D^0_m[t_0, T]$, $\rho \in D^0_1[t_0, T]$, so daß mit

$$H := l_0 f_0 + \lambda f + \mu Q + \rho R_0 \ \text{und}$$

$$G := l_0 g_0 + l g$$

gilt:

(i)	$\dot{\lambda} = -H_{,x}$ auf $[t_0, T] \setminus E$, Eulergleichungen,
(ii)	$0 = H_{,u}$ auf $[t_0, T]$, Gradientenbedingung,
(iii)	$\mu_\nu Q_\nu = 0$ auf $[t_0, T]$, $\nu = 1 \dots r$, Schlupfbedingung, siehe auch Bemerkung 3
(iv)	$\rho^{(h)} S = 0$ auf $[t_0, T]$, $\rho^{(h)}$: h-te Ableitung nach t, Schlupfbedingung, siehe auch Bemerkung 3,
(v)	für $\bar{\rho}(t) := (\rho_1(t), \dots, \rho_h(t))$ mit $\dot{\rho_\alpha} = -\rho_{\alpha-1}$, $\alpha = 2 \dots h$ und $\rho := \rho_h$ ist: $(S\rho_1(t))\|^{t_0} = 0$, $\rho_\alpha(t_0) = 0$, $\alpha = 2 \dots h$,
(vi)	mit $\tilde{l} = -\bar{\rho}(T) \in \mathbb{R}^h$ gilt: $G_{,t_0} - [l_0 f_0 + \lambda f]\|^{t_0} = 0$, $G_{,T} + [l_0 f_0 + \lambda f]\|^T - \left[\sum_{\alpha=1}^h \tilde{l}_\alpha \left(\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} - \left(\frac{d^{\alpha-1} S}{dt^{\alpha-1}} \right)_{,t} \right) \right]\Big\|^T = 0$,
(vii)	$G_{,x(t_0)} + \lambda(t_0) = 0$, $G_{,x(T)} - \lambda(T) + \left[\sum_{\alpha=1}^h \tilde{l}_\alpha \left(\frac{d^{\alpha-1} S}{dt^{\alpha-1}} \right)_{,x} \right]\Big\|^T = 0$, $(v) - (vii)$ sind die Transversalitätsbedingungen,
$(viii)$	die verkürzte Hamiltonfunktion $\tilde{H}(t, x, u, \lambda, \rho) := l_0 f_0 + \lambda f + \rho R_0$ erfüllt ein "Maximumprinzip" / Ungleichung von Weierstraß: $\tilde{H}(t, x, \bar{u}, \lambda, \rho) \geq \tilde{H}(t, x, u, \lambda, \rho)$ für alle zulässigen $\bar{u}$ und für alle $t \in [t_0, T]$, (analog: $H(t, x, \bar{u}, \lambda, \rho) - \mu Q(t, x, \bar{u}) \geq H(t, x, u, \lambda, \rho)$)
(ix)	$H(\cdot, x(\cdot), u(\cdot), \lambda(\cdot), \mu(\cdot), \rho(\cdot)) \in D^1[t_0, t]$, Knickbedingung,
(x)	im Fall $h = 1$: $\dot{H}(t, x, u, \lambda, \rho) = H_{,t}(t, x, u, \lambda, \rho)$ auf $[t_0, T] \setminus B$, Energiesatz,
(xi)	Übergangsbedingungen: $l_0 f_0 + \lambda f + \rho R_0$ in $(t_0, t_1) \cup (t_2, T)$ stetig $l_0 f_0 + \lambda f$ in (t_1, t_2) stetig,
(xii)	$(l_0 f_0 + \lambda f + \rho R_0)\|^{t_1 - 0} = (l_0 f_0 + \lambda f)\|^{t_1 + 0}$ $(l_0 f_0 + \lambda f)^{t_2 - 0} = (l_0 f_0 + \lambda f + \rho R_0)\|^{t_2 + 0}$,
$(xiii)$	Vorzeichenbedingungen $\mu_\nu(t) \leq 0$ für alle $t \in [t_0, T]$, im Fall $h = 1$ ist $\rho(\cdot)$ nicht fallend auf $[t_0, T]$,
(xiv)	der Multiplikatorenvektor $(l_0, l, \lambda, \mu, \rho)$ ist in (t_1, t_2) nicht eindeutig: für $R_0(t, x, u) =: \bar{k}(t, x) + k(t, x) f(t, x, u)$ ist mit $(l_0, l, \lambda, \mu, \rho)$ auch $(0, 0, c\,k, 0, c)$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$ Multiplikatorenvektor (und damit auch die Summe von beiden).

Bemerkungen:

1. Man kann c so wählen, daß z.B. $\rho(\cdot)$ in t_2 stetig wird.
2. (iii) bzw. (iv) zusammen mit den Vorzeichenbedingungen für Q und μ bzw. für S und $\rho^{(h)}$ werden auch *Komplementaritätsbedingungen* genannt.
3. zu (iii): $\mu_\nu Q_\nu = 0$ auf $I_1 := \{t : Q(t, x(t), u(t)) > 0\}$. Da $Q = 0$ auf $I_2 := [t_0, T] \setminus I_1$ ist, schreibt man $\mu_\nu Q_\nu = 0$ auf $[t_0, T]$.
zu (iv): $\rho \in D^{(h)}$ auf $I_3 := \{t :\ S(t, x(t)) > 0\}$ und $\rho^{(h)} S = 0\ \forall t \in I_3$. Da $S = 0$ für

$t \in I_4 := [t_0, T] \setminus I_3$ ist, schreibt man kürzer $\rho^{(h)} S = 0$ auf $[t_0, T]$, obwohl ρ in I_4 nicht notwendig $h$mal differenzierbar sein muß.
Über die analytischen Eigenschaften von μ in I_2 bzw. von ρ in I_4 gibt der Punkt (G) des Beweises Auskunft.

Beweisstruktur:
(A) *Überführe das Optimalsteuerproblem* (1)-(5) *in ein klassisches Bolzaproblem der Variationsrechnung und verwende die dafür bekannten notwendigen Optimalitätsbedingungen.*
Statt der Ungleichung $S(t, x) \geq 0$ für zulässige $x(\cdot)$ wird das System

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1^2(t) & := & S(t, x(t)) \\ \varphi_2(t) & := & \dot{S}(t, x(t)) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_h(t) & := & S^{(h-1)}(t, x(t)), \;\; h > 1, \end{array} \tag{6}$$

benutzt. Dabei sind die Ableitungen längs der Vektorfeldes f zu bilden ($\dot{S} = L_f S$). Äquivalent zu (6) wird

$$\begin{array}{lclcl} \dot{S} & = & 2\varphi_1\dot{\varphi}_1 & = & \varphi_2 \\ \ddot{S} & = & \dot{\varphi}_2 & = & \varphi_3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ S^{(h)} & = & \dot{\varphi}_h & = & R_o \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} (S - \varphi_1^2)|^T & = 0 \\ (\dot{S} - \varphi_2)|^T & = 0 \\ \vdots & \\ (S^{(h-1)} - \varphi_h)|^T & = 0 \end{array} \tag{7}$$

verwendet. (7) soll zu

$$\tilde{g}(T, x(T), \varphi(T)) = 0$$

zusammengefaßt werden. $S(t, x(t)) \geq 0$ wird also durch das System

$$\begin{array}{rl} 2\varphi_1\dot{\varphi}_1 & = \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 & = \varphi_3 \\ \vdots & \\ \dot{\varphi}_h & = R_0(t, x(t), u(t)) \end{array}$$

für zulässige (x, u) mit den Anfangsbedingungen (7) ersetzt. Zusammen mit

$$\begin{array}{ll} \dot{y}(t) & := u(t) \\ \dot{z}_\nu^2(t) & := Q_\nu(t, x(t), u(t)), \; \nu = 1 \ldots r, \quad (\text{Kurzform: } \dot{z}^2 = Q), \end{array}$$

ergibt sich das Variationsproblem

$$g_0(t_0, x(t_0, T, x(T)) \;+\; \int_{t_0}^{T} f(t, x, \dot{y})dt \;\rightarrow\; \min$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ll} \dot{x} - f(t, x, \dot{y}) & = 0 \\ Q(t, x, \dot{y}) - \dot{z}^2 & = 0 \\ 2\varphi_1\dot{\varphi}_1 - \varphi_2 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\varphi}_h - R_0(t, x, \dot{y}) & = 0, \end{array}$$

oder zusammengefaßt

$$R(t, x, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi}) = 0$$

und den Randbedingungen

$$g(t_0, x(t_0), T, x(T)) = 0 \tag{8}$$

$$\tilde{g}(T, x(T), \varphi(T)) = 0. \tag{9}$$

Für $w := (x, y, z, \varphi) \in D^1_{n+m+r+h}[t_0, T]$ erhält man das Variationsproblem in der klassischen Form als Lagrangeproblem

$$g_0(t_0, w(t_0), T, w(T)) + \int_{t_0}^{T} f_0(t, w, \dot{w})\,dt \;\rightarrow\; \min$$

mit

$$R(t, w, \dot{w}) = 0, \quad \text{wobei} \quad R : \mathbb{R}^{1+2n+m+r+2h} \rightarrow \mathbb{R}^{n+r+h} \tag{10}$$

und

$$\bar{g}(t_0, w(t_0), T, w(T)) \;=\; 0, \quad \bar{g} : \mathbb{R}^{2(n+m+r+h)+2} \rightarrow \mathbb{R}^{q+h}.$$

(B) *Diskussion der Rangbedingungen für* (10),(8) *und* (9)*:*
Für $S > 0$ ($\varphi_1 \neq 0$, $[t_0, t_1) \cup (t_2, T]$) ist mit $D := Diag\,(-2\dot{z}_1 \cdots - 2\dot{z}_r)$

$$rg(R_{,(\dot{x},\dot{y},\dot{z},\dot{\varphi})}) = \begin{pmatrix} E & -f_{,u} & 0 & & 0 & & \\ 0 & Q_{,u} & D & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 2\varphi_1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & -R_{0,u} & 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = n + r + h \quad (\max)$$

nach (V2).
Für $S = 0$ ($\varphi_1 = 0$, $[t_1, t_2]$) ist für die verbleibenden Restriktionen

$$\begin{array}{ll} \dot{x} - f(t, x, \dot{y}) & = 0 \\ Q(t, x, \dot{y}) - \dot{z}^2 & = 0 \\ R_0(t, x, \dot{y}) & = 0 \end{array}$$

oder

$$\bar{R}(t, x, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$$

der Rang

$$rg(\bar{R},_{(\dot{x},\dot{y},\dot{z}}) = \begin{pmatrix} E & -f,_u & 0 \\ 0 & Q,_u & D \\ 0 & -R_0,_u & 0 \end{pmatrix} = n + r + h \text{ (max)}$$

nach (V2). Für die Randbedingungen $g = 0$ ((8)) und $\tilde{g} = 0$ ((9)) ist

$$rg\left((g, \tilde{g}),_{(t_0,x(t_0),T,x(T),\varphi(T))}\right)$$

$$= rg \begin{pmatrix} g,_{(t_0.x(t_0),T,x(T))} & & & & 0 \\ S,_{(T,x(T)} & -2\varphi_1(T)) & & & \\ & & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ S^{(h-1)},_{(T,x(T))} & & & & -1 \end{pmatrix} = q + h \text{ (max)}$$

Unter diesen Rangvoraussetzungen lassen sich die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Variationsproblem formulieren.

(C) *Zulässige Vergleichskurvenscharen - die Variation*
Betrachte zur Lösung $w(\cdot)$ auf $[t_0, T]$ zulässige D^1-Vergleichskurven $w(\cdot, b)$ auf $[t_0(b), T(b)]$ $b \in \mathbb{R}^1$, die die Einbettungsbedingung $w(t, 0) = w(t)$, $t_0(0) = t_0$, $T(0) = T$ erfüllen.
Diese Vergleichskurven generieren die zulässigen Variationen $(\delta w(\cdot), \delta t_0, \delta T)$, die stückweise differenzierbar sind und den linearisierten Nebenbedingungen (Variationsgleichungen) genügen. Die Existenz zulässiger Vergleichskurven wird durch die Rangbedingungen abgesichert (siehe auch [1]). Einige Besonderheiten im Innern und auf dem Rand der Aktivitätsintervalle von $S(t, x) \geq 0$ und $Q(t, x, \dot{y}) \geq 0$ werden unten diskutiert.
Betrachte die Variation δI des Zielfunktionals I auf der Klasse der zulässigen Variationen. Dann ist $\delta I = 0$ die notwendige Bedingung für das Extremalproblem:

$$\begin{array}{ll} \delta I & = \int_{t_0}^{T} (f_0,_x \, \delta x + f_0,_{\dot{y}} \, \delta \dot{y}) dt + f_0 \delta t|_{t_0}^{T} + \sum_{s=1}^{\gamma_0+\beta_0} f_0 \delta t|_{t_s-0}^{t_s+0} \\ & +g_0,_{t_0} \, \delta t_0 + g_0,_{x(t_0)} \, \Delta x(t_0) + g_0,_T \, \delta T + g_0,_{x(T)} \, \Delta x(T) = 0 \end{array}$$

für alle Variationen $(\delta w(\cdot), \delta t_0, \delta T)$, die Lösungen des (unterbestimmten) Systems von Differentialgleichungen

$$R,_x \, \delta x + R,_{\dot{x}} \, \delta \dot{x} + R,_{\dot{y}} \, \delta \dot{y} + R,_{\dot{z}} \, \delta \dot{z} + R,_\varphi \, \delta \varphi + R,_{\dot{\varphi}} \, \delta \dot{\varphi} = 0,$$

sowie der linearisierten Randbedingungen $g = 0$ und $\tilde{g} = 0$

$$\begin{array}{ll} g_{,t_0}\,\delta t_0 + g_{,x(t_0)}\,\Delta x(t_0) + g_{,T}\,\delta T + g_{,x(T)}\,\Delta x(T) & = 0 \\ \tilde{g}_{,T}\,\delta T + \tilde{g}_{,x(T)}\,\Delta x(T) + \tilde{g}_{,\varphi(T)}\,\Delta\varphi(T) & = 0, \end{array}$$

sind. Dabei ist $\Delta x(t) := \delta x(t) + \dot{x}(t)\delta t$.
Statt der notwendigen Bedingungen ($\delta I = 0$ für alle zulässigen Variationen) wird das Minimalproblem in der Variationsrechnung üblicherweise direkt mit Trennungssätzen weiterbehandelt ([8] und [1]). Diese führen auf: $\exists\,(l_0, l, \tilde{l}) \neq 0$, so daß $l_0\delta I + l\delta g + \tilde{l}\delta\tilde{g} \geq 0$ für alle zulässigen Variationen $(\delta w, \delta t_0, \delta T)$. Durch spezielle Wahl dieser Variationen ergeben sich hieraus die notwendigen Bedingungen in Gleichungs- und Ungleichungsform, insbesondere: Mit den Lagrangefunktionen

$$F := l_0 f_0 + \lambda(f - \dot{x}) + \mu(Q - \dot{z}^2) + \rho_1(\varphi_2 - 2\varphi_1\dot{\varphi}_1) + \cdots + \rho_h(R_0 - \dot{\varphi}_h)$$

und

$$G := l_0 g_0 + lg + \tilde{l}\tilde{g}$$

muß für (w, t_0, T)

$$\begin{array}{l} \int_{t_0}^{T}(F_{,x}\,\delta x + F_{,\dot{x}}\,\delta\dot{x} + F_{,\dot{y}}\,\delta\dot{y} + F_{,\dot{z}}\,\delta\dot{z} + F_{,\varphi}\,\delta\varphi + F_{,\dot{\varphi}}\,\delta\dot{\varphi})dt \\ +F\delta t|_{t_0}^{T} + \sum_{s=1}^{s_0+\beta_0} F\delta t|_{t_s-0}^{t_s+0} \\ +G_{,t_0}\,\delta t_0 + G_{,x(t_0)}\,\Delta x(t_0) + G_{,T}\,\delta T + G_{,x(T)}\,\Delta x(T) + G_{,\varphi(T)}\,\Delta\varphi(T) = 0 \end{array}$$

auf der Menge aller zulässigen Variationen erfüllt sein. Wegen $\Delta w = \delta w + \dot{w}\delta t$ entspricht dies der Gleichung

$$\begin{array}{l} \int_{t_0}^{T}(F_{,x} - \frac{d}{dt}(F_{,\dot{x}})\delta x + \frac{d}{dt}(F_{,\dot{y}})\delta y + \frac{d}{dt}(F_{,\dot{z}})\delta z + (F_{,\varphi} - \frac{d}{dt}(F_{,\dot{\varphi}}))\delta\varphi)dt \\ +(F_{,\dot{x}}\,\Delta x + F_{,\dot{y}}\,\Delta y + F_{,\dot{z}}\,\Delta z + F_{,\dot{\varphi}}\,\Delta\varphi)|_{t_0}^{T} \\ +\sum_{s=1}^{\beta_0+\gamma_0}(F_{,\dot{x}}\,\Delta x + F_{,\dot{y}}\,\Delta y + F_{,\dot{z}}\,\Delta z + F_{,\dot{\varphi}}\,\Delta\varphi)|_{t_s-0}^{t_s+0} \\ +(F - \dot{x}F_{,\dot{x}} - \dot{y}F_{,\dot{y}} - \dot{z}F_{,\dot{z}} - \dot{\varphi}F_{,\dot{\varphi}})\delta t|_{t_0}^{T} \\ +\sum_{s=1}^{\beta_0+s_0}(F - \dot{x}F_{,\dot{x}} - \dot{y}F_{,\dot{y}} - \dot{z}F_{,\dot{z}} - \dot{\varphi}F_{,\dot{\varphi}})\delta t|_{t_s-0}^{t_s+0} \\ +G_{,t_0}\,\delta t_0 + G_{,x(t_0)}\,\Delta x(t_0) + G_{,T}\,\delta T + G_{,x(T)}\,\Delta x(T) + G_{,\varphi(T)}\,\Delta\varphi(T) = 0. \end{array} \tag{11}$$

(Die Existenz nichttrivialer Multiplikatoren ist für das Variationsproblem gesichert ([1] und [8]).)
Für die Ausnahmepunkte $t_s \in B \cup C \cup D$ folgt wegen der Stetigkeit der zulässigen Vergleichskurven w:

$$w(t_s(b)^+, b) = w(t_s(b)^-, b) \quad \forall\; b \in U(0),$$

also

$$\dot{w}(t_s^+)\delta t_s + \delta w(t_s^+) = \Delta w(t_s^+) = \Delta w(t_s^-) = \dot{w}(t_s^-)\delta t_s + \delta w(t_s^-).$$

Insbesondere gilt für $\varphi \in D^1[t_0,T]$ in t_1, t_2 wegen $\varphi(t)=0$ für $t \in [t_1,t_2]$

$$\delta\varphi(t_1^+)=0, \quad \Delta\varphi(t_1^+)=\Delta\varphi(t_1^-)=0,$$

$$\delta\varphi(t_2^-)=0, \quad \Delta\varphi(t_2^-)=\Delta\varphi(t_2^+)=0.$$

Für $t \in (t_1,t_2)$ folgt

$$\Delta\varphi(t)=0, \quad \delta\varphi(t)=0.$$

Für die Ausnahmepunkte $t_\gamma \in D$ ergeben sich für $z_\nu(t), \Delta z_\nu(t)$ und $\delta z_\nu(t)$ analoge Bedingungen.
Die Auswertung von (11) führt auf die bekannten notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Bolzaproblem der Variationsrechnung, falls die entsprechenden zulässigen Variationen beliebig gewählt werden können.
Für die Aktivitätsintervalle von $S(t,x) \geq 0$ bzw. $Q_\nu(t,x,u) \geq 0$ sind deshalb wegen $\delta\varphi = 0$ bzw. $\delta\dot{z}=0$ die $\delta\varphi$ und $\delta\dot{z}$ nicht beliebig wählbar, also sind dort die Eulergleichungen $\frac{dF_{,\dot{\varphi}}}{dt} = F_{,\varphi}$ bzw. $\frac{dF_{,\dot{z}}}{dt}=0$ *nicht* notwendig. Für die Randpunkte τ dieser Intervalle ist wegen $\Delta\varphi(\tau)=0$ bzw. $\Delta z_\nu(\tau)=0$ die Stetigkeit von $F_{,\dot{\varphi}}$ bzw. $F_{,\dot{z}}$ *nicht* notwendig.

(D) *notwendige Optimalitätsbedingungen*
$(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), \varphi(\cdot))$ auf $[t_0,T]$ minimiert das Variationsproblem. Dann folgt: es existiert $(l_0, l, \tilde{l}, \lambda(t), \mu(t), \rho(t)) \neq 0,\ \forall t,\ l_0 \geq 0,\ l \in \mathbb{R}^q,\ \tilde{l} \in \mathbb{R}^h$, so daß mit

$$F = l_0 f_0 + \lambda(f-\dot{x})) + \mu(Q-\dot{z}^2) + \rho_1(\varphi_2 - 2\varphi_1\dot{\varphi}_1) + \cdots + \rho_h(R_0 - \dot{\varphi}_h)$$

und

$$G = l_0 g_0 + lg + \tilde{l}\tilde{g}$$

gilt:

(a)	$\frac{d}{dt}F_{,\dot{x}} = F_{,x}\,, \quad \frac{d}{dt}F_{,\dot{y}} = F_{,y} = 0$	auf $[t_0,T] \setminus E$,
(b)	$\frac{d}{dt}F_{,\dot{z}_\nu} = F_{,z_\nu} = 0$	$\forall\, t$ mit $Q_\nu(t,x(t),\dot{y}(t)) > 0$,
(c)	$\frac{d}{dt}F_{,\dot{\varphi}} = F_{,\varphi}$	$\forall\, t$ mit $S(t,x(t) > 0$,
(d)	$F_{,\dot{x}}(\cdot),\ F_{,\dot{y}}(\cdot)$ sind stetig	auf $[t_0,T]$,
(e)	$F_{,\dot{\varphi}}(\cdot)$ ist stetig	$\forall\, t$ mit $S(t,(x(t)) > 0$,
(f)	$F_{,\dot{z}_\nu}(\cdot)$ ist stetig	$\forall\, t$ mit $Q_\nu(t,x(t),\dot{y}(t)) > 0$,
(g)	$(F - F_{,\dot{x}}\,\dot{x} - F_{,\dot{y}}\,\dot{y} - F_{,\dot{z}}\,\dot{z} - F_{,\dot{\varphi}}\,\dot{\varphi})(\cdot)$ ist stetig	$\forall t \in [t_0,T]$,

$$(h)\quad \begin{array}{ll}
G_{,t_0} - (F - F_{,\dot{x}}\,\dot{x} - F_{,\dot{y}}\,\dot{y} - F_{,\dot{z}}\,\dot{z} - F_{,\dot{\varphi}}\,\dot{\varphi})|^{t_0} & = 0,\\
G_{,T} + (F - F_{,\dot{x}}\,\dot{x} - F_{,\dot{y}}\,\dot{y} - F_{,\dot{z}}\,\dot{z} - F_{,\dot{\varphi}}\,\dot{\varphi})|^{T} & = 0,\\
G_{,x(t_0)} - F_{,\dot{x}}|^{t_0} & = 0,\\
G_{,x(T)} + F_{,\dot{x}}|^{T} & = 0,\\
F_{,\dot{y}}|^{t_0} \ = \ F_{,\dot{y}}|^{T} & = 0,\\
F_{,\dot{z}}|^{t_0} \ = \ F_{,\dot{z}}|^{T} & = 0,\\
F_{,\dot{\varphi}}|^{t_0} & = 0,\\
F_{,\dot{\varphi}}|^{T} \ + \ G_{,\varphi(T)} & = 0.
\end{array}$$

(a) - (c) sind die Eulergleichungen, (d) - (g) die Knick- oder Eckenbedingungen und (h) die Transversalitätsbedingungen.

(E) *Reformulierung der notwendigen Bedingungen des Variationsproblems mit der Lagrangefunktion F für das Optimalsteuerproblem mit der Hamiltonfunktion H:*
Sei

$$H := l_0 f_0 + \lambda f + \mu Q + \rho_h R_0.$$

Damit ist

$$F = H - \lambda \dot{x} - \mu \dot{z}^2 - \rho_h \dot{\varphi}_h + \rho_1(\varphi_2 - 2\varphi_1 \dot{\varphi}_1) + \cdots + \rho_{h-1}(\varphi_h - \dot{\varphi}_{h-1}),$$

und es ergeben sich die folgenden Entsprechungen.
Zu (a):

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt} F_{,\dot{x}} = F_{,x}\,, \quad -\dot{\lambda} = H_{,x} \qquad \text{auf}\,[t_0, T] \setminus E,\\
&\tfrac{d}{dt} F_{,\dot{y}} = 0, \qquad H_{,u} = const. \quad \text{auf}\,[t_0, T] \setminus E \text{ und wegen}\,(d)\,\text{auf}\,[t_0.T],
\end{aligned}$$

zu (b):

$$\frac{d}{dt} F_{,\dot{z}_\nu} = 0, \quad F_{,\dot{z}_\nu} = -2\dot{z}_\nu \mu_\nu = const. \quad \forall\, t\, \text{mit}\, Q_\nu(t, x(t), u(t)) > 0,$$

zu (c):

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt} F_{,\dot{\varphi}_1} = F_{,\varphi_1}\,, \quad -2\tfrac{d(\rho_1 \varphi_1)}{dt} = -2\rho_1 \dot{\varphi}_1, \quad \dot{\rho}_1 \varphi_1 = 0,\\
&\tfrac{d}{dt} F_{,\dot{\varphi}_2} = F_{,\varphi_2}\,, \quad -\dot{\rho}_2 = \rho_1,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&\tfrac{d}{dt} F_{,\dot{\varphi}_h} = F_{,\varphi_h}\,, \quad -\dot{\rho}_h = \rho_{h-1}, \text{ also}\\
&\rho_h^{(h)} \varphi_1 = 0 \textit{ oder } \quad \rho^{(h)} S = 0\; \forall\, t \textit{ mit } S(t, x(t)) > 0 \quad \text{also auch } \forall\, t\, \in [t_0, T],
\end{aligned}$$

Dabei folgt die Differenzierbarkeit von ρ_1 aus: $\varphi_1 \in D^1,\ \rho_1\varphi_1 \in D^1,\ \varphi_1 \neq 0$, die Differenzierbarkeit der $\rho_2 \dots \rho_h$ ergibt sich aus der Differenzierbarkeit der $F_{,\dot{\varphi}_k}\,,\ k = 2 \dots n$.
Zusammen mit (e) folgt also $\rho \in D^h\ \forall t$ mit $S(t, x(t)) > 0$. Für die restlichen t ($S \equiv 0$) erweitert sich die Regel formal zu $\rho^{(h)} S = 0\ \forall t \in [t_0, T]$.
Differenzierbarkeit von ρ für t mit $S(t, x(t)) = 0$ ergibt sich eventuell nach Teil (G) dieses Beweises.

zu (d): φ und $H_{,u}$ sind stetig für alle $t \in [t_0, T]$,
zu (e):

$$\rho_1 \varphi_1\, (bzw.\, \rho_1), \rho_2, \dots, \rho_h\, \text{sind stetig}\, \forall\, t\, \text{mit}\, S(t, x(t)) > 0,$$

zu (f): $\mu_\nu Q_\nu$ und damit μ_ν sind stetig $\forall\, t$ mit $Q_\nu(t, x(t), u(t) > 0$,
zu (h):

$$\begin{aligned}
&F_{,\dot{y}}\, |^T = 0, \quad H_{,u} = 0\, \forall\, t\, \in [t_0, T],\\
&F_{,\dot{z}_\nu}\, |^T = 0, \quad \mu_\nu Q_\nu = 0\, \forall\, t\, \in\, [t_0, T].
\end{aligned}$$

Die restlichen Transversalitätsbedingungen sind die Bedingungen (v) - (vii) von Satz 2.1.
Zu (g): Wegen $F_{,\dot{y}} = H_u = 0$ und $F_{,\dot{z}} = 0$ folgt:

$$l_0 f_0 + \lambda f - \dot{\varphi}_1(-2\rho_1\varphi_1) - \dot{\varphi}_2(-\rho_2) - \cdots - \dot{\varphi}_h(-\rho_h) = l_0 f_0 + \lambda f + \rho_1\varphi_2 + \cdots + \rho_h R_0$$

ist stetig $\forall\, t \in [t_0, T]$. Da die ρ und φ stetig sind, bleibt: $H(t, x, u, \lambda, \rho_h)$ ist stetig $\forall\, t \in [t_0, T]$.
In den Verbindungsstellen ergeben sich hieraus Übergangsbedingungen, z.B. in t_1 :

$$(l_0 f_0 + \lambda f + \rho_h R_0)|^{t_1 - 0} = (l_0 f_0 + \lambda f)|^{t_1 + 0}.$$

Diskussion weiterer notwendiger Bedingungen:

Ausgehend von der *Weierstraßschen Ungleichung* für das Variationsproblem wird ein "Maximumprinzip" für das Optimalsteuerproblem hergeleitet :

$$\begin{aligned}
&F(t, x, \varphi, \dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, \dot{\bar{z}}, \dot{\bar{\varphi}}) - F(t, x, \varphi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}) \\
&-F_{,\dot{x}}(t, x, \varphi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi})(\dot{\bar{x}} - \dot{x}) - F_{,\dot{y}}(\cdot)(\dot{\bar{y}} - \dot{y}) - F_{,\dot{z}}(\cdot)(\dot{\bar{z}} - \dot{z}) - F_{,\dot{\varphi}}(\cdot)(\dot{\bar{\varphi}} - \dot{\varphi})(\cdot) \geq 0
\end{aligned}$$

für alle zulässigen $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, \dot{\bar{z}}, \dot{\bar{\varphi}})$. Da $F_{,\dot{y}} = F_u = 0$, $F_{,\dot{z}} = 0$ und

$$\begin{aligned}
(\dot{\bar{\varphi}}_1 - \dot{\varphi}_1)F_{,\dot{\varphi}_1} \quad &= (\dot{\bar{\varphi}}_1 - \dot{\varphi}_1)(-2\varphi_1\rho_1) \;=\; -\rho_1(\bar{\varphi}_2 - \varphi_2) = 0, \\
(\dot{\bar{\varphi}}_2 - \dot{\varphi}_2)F_{,\dot{\varphi}_2} \quad &= -\rho_2(\bar{\varphi}_3 - \varphi_3) = 0 \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
(\dot{\bar{\varphi}}_h - \dot{\varphi}_h)F_{,\dot{\varphi}_h} \quad &= \rho_h(\bar{R}_0 - R_0),
\end{aligned}$$

bleibt mit

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(t, x, u, \lambda, \rho_h) \quad &:= l_0 f_0 + \lambda f + \rho_h R_0 \\
\tilde{H}(t, x, \bar{u}, \lambda, \rho_h) \quad &\geq \tilde{H}(t, x, u, \lambda, \rho_h)\ \forall \text{ zulässigen } \bar{u},
\end{aligned}$$

also ein Minimumprinzip.

Die *Legendre-Clebsch-Bedingung* für das Variationsproblem

$$\zeta^T F_{,\dot{w}\dot{w}}\, \zeta \geq 0 \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^{n+m+r+h} \text{ mit } R_{,\dot{w}}\, \zeta = 0$$

führt bei spezieller (zulässiger) Wahl von $\zeta = (0, \ldots, 0, \zeta_\nu, 0, \ldots .0)$, $\zeta_\nu \neq 0$, $\nu : Q_\nu = 0$ (aktive Ungleichung) auf

$$\mu_\nu \leq 0, \quad \text{falls } Q_\nu(t, x(t), u(t)) = 0.$$

Wegen $\mu_{\tilde{\nu}} Q_{\tilde{\nu}} = 0$ für $Q_{\tilde{\nu}}(t, x(t), u(t)) > 0$ gilt sogar

$$\mu_\nu \leq 0 \quad \forall\, \nu = 1 \ldots r, \quad \forall\, t \in [t_0, T]$$

(siehe auch [1]).

Energiesatz
$w(t\cdot)$ auf $[t_0, T]$ löst das Bolzaproblem der Variationsrechnung

$$\begin{array}{l} g_0(t_0, w(t_0), T, w(T)) + \int_{t_0}^{T} f_0(t.w(t), \dot{w}(t))\, dt \;\to\; \min \\ R(t, w(t), \dot{w}(t)) = 0, \quad g(t_0, w(t_0), T, w(T)) = 0. \end{array}$$

Dann folgt: Mit $F = l_0 f_0 + \lambda R$

$$\exists c \in \mathbb{R}: \quad (F - F,_{\dot{w}}\, \dot{w})(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} F,_t \; d\tau + c$$

([3] s. 205).
Beweis: Wähle für die Extremale $w(\cdot)$ eine Parameterdarstellung $t(\tau) = \tau$, $w = w(\tau)$. Das Integral nimmt dann die Form

$$\int_{t_0}^{T} f_0(t(\tau), w(\tau), \frac{w'(\tau)}{t'(\tau)})t'(\tau)\, d\tau$$

und die Nebenbedingung die Form $R(t(\tau), w(\tau), \frac{w'(\tau)}{t'(\tau)}) = 0$ an. Das ursprüngliche Variationsproblem wird zu einem Variationsproblem in Parameterform, für welches mit einer Lagrangefunktion $\tilde{F} := l_0 f_0 t' + \lambda R$ die Eulergleichungen in integrierter Form gelten müssen: $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so daß

$$\tilde{F},_{t'} = \int_{t_0}^{t} \tilde{F},_t \; d\tau \;+\; c_1, \quad \tilde{F},_{w'} = \int_{t_0}^{t} \tilde{F},_w \; d\tau \;+\; c_2$$

gelten. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\begin{array}{rl} & l_0 f_0,_{\dot{w}} \left(\frac{-w'}{t'^2}\right) t' + l_0 f_0 + \lambda R,_{\dot{w}} \left(\frac{-w'}{t'^2}\right) \\ = & \int_{\tau_0}^{\tau} (l_0 f_0,_t + \lambda' R + \lambda R,_t)\, d\tau \;+\; c_1 \end{array}$$

oder wegen $t' = 1$ nach Rücksubstitution

$$l_0 f_0 - F,_{\dot{w}}\, \dot{w} = F - F,_{\dot{w}}\, \dot{w} = \int_{t_0}^{t} F,_t \; d\tau \;+\; c_1$$

und aus der zweiten Gleichung

$$F,_{\dot{w}}\,(t, w(t), \dot{w}(t)) = \int_{t_0}^{t} F,_w\,(\tau, w(\tau), \dot{w}(\tau))\, d\tau.$$

(F) *Zusätzliche notwendige Bedingungen für den Fall* $h = 1$
Mit Relativgrad $h = 1$ wird $\dot{S} = S,_t + S,_x\, f =: R_0(t, x, u)$.
Für eine Extremale $(x(\cdot), u(\cdot))$ auf $[t_0, T]$ ist die Hamiltonfunktion $H = l_0 f_0 + \lambda f + \mu Q + \rho_1 R_0$ auf $[t_0, T]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar ($H \in D^1[t_0, T]$), und es gilt: es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so daß auf $[t_0, T]$

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t), \rho_h(t)) \;=\; \int_{t_0}^{t} H,_t\,(\tau, x(\tau), u(\tau), \lambda(\tau), \rho_h(\tau))\, d\tau \;+\; c,$$

also

$$\dot{H} = H_{,t} \quad \text{stückweise.}$$

Beweis: Für $F = l_0 f_0 + \lambda(f - \dot{x}) + \mu(Q - \dot{z}^2) + \rho_1(R_0 - 2\varphi_1\dot{\varphi}_1)$ und $w = (x, y, z, \varphi)$ gilt nach dem Energiesatz

$$F - F_{,\dot{w}}\,\dot{w} = \int_{t_0}^{t} F_{,t}\, d\tau + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Berechne $F - F_{,\dot{w}}\,\dot{w}$ im vorliegenden Fall:

$$\begin{aligned} F - F_{,\dot{w}}\,\dot{w} &= F + \lambda f - F_{,\dot{y}}\,\dot{y} + 2\mu\dot{z}^2 + \rho_1 2\varphi_1\dot{\varphi}_1 \\ &= l_0 f_0 + \lambda f + \rho_1 R_0 = \tilde{H}, \end{aligned}$$

da $\mu\dot{z}^2 = \mu Q = 0$ und $F_{,\dot{y}} = F_{,u} = 0$ ist. Beachtet man noch $F_{,t} = \tilde{H}_{,t} + \mu Q_{,t}$ so folgt:

$$\exists\, c \in \mathbb{R}: \quad \tilde{H} = \int_{t_0}^{t} \tilde{H}_{,t} + \mu Q_{,t}\, d\tau + c \quad \forall\, t \in [t_0, T]$$

bzw. $\dot{H} = H_{,t}$ stückweise. Insbesondere ist H auf $[t_0, T]$ stetig. Für $H_{,t} = 0$ (autonomes Problem) ist $H = \text{const.}$ auf $[t_0, T]$.

(G) *Stetigkeit von μ bzw. ρ_h in den Aktivitätsintervallen von Q bzw. S*
Betrachte $[t_1, t_2]$ mit $S = 0$. Dort können höchstens $r_1 - 1$ Ungleichungen $Q \geq 0$ aktiv sein. Es seien dies o.E.d.A. die ersten $\bar{Q} = 0$. Für die restlichen $\tilde{Q}$ gilt $\tilde{Q} > 0$, also $\tilde{\mu} = 0$. Dann ist nach Voraussetzung $rg\left((\bar{Q}, R_0)_{,u}\right) = r_1$, d.h., es gibt $\hat{u} \in \mathbb{R}^{r_1}$ mit $det((\bar{Q}, R_0)_{,\hat{u}}) \neq 0$. Dann läßt sich

$$F_{,\hat{u}} = l_0 f_{0,\hat{u}} + \lambda f_{,\hat{u}} + \bar{\mu}\bar{Q}_{,\hat{u}} + \rho R_{0,\hat{u}} = 0$$

eindeutig nach $\bar{\mu}$ und ρ auflösen. Mit $A = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{,\hat{u}} \\ R_{0,\hat{u}} \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \rho \end{pmatrix} = -A^{-1}(l_0 f_0 + \lambda f)_{,\hat{u}}\,. \tag{12}$$

Dann sind $\bar{\mu}$ und ρ in (t_1, t_2) stetig bzw. differenzierbar, falls die rechte Seite von (12) dort stetig bzw. differenzierbar ist.
Für Intervalle $[t_\gamma, t_{\gamma+1}]$, in denen r_1 Ungleichungen $\hat{Q} \geq 0$ aktiv sind, gilt Analoges für die $\hat{\mu}(t)$.

(H) $\rho(\cdot)$ ist nicht fallend auf $[t_0, T]$
Der Beweis wird in Kapitel 4.1 geliefert.

Spezialfall notwendiger Bedingungen
Der ins Auge gefaßte Anwendungsfall erweist sich als Spezialfall des oben behandelten allgemeinen Optimalsteuerproblems. Betrachte

(P3) $I = \int_{t_0}^{T} f_0(t, x, u)\, dt \to \min, \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad S(x) \geq 0,$
$x \in D_n^1[t_0, T],\ u \in D_m^0[t_0, T],\ t_0, T\ fest,\ h = 1\ (\dot{S} = R_0(t, x, u))$

mit verschiedenen Randbedingungen:

$$\begin{array}{llll} I & x(t_0) = x_0, & x(T) = x_T & \\ II & x(t_0)\ frei, & x(T)\ frei & \\ III & x_i(t_0) = x_{i0}, & x_i(T) = x_{iT}, & i = 1 \dots n_1 < n \\ & x_i(t)\ frei, & x_i(T)\ frei, & i = n_1 + 1 \dots n \end{array} .$$

Dann ergibt sich nach Satz 2.1 unter den dort getroffenen Vereinbarungen und Voraussetzungen:

Satz 2.2 (x, u) löst (P3) mit einer Eintrittsstelle t_1 und einer Austrittsstelle t_2. Dann folgt
$\exists\,(l_0, \lambda(t), \rho(t)) \neq 0,\ \forall t,\ l_0 \geq 0,\ \lambda \in D_n^1[t_0, T],\ \rho \in D^1\left[[t_0, t_1) \cup (t_2, T]\right],$ so daß mit

$$H = l_0 f_0 + \lambda f + \rho S_{,x} f$$

gilt:

(i)	$\dot{\lambda} = -H_{,x}$ auf $[t_0, T]$, zwischen den Unstetigkeitsstellen von u
$(ii)(viii)$	$H_{,u} = 0,\ H_{,uu} \geq 0,\ [t_0, T]$
(iv)	$\dot{\rho} S = 0,$
(v)	$(S\rho)\vert^{t_0} = 0,\ [t_0, t_1) \cup (t_2 T],$
	(auf $[t_1, t_2]$ trivialerweise erfüllt)
(vii)	$\lambda_i(t_0) = 0,$ falls $x_i(t_0)$ frei,
	$(\lambda_i + \rho S_{,x_i})\vert^T = 0$ falls $x_i(T)$ frei,
(xi), (xii)	H auf $[t_0, T]$ stetig,
(x)	$\dot{H} = 0$ auf $[t_0, T]$, falls $H_{,t} = 0$,
$(xiii)$	$\rho(\cdot)$ nicht fallend.

Bemerkung:
Zu (G): Wegen $rg(R_{0,u}) = 1$ folgt: Es gibt eine reguläre Teimatrix $A := R_{0,\hat{u}} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, so daß $\rho = -A^{-1}(l_0 f_0 + \lambda f)_{,\hat{u}}$ auf $[t_1, t_2]$. Hieraus folgen die analytischen Abhängigkeiten von ρ in Abhängigkeit von den Eigenschaften der optimalen Steuerung u.

2.2 Eine hinreichende Optimalitätsbedingung

für Optimalsteuerprobleme mit der Ordnung $h = 1$.

Satz 2.3 $(x(\cdot), u(\cdot), l_0, \lambda(\cdot), \rho(\cdot))$, $l_0 = 1$, $\lambda \in D_n^1[t_0, T]$, ρ stückweise stetig differenzierbar, (x, u) zulässig erfülle mit $H = f_0 + \lambda f + \rho R_0$ die Bedingungen

(1) $\dot{\lambda} = -H_{,x}$ auf $[t_0, T] \setminus E$,
(2) $H(t, x, \bar{u}, \lambda, \rho) \geq H(t, x, u, \lambda, \rho)$ $\forall$ zulässigen $\bar{u}$, $\forall\, t$,
bzw. $H_{,u}(t, x, u, \lambda, \rho) = 0, \quad H_{,uu}(t, x, u, \lambda, \rho) \geq 0,$
(3) $H^0(t, x, \lambda, \rho) := \min_{\bar{u}} H(t, x, \bar{u}, \lambda, \rho)$ konvex in x,
(4) ρ nicht fallend ($\dot{\rho} \geq 0$ stückweise).

Dann minimiert (x, u) das Integral I aus (P3).

Beweis: Sei $(\bar{x},\bar{u})$ zulässig. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{T} (f_0(t,\bar{x},\bar{u}) - f_0(t,x,u))\,dt \\
= \; & \int_{t_0}^{T} (H(t,\bar{x},\bar{u},\lambda,\rho) - H(t,x,u,\lambda,\rho) - \lambda(\dot{\bar{x}} - \dot{x}) - \rho(R_0(t,\bar{x},\bar{u}) - R_0(t,x,u))\,dt \\
\geq \; & \int_{t_0}^{T} (H^0(t,\bar{x},\lambda,\rho) - H^0(t,x,\lambda,\rho) + \dot{\lambda}(\bar{x} - x) - \rho(R_0(t,\bar{x},\bar{u}) - R_0(t,x,u))\,dt \\
& +(\lambda(\bar{x} - x))_{t_0}^{T} \\
\geq \; & \int_{t_0}^{T} (H^0_{,x}(t,x,\lambda,\rho)(\bar{x} - x) - H^0_{,x}(t,x,\lambda,\rho)(\bar{x} - x) + \dot{\rho}(S(t,\bar{x}) - S(t,x)))\,dt \\
& +(\lambda(\bar{x} - x))|_{t_0}^{T} - (\rho(S(t,\bar{x}) - S(t,x)))|_{t_0}^{T} \\
= \; & \int_{t_0}^{T} \dot{\rho} S(t,\bar{x})\,dt \geq 0,
\end{aligned}
$$

da $\lambda(T)(\bar{x}(T)-x(T))-\lambda(t_0)(\bar{x}(t_0)-x(t_0)) = 0$ und $(\rho(S(t,\bar{x})-S(t,x)))|_{t_0}^{T} = 0$ (Festrand oder Transversalitätsbedingung), $\dot{\rho} \geq 0$ und $S(t,\bar{x}) \geq 0$.

3 Beispiele

3.1 Didoprobleme mit Zustandsbeschränkungen

Betrachte eine Klasse isoperimetrischer Probleme vom Typ Dido mit beschränktem Zustand

$$
\begin{aligned}
\int_{-x_1}^{x_1} f(y(x))\,dx \;\to\; \max, \quad & y \in D^1[-x_1,x_1],\; f(y) > 0,\; f \in C^2,\; y > 0, \\
& x_1 > 0 \text{ frei},\; y(-x_1) = y(x_1) = r > 0, \\
& \int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx \;=\; L_0,\; S(y(x)) \geq 0,\; S_{,y}(y) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Wählt man für eine Parameterdarstellung von x und y die Bogenlänge s als Parameter mit der normierten Gesamtlänge $L_0 = 1$ und als Steuerung u den Winkel der Tangente an $(x,y(x))$ mit der positiven $x-$Achse, so erhält man statt des Variationsproblems ein Optimalsteuerproblem mit beschränkten Zustandsvariablen:

$$
\begin{aligned}
\textbf{(PD)} \quad \int_{-1/2}^{1/2} f(y) cos\, u(s)\,ds \to \max, \quad & (x,y) \in D_2^1[-1/2,1/2],\; u \in D^0[-1/2,1/2] \\
& y(\pm 1/2) = r, \quad x(\pm 1/2) \text{ frei} \\
& \dot{x} = \cos\, u,\; \dot{y} = \sin\, u,\; S(y) \geq 0,\; .
\end{aligned}
$$

(PD) ist vom behandelten Typ (P3) mit Randbedingungen vom Typ III.
Bemerkung: Hier, wie auch bei den folgenden speziellen Variationsproblemen sind nur Kurven $y(x)$ zugelassen, die schlicht über der x-Achse liegen. Um auch nichtschlichte Kurvenstücke zu erfassen, müßten statt $y(x)$ parametrisierte Kurven $(x(t),y(t))$ zugelassen und damit ein Variationsproblem für Kurven in Parameterdarstellung behandelt werden. Dies erfolgte aber beim Übergang zu (PD). Damit ist der Übergang vom Variationsproblem zum Problem (PD) gleichzeitig eine Erweiterung der Klasse der zulässigen Kurven.

Ordnung des Problems
Die Ordnung des Problems ist $h = 1$:

$$
S(y) \geq 0,\; \dot{S} = S_{,y}\,\dot{y} = S_{,y} \sin\, u = R_0,\; rg(R_{0,u}) = 1,\; f\ddot{u}r\; u \neq \pm\frac{\pi}{2}.
$$

Notwendige Optimalitätsbedingungen:
(x, y, u) löst (PD).
Dann folgt: es gibt $(l_0, \lambda_1, \lambda_2, \rho) \neq 0 \,\forall t,\ l_0 \geq 0,\ \lambda_i \in D^1[-1/2, 1/2]$, so daß mit

$$\begin{aligned} H \ &:= -l_0 f(y) \cos u \,+\, \lambda_1 \cos u \,+\, \lambda_2 \sin u \,+ \rho S_{,y} \sin u \\ &= (-l_0 f(y) \,+\, \lambda_1) \cos u \,+\, (\lambda_2 \,+ \rho S_{,y}\,) \sin u \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{array}{ll} \dot{\lambda}_1 = 0 & \text{in } [-1/2, 1/2] \setminus E, \\ \dot{\lambda}_2 = l_0 f_{,y} \cos u & \text{in } [-1/2, 1/2] \setminus E, \\ H_{,u} = \ (l_0 f(y) - \lambda_1) \sin u + (\lambda_2 - \rho S_{,y}\,) \cos u \ = \ 0 & \text{in } [-1/2, 1/2], \\ \dot{\rho} S = 0, \quad \rho \text{ nicht fallend} & \\ H \ = \ c & \text{in } [-1/2, 1/2], \\ H_{,uu} \geq 0. & \end{array}$$

Aus $H = -H_{,uu}$ folgt $c \leq 0$. Die Gleichungen $H_{,u} = 0$ und $H = c$ lassen sich nach λ_1 und λ_2 auflösen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \qquad &= c \cos u + l_0 f(y) \\ \lambda_2 + \rho S_{,y} \ &= c \sin u. \end{aligned} \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich wegen $\dot{\lambda}_1 = 0$ und $\lambda_1(\pm 1/2) = 0$ (TB) ein
Erhaltungssatz

$$c \cos u(s) = \ -l_0 f(y(s)) \,\forall\, s. \tag{14}$$

Aus (14) läßt sich also ein erstes Integral für die Extremalen bestimmen.
Für den Multiplikator ρ ergibt sich aus Eulergleichungen, Transversalitätsbedigungen und Schlupfbedingung für den
Fall 1
$S(y(s)) > 0 \,\forall\, s \,\in\, [-1/2, 1/2]$: $\rho(s) = 0$, für den
Fall 2
$S(y(s)) = 0$ in $[t_1, t_2]$ $\quad S(y(s)) > 0$ sonst:
$\rho = 0$ in $[-1/2, t_1)$, $\rho S_{,y} + \lambda_2 = 0$ in (t_1, t_2) und $\rho = const.$ in $[t_2, 1/2]$ und für den
Fall 3
Randberührung in einem Punkt, $t_1 = t_2$:
$s \,\in\, [-1/2, t_1)$: $S(y(s)) > 0$, $\rho = 0$ und $s \,\in\, (t_1, 1/2]$: $S(y(s)) > 0$, $\rho = c$, sowie $S(y(t_1)) = 0$

Normalität
Annahme: $l_0 = 0$. Da $\lambda_1 = 0$ ist, folgt für $u(s) \neq \pm\pi/2$ aus $H_{,u} = 0$ $\lambda_2 + \rho S_{,y} = 0$. Dies gilt insbesondere für $s = -1/2$, wo $\rho(-1/2) = 0$ gilt. Dann verschwindet $(l_0, \lambda_1, \lambda_2, \rho)$ in $s = -1/2$ im Widerspruch zur Multiplikatorenregel. Es muß also $l_0 = 1$ sein.

Winkel
Wegen $c \leq 0$ und $l_0 = 1$ folgt aus (14) $c < 0$, also $-\pi/2 < u(s) < \pi/2$.

Stetigkeit von u
Fall 1: Wegen $\rho = 0$ folgt nach (13) $u \in C^0[-1/2, 1/2]$.
Fall 2: In $[-1/2, 1/2] \setminus (t_1, t_2)$ ist u nach (13) stetig. Auf (t_1, t_2) ist $u = 0$. Somit ist u auf $[-1/2, 1/2] \setminus \{t_1, t_2\}$ stetig. Für die Verbindungsstellen ergibt sich die Stetigkeit von u aus den notwendigen Bedingungen (13) und (14): Da $\cos u \;\forall\, s$ stetig ist, ergibt sich $u^- = u^+$ oder $u^- = -u^+ \;\forall\, s$. Insbesondere ist $u^+ = 0$ in t_1 und $u^- = 0$ in t_2. Es folgt $u^- = u^+ = 0$ in t_1 und in t_2 .
Fall 3: $t_1 = t_2$
Falls $u^+ = u^-$ ist, folgt $u^+ = u^- = 0$. Für $u^+ = -u^-$ folgt nach (13)

$$\lambda_2(t_1) = c \sin u^- = -c \sin u^+ = -\lambda_2(t_1) - (\rho S_{,y})^+$$

also $2\lambda_2(t_1) = -(\rho S_{,y})^+$.
Der Multiplikator ρ muß nichtfallend sein. Deshalb gilt in $t_1 \quad \rho^- = 0 \leq \rho^+$.
Für $\rho^+ = 0$ folgt $\lambda_2(t_2) = 0$ und nach (13) $u^+ = u^+ = 0$.
Für $\rho^+ > 0$ sind zwei Fälle möglich:
1. $S_{,y}(y(s)) < 0 \;\forall\, s$. Dann folgt $(\rho S_{,y})^+ < 0$ und damit $\lambda_2(t_1) > 0$, sowie $(\rho S_{,y})^+ + \lambda_2(t_1) = -\lambda_2(t_1) < 0$. Nach (13) ergibt sich $c \sin u^+ < 0$, $\sin u^+ > 0$, also $u^+ > 0$, $u^- < 0$ im Widerspruch zur einpunktigen Berührung von unten : In t_1 muß $\dot{y}^- = \sin u^- \geq 0$ und $\dot{y}^+ = \sin u^+ \leq 0$ sein.
2. $S_{,y}(y(s)) > 0 \;\forall s$ führt analog auf $u^+ < 0$ und $u^- > 0$ im Widerspruch zu $\dot{y}^- < 0$ und $\dot{y}^+ > 0$.
Also kann $u^+ = -u^- \neq 0$ nicht eintreten. Die Extremale berührt den Rand tangential.

Falls die Extremale die Randmannigfaltigkeit $S(y) = 0$ berührt (Fall 3) oder ein Kurvenstück der Extremale auf dieser Mannigfaltigkeit liegt (Fall 2), muß die Einmündung tangential erfolgen.

Differenzierbarkeit
Da nun sogar $u \in C^0[-1/2, 1/2]$, folgt $\dot{y} = \sin u \in C^0$, also $y \in C^1$. Aus (14) folgt dann, mit $u(s) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $u = \arccos(-\frac{1}{c} f(y)) \in C^1$, falls $u \neq 0$. Daraus ergibt sich weiter $y \in C^2$ und $u \in C^2$, falls $u \neq 0$. Iterativ folgt

$$u \in C^0[-1/2, 1/2] \cap C^\infty([-1/2, 1/2] \setminus \{t_1, t_2\}).$$

Krümmung
Nach (13) folgt $\dot{\lambda}_1 = -c \sin u \,\dot{u} + f_{,y} \sin u = 0$. Für $u \neq 0$ erhält man die Differentialgleichung

$$\dot{u} = \frac{f_{,y}}{c}. \tag{15}$$

Damit hängt die Krümmung $\frac{du}{ds}$ der Kurve $(x(s), y(s))$ nur vom Vorzeichen von $f_{,y}$ ab.

Falls $f_{,y}(y(s)) > 0$ ist, wird $\dot{u}(s) < 0$; die Extremale ist rechtswendig.
Für Randstücke ist $u = 0$ und $\dot{u} = 0$.
Damit kann die Extremale nach Verlassen der Randmannigfaltigkeit nicht wieder auf dem

Rand aufsetzen. Es gibt höchstens ein Paar von Verbindungsstellen oder einen Berührungspunkt.

Falls $f_{,y}(y)$ nicht vorzeichenstabil ist, können eventuell mehr als zwei Verbindungsstellen auftreten.

Systemgleichungen
Außerhalb der Aktivitätsintervalle von $S(y) \geq 0$, z.B. in $[-1/2, t_1)$ muß also eine Extremale dem System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos u \\ \dot{y} &= \sin u \\ \dot{u} &= \tfrac{1}{c} f_{,y}(y) \end{aligned}$$

genügen. Die zugehörigen Randbedingungen ergeben sich aus den Randbedingungen für y und den entsprechenden Übergangsbedingungen in t_1.

Symmetrie
Sei (y, u) Lösung von $\dot{y} = \sin u, \;\; \dot{u} = \frac{1}{c} f_{,y}(y)$ auf $(-\tau_1, -\tau_2), \; \tau_i > 0$.
Beh.: Mit $z(t) := y(-t), \quad v(t) := -u(-t)$ löst (z, v) die Differentialgleichungen $\dot{z} = \sin v, \;\; \dot{v} = \frac{1}{c} f_{,y}(z)$ auf (τ_1, τ_2).
Beweis: Nachrechnen.

Folgerung: *Die Extremale (x, y) ist symmetrisch bezüglich $x = 0$. Für die Verbindungsstellen ist $t_1 = -t_2$, ein Berührungspunkt kann nur mit $t_1 = t_2 = 0$ bei $x = 0$ auftreten.*

Bemerkung: Die Symmetrie ist nützlich für die Integration der Differentialgleichungen der Extremalen, die auf das $s-$Intervall $[-\frac{1}{2}, 0]$ beschränkt werden kann.

3.2 Didoprobleme im $\mathbb{R}^2$

Als erste Anwendung der Ergebnisse des Abschnitts 3.1 betrachten wir zwei Varianten des klassischen Problems der Dido. In der bekannten anschaulichen Fassung ist in der ersten Variante der Abstand der Randpunkte der Begrenzungslinie vom Ufer vorgegeben ($r > 0$), in der zweiten sind die Randpunkte überhaupt vorgegeben. In beiden Fällen ist darüber hinaus die Landnahme auf das Innere eines uferparallelen Streifens der Breite $R > 0$ beschränkt.

3.2.1 Variationsproblem (isoperimetrisches Problem, freier Rand)

Die erste Variante des klassischen Didoproblems im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-x_1}^{x_1} y(x)dx \to \max, \quad & y \in D^1[-x_1, x_1], \\ & x_1 > 0 \text{ frei}, \; y(-x_1) = y(x_1) = r > 0, \\ & 0 < y(x) \leq R, \; R > r, \\ & \textstyle\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = 1. \end{aligned}$$

(Klassisch: $r = 0, \; R = +\infty$.)

Der Übergang zum Optimalsteuerproblem nach Lagrange mit beschränkten Zustandsvariablen erfolgt nach den Angaben des Abschnitts 3.1:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbf{P4}) & \int_{-1/2}^{1/2} y(s)\cos u(s)ds \to \max, & (x,y) \in D_2^1[-1/2,1/2], \;\; u \in D^0[-1/2,1/2], \\
& & y(\pm 1/2) = r, \;\; x(\pm 1/2) \text{ frei}, \\
& & \dot{x} = \cos u, \;\; \dot{y} = \sin u, \\
& & y(s) \le R, \;\; 0 < r < R.
\end{array}
$$

(P4)ist vom behandelten Typ (P3) mit Randbedingungen vom Typ III. Die Ordnung des Problems ist $h = 1$:
$S(y) = R - y \ge 0, \;\; \dot{S} = -\sin u = R_0, \;\; rg(R_{o,u}) = 1$ für $u \ne \pm\frac{\pi}{2}$.

Notwendige Optimalitätsbedingungen:

Sie folgen sofort aus denen in Abschnitt 3.1 unter der Spezialisierung

$$f(y) = y, \;\; S(y) = R - y.$$

Die zugehörige Auswertung bringt die folgenden Aussagen.
1) Die Extremale ist spiegelsymmetrisch bezüglich $x = 0$. Sie ist eine rechtswendige Kurve (da $f_{,y}(y) = 1 > 0$) oder besteht aus zwei rechtswendigen Kurvenstücken und einem Geradenstück ($y = R$).
2) Die Extremale genügt den Differentialgleichungen

$$
\begin{array}{lll}
(a) & \dot{x} = \cos u, \;\; \dot{y} = \sin u, \;\; \dot{u} = \frac{1}{c}, & s \in [-1/2,1/2] \setminus [t_1,t_2], \\
(b) & \dot{x} = 1, \;\; \dot{y} = 0, \;\; \dot{u} = 0, & s \in (t_1,t_2).
\end{array}
$$

Für hinreichend große R ist $(t_1,t_2) = \emptyset$.
3) Nach dem Erhaltungssatz, $c\cos u = -y$, ist mit $\alpha := u(-1/2)$

$$-c = r/\cos\alpha, \;\; \text{sowie } -c = y(t_1) \text{ falls } \exists t_1 \le 0, \text{ bzw. } -c = y(0), \text{ falls } \neg\exists t_1.$$

Bei genügend kleinem R (Randkontakt, $t_1 \le 0$) ist somit

$$\cos\alpha = \frac{r}{R} < 1.$$

In diesem Fall gehören zu den Differentialgleichungen (a) die Randbedingungen

$$y(-1/2) = r, \;\; u(-1/2) =: \alpha, \;\; x(t_1) = t_1, \;\; y(t_1) = R, \;\; u(t_1) = 0,$$

und es folgt als Lösung auf dem Intervall $[-1/2, t_1]$

$$
\begin{array}{l}
u(s) = -\frac{1}{R}(s - t_1), \\
x(s) = R\sin(\frac{1}{R}(s - t_1)) + t_1, \;\; y(s) = R\cos(\frac{1}{R}(s - t_1)).
\end{array}
$$

Daraus ergibt sich die Kreisgleichung

$$(x - t_1)^2 + y^2 = R^2,$$

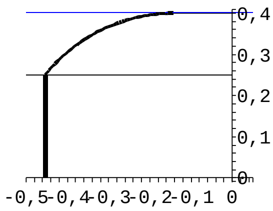


Abbildung 1: Form (linke Hälfte), r=.25, R=.4

die entsprechenden geometrischen Verhältnisse sind in Abbildung 1 skizziert.
Die Bogenlänge des linken Extremalenstücks ist $1/2 = R\alpha - t_1$, somit folgt

$$t_1 = R \arccos(\frac{r}{R}) - 1/2, \quad x_1 = 1/2 - R \arccos(\frac{r}{R}) + \sqrt{R^2 - r^2}.$$

4) Für $t_1 = 0$ (einpunktiger Kontakt) genügt R der Gleichung

$$2R \arccos(\frac{r}{R}) = 1.$$

Die Lösung $r \longmapsto \bar{R}(r)$ ist in Abbildung 2 skizziert. Ist $R > \bar{R}(r)$, dann tritt kein Kontakt

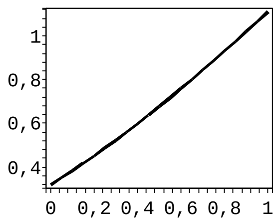


Abbildung 2: Unrestringierter Radius $\bar{R}$ über r

auf.

3.2.2 Variationsproblem (isoperimetrisches Problem, Festrand)

Die zweite Variante des klassischen Didoproblems im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-a}^{a} y(x)dx \to \max, \quad & y \in D^1[-a,a],\ 0 < a < 1/2, \\ & y(-a) = y(a) = r > 0, \\ & 0 < y(x) \leq R,\ R > r, \\ & \textstyle\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}dx = 1. \end{aligned}$$

Das zugehörige Optimalsteuerproblem nach Lagrange mit beschränkten Zustandsvariablen

$$\textbf{(P5)} \quad \int_{-1/2}^{1/2} y(s)\cos u(s)ds \to \max, \quad \begin{array}{l} (x,y) \in D_2^1[-1/2,1/2], \quad u \in D^0[-1/2,1/2], \\ x(\pm 1/2) = \pm\, a, \quad y(\pm 1/2) = r, \\ \dot{x} = \cos u, \quad \dot{y} = \sin u, \\ y(s) \le R, \quad 0 < r < R. \end{array}$$

unterscheidet sich vom Problem (P4) nur durch die festen Randwerte von x. Damit können alle notwendigen Optimalitätsbedingungen von (P4) übernommen werden mit Ausnahme der Transversalitätsbedingungen $\lambda_1(\pm 1/2) = 0$. Dann bleibt mit $\dot{\lambda}_1 = H_{,x} = 0$ nur $\lambda_1 = const =: d$, und der Erhaltungssatz enthält jetzt zwei Konstanten:

$$c\cos u + y = d.$$

Damit ist auch die Beschränkung $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nicht mehr zwingend. Bei hinreichend großem R (kein Kontakt) ist $u(0) = 0,\ y(0) =: y_0 < R$, im Kontaktfall ist $u(0) = 0,\ y_0 = R$. In beiden Fällen folgt aus dem Erhaltungssatz

$$y_0 = d - c \le R.$$

Mit $s = -1/2$ folgt

$$c\cos\alpha + r = d.$$

Daraus resultiert $c(1 - \cos\alpha) = r - y_0 < 0$, somit $c < 0$ und $1 - \cos\alpha > 0$, also $\alpha > 0$, sowie $y_0 - d = -c > 0$, also $d < y_0 \le R$.

Die weitere Auswertung der Optimalitätsbedingungen bringt die folgenden Aussagen.
1) Die Extremale ist spiegelsymmetrisch bezüglich $x = 0$. Sie ist eine rechtswendige Kurve (da $c < 0$) oder besteht aus zwei rechtswendigen Kurvenstücken und einem Geradenstück ($y = R$).
2) Die Extremale genügt den Differentialgleichungen

$$\begin{array}{lll} (a) & \dot{x} = \cos u, \quad \dot{y} = \sin u, \quad \dot{u} = \frac{1}{c}, & s \in [-1/2, 1/2] \setminus [t_1, t_2], \\ (b) & \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{u} = 0, & s \in (t_1, t_2). \end{array}$$

Für hinreichend große R ist $(t_1, t_2) = \emptyset$.
3) Im Kontaktfall ($t_1 \le 0$) gehören zu den Differentialgleichungen (a) die Randbedingungen

$$\begin{array}{l} x(-1/2) = -a, \quad y(-1/2) = r, \quad u(-1/2) =: \alpha, \\ x(t_1) = t_1, \quad y(t_1) = y_0 = R, \quad u(t_1) = 0. \end{array}$$

Bei großem R (kein Kontakt) ist formal $t_1 = 0$ zu setzen. Es folgt als Lösung auf dem Intervall $[-1/2, t_1]$

$$\begin{array}{l} u(s) = \frac{1}{c}(s - t_1), \\ x(s) = c\sin(\frac{1}{c}(s - t_1)) + t_1, \quad y(s) = -c\cos(\frac{1}{c}(s - t_1)) + d. \end{array}$$

Daraus ergibt sich die Kreisgleichung

$$(x - t_1)^2 + (y - d)^2 = (y_0 - d)^2.$$

4) Aus $r - d = -c\cos\alpha = (y_0 - d)\cos\alpha \geq -(y_0 - d)$ ergibt sich die Abschätzung

$$d \leq (y_0 + r)/2 \leq (r + R)/2.$$

Es ist $d < r$ gdw. $\cos\alpha > 0$, d.h., $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, es ist $r < d$ gdw. $\cos\alpha < 0$, d.h., $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Es ist $d = r$ für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $d = (y_0 + r)/2$ bei $\alpha = \pi$. Damit sind die (linken) Kreisbögen bis auf ihren Radius und ihren Mittelpunkt beschrieben.
5) (Auswertung der Geometrie links.) Mit $s = -1/2$ ist $x(-1/2) = -a = c\sin\alpha + t_1$, die Bogenlänge links ist $1/2 = -t_1 - c\alpha$, somit gilt $1/2 - a = c(\sin\alpha - \alpha)$. Außerdem ist $c\cos\alpha = d - r$. Mit $c = d - y_0$ folgt

$$(R - r)\frac{\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = 1/2 - a, \quad \text{falls } y_0 = R \text{ (Kontakt)}$$

als eine Gleichung zur Bestimmung von $\alpha(r, R, a)$. Danach können

$$d = \frac{r - R\cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \qquad \text{und } \ t_1 = -\frac{1}{2} + (R - r)\frac{\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

berechnet werden.
Im Fall $y_0 < R$ (kein Kontakt) ist formal $t_1 = 0$. Dann folgen nacheinander Gleichungen zur Bestimmung von $\alpha,\ d,\ y_0$:

$$\begin{aligned} &\sin\alpha - 2a\alpha = 0, \\ &d = r - \tfrac{1}{2\alpha}\cos\alpha, \\ &y_0 = r + \tfrac{1}{2\alpha}(1 - \cos\alpha). \end{aligned}$$

Verschiedene Formen werden in den Abbildungen 3 und 4 angegeben.

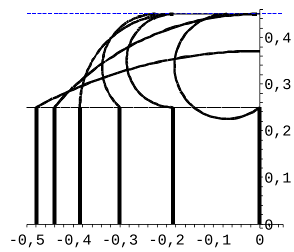
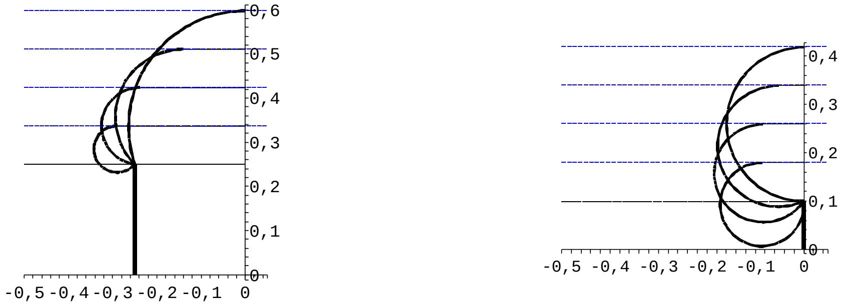


Abbildung 3: Form (linke Hälfte), r=.25, R=.45, a Parameter



(a) r=a=.25,

(b) r=.1, a=0

Abbildung 4: Form (linke Hälfte), r,a fix, R Parameter

3.3 Ein Problem vom Typ Dido im $\mathbb{R}^3$

In Vorbereitung der Behandlung einer Klasse von Aufgaben der Kontinuumsmechanik werden im Folgenden spezielle isoperimetrische Probleme gelöst. Gesucht sind, unter verschiedenen Randbedingungen, Rotationskörper (bezüglich der x-Achse) mit maximalem Volumen, deren Meridiane feste Bogenlänge 1 besitzen, und deren Radien $y(s)$ der Ungleichung $r \leq y(s) \leq R$ genügen.

Diese Problematik basiert auf Untersuchungen in [11]. Dort wurden mechanische Bauelemente betrachtet, die unverformt kreiszylindrische Gestalt besitzen. Die Mantelfläche ist eine Haut, die in Längsrichtung undehnbar und in Umfangsrichtung elastisch dehnbar ist, die Deckflächen sind starre Kreisscheiben. Bei quasistatischer Füllung mit einem Fluid verformt sich das Bauelement zu einem Rotationskörper, dessen Gestalt vom inneren Druck p abhängt. Solche Bauelemente können als Segmente biologischer oder künstlicher Würmer oder als Bestandteile künstlicher Muskeln angesehen werden. Im Grenzfall $p \to \infty$ entsteht ein Rotationskörper maximalen Volumens. Die beschreibenden Differentialgleichungen wurden a.a.O. mittels lokaler Gleichgewichtsuntersuchungen hergeleitet und numerisch ausgewertet.

In der Folge soll zunächst das Problem maximalen Volumens neu betrachtet werden: nicht als Grenzfall statischer Probleme, sondern unmittelbar als Optimalsteuerproblem und außerdem unter den oben erwähnten Restriktionen für die Radien. Der praktische Hintergrund ist somit die Frage nach dem maximalen Volumen eines Wurmsegmentes, das im Inneren eines starren Rohres vom Radius R liegt. Die Ergebnisse sind Vorbereitungen auf die Untersuchung von Füllprozessen solcher Segmente innerhalb starrer oder dehnbarer Rohre in nachfolgenden Arbeiten.

3.3.1 Maximales Volumen eines Rotationskörpers, freier Rand

Betrachtet wird

$$\begin{aligned}\pi \textstyle\int_{-x_1}^{x_1} y^2(x)dx \to \max, \quad & y \in D^1[-x_1, x_1],\\ & x_1 > 0\ frei,\ y(\pm x_1) = r > 0,\\ & 0 < y(x) \le R,\ R > 0,\\ & \textstyle\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx = 1.\end{aligned}$$

Der Übergang von diesem Variationsproblem zum Optimalsteuerproblem erfolgt nach den Regeln in Abschnitt 3.1. Man erhält

$$\begin{aligned}(\mathbf{P6})\ \textstyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^2(s)\cos u(s)ds \to \max, \quad & (x,y) \in D_2^1[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}],\ u \in D^0[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}],\\ & x(\pm\tfrac{1}{2})\ frei,\ y(\pm\tfrac{1}{2}) = r,\\ & \dot{x} = \cos u,\ \ \dot{y} = \sin u,\\ & 0 < y(s) \le R,\ 0 < r < R.\end{aligned}$$

Die Ordnung des Problems ist wieder $h = 1$ und $R_0 = -\sin u$.

Notwendige Optimalitätsbedingungen

Sie folgen aus denen in Abschnitt 3.1 unter der Spezialisierung

$$f(y) = y^2,\ \ S(x,y) = R - y.$$

Die Extremalen beschreiben hier den Standardmeridian der Rotationsfläche. Aus den Optimalitätsbedingungen ergeben sich die folgenden Aussagen.
1) Die Extremale ist spiegelsymmetrisch bezüglich $x = 0$. Sie ist eine rechtswendige Kurve (da $c < 0,\ f_{,y}(y) = y > 0$) oder besteht aus zwei rechtswendigen Kurvenstücken und einem Geradenstück ($y = R$).
2) Die Extremale genügt den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}&(a)\ \ \dot{x} = \cos u,\ \ \dot{y} = \sin u,\ \ \dot{u} = \tfrac{2}{c}y, \quad s \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \setminus [t_1, t_2],\\ &(b)\ \ \dot{x} = 1,\ \ \dot{y} = 0,\ \ \dot{u} = 0, \quad\quad\quad\ \ s \in (t_1, t_2).\end{aligned}$$

Für hinreichend große R ist $(t_1, t_2) = \emptyset$.
3) Nach dem Erhaltungssatz, $c\cos u = -y^2$, und mit $\alpha := u(-\frac{1}{2})$ ist $-c = r^2/\cos\alpha$, wie auch $-c = y^2(t_1)$, falls $\exists t_1 \le 0$, bzw. $-c = y^2(0)$, falls $\neg\exists t$.
Bei genügend kleinem R (Randkontakt, $t_1 \le 0$) ist $y(t_1) = y(0) = R$, bei großen R ist $y(0) < R$, in *jedem* Fall ist mit $y(0) =: y_0$

$$\frac{r^2}{R^2} \le \cos\alpha = \frac{r^2}{y_0^2}$$

und

$$\cos u(s) = \frac{y^2(s)}{y_0^2} \quad \forall s,$$

somit

$$-\frac{\pi}{2} < u(s) < \frac{\pi}{2} \quad \forall s.$$

4) Für den linken Teil der Extremale folgt das Randwertproblem

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \cos u, \;\; \dot{y} = \sin u, \;\; \dot{u} = -\frac{2}{y}\cos u, \quad s \in [-\frac{1}{2}, t_{1)}) \\ \qquad\qquad y(-\frac{1}{2}) = r, \;\; u(-\frac{1}{2}) =: \alpha, \\ x(t_1) = t_1, \;\; y(t_1) =: y_0, \;\; u(t_1) = 0. \end{array}$$

Im Kontaktfall ist $t_1 \le 0$, $y_0 = R$, $\alpha = \arccos(\frac{r^2}{R^2})$; (Vergleich mit dem Didoproblem im $\mathbb{R}^2$: im Kontaktfall ist dort $\alpha = \arccos(\frac{r}{R})$). Ist $t_1 < 0$, dann ist die Lösung bis $s = 0$ mit $x = s,\ y = R,\ u = 0$ fortzusetzen.
Für jedes hinreichend große R (kein Kontakt) ist formal $t_1 = 0$, und y_0 und α hängen nicht von R ab.

5)**Auswertung und Simulationen**
Zur Integration der Differentialgleichungen betrachten wir zunächst den Fall $t_1 < 0$. Dann ist

$$\alpha = \arccos(\frac{r^2}{R^2}).$$

Die Transformation

$$y = R\eta$$

ergibt $\dot{\eta} = \frac{1}{R}\sin u = \frac{1}{R}\sqrt{1-\cos^2 u}$ und schließlich

$$\begin{array}{l} \dot{\eta} = \frac{1}{R}\sqrt{1-\eta^4}, \;\; \eta(-\frac{1}{2}) = \frac{r}{R}, \\ \dot{x} = \eta^2, \;\; x(t_1) = t_1. \end{array}$$

t_1 bestimmt sich durch die Forderung

$$\eta(t_1 - 0) = 1.$$

Mit bekanntem t_1 ist dann die Bestimmung von x eine Quadratur, das ganze Problem ist auf eine Randwertaufgabe für η reduziert, die sich ebenfalls durch Quadraturen lösen lässt. Wir verwenden die elliptischen Integrale 1. und 2. Art,

$$F(z,k) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}dt, \;\; E(z,k) = \int_0^z \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

die auf dem Computer leicht handhabbar sind, und setzen

$$\mathcal{F}(z) := F(z,i) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt, \;\; \mathcal{E}(z) := E(z,i) = \int_0^z \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Die Lösung der ersten Differentialgleichung wird dann durch

$$R(\mathcal{F}(\eta) - \mathcal{F}(\frac{r}{R})) = s + \frac{1}{2}, \quad \eta \in [\frac{r}{R}, 1]$$

gegeben.

Mit $\eta = 1$ folgt daraus sofort der Punkt t_1, für den $u(t_1) = 0$ und $y(t_1) = R$ ist. Also ist

$$t_1 = -\frac{1}{2} + R(\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\frac{r}{R})).$$

Mit $t_2 = -t_1$ ergibt sich die *Länge des Kontaktintervalls*

$$l_c = 1 - 2R(\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\frac{r}{R})).$$

Aus der Gleichung

$$2R(\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\frac{r}{R})) = 1$$

berechnet sich der Rohrradius $\bar{R}(r)$, bei dem einpunktiger Kontakt Meridian-Rohr auftritt, für $R > \bar{R}(r)$ tritt kein Kontakt auf. $\bar{R}(r)$ ist damit der Radius des Äquators bei maximalem Volumen ohne Restriktion. Damit gilt

$$y_0 = \begin{cases} R, & \text{falls } R \leq \bar{R}(r) \\ \bar{R}(r), & \text{falls } R > \bar{R}(r) \end{cases}, \quad \alpha = \arccos(\frac{r^2}{y_0^2}).$$

Die Extremale (Standardmeridian) berechnet sich aus

$$\frac{dx}{d\eta} = y_0 \frac{\eta^2}{\sqrt{1-\eta^4}} = y_0 \{ \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{1-\eta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\eta^4}} \}$$

mittels Integration $\int_1^\eta ...d\eta$. Die komplette *Parameterdarstellung des Meridians* (linke Hälfte, $s \in [-\frac{1}{2}, 0]$) ist dann

$$\left.\begin{array}{l} x(\eta) = -\frac{1}{2} + y_0\{\mathcal{E}(\eta) - \mathcal{E}(1) - \mathcal{F}(\eta) + 2\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\frac{r}{y_0})\} \\ y(\eta) = y_0 \eta \,, \end{array}\right\} \quad \eta \in [\frac{r}{y_0}, 1],$$

$$\text{falls } R < \bar{R}(r): \quad \left.\begin{array}{l} x(\eta) = \{-\frac{1}{2} + R(\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\frac{r}{R})\}(2-\eta) \\ y(\eta) = R \end{array}\right\} \quad \eta \in (1, 2].$$

Bemerkung: Dass hier $\eta = y/R$ für den Extremalenabschnitt $s \in [-\frac{1}{2}, t_1)$ als Kurvenparameter verwendet werden kann, ist durch die strenge Monotonie $y(\cdot) \uparrow_r^R$gewährleistet.

Das *maximale Volumen* $\mathcal{V} = 2\pi(-t_1 R^2 + \int_{-\frac{1}{2}}^{t_1} y^2 \cos u \, ds)$ berechnet sich mit $\cos u \, ds = \frac{dx}{d\eta} d\eta = R\eta^2(1-\eta^4)^{-\frac{1}{2}} d\eta$ als

$$\mathcal{V}(r, R) = \pi R^2 + \frac{2\pi}{3} R^3 \{ \frac{r}{R} \sqrt{1 - (\frac{r}{R})^4} - 2(\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\frac{r}{R})) \}, \quad r < R \leq \bar{R}(r).$$

Der *Inhalt der Mantelfläche* bei maximalem Volumen ist $\mathcal{S} = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} yds = 4\pi[\int_{-\frac{1}{2}}^{t_1} yds - Rt_1]$. Mit $ds = \frac{R}{\sqrt{1-\eta^4}} d\eta$ berechnet sich das Integral in der Form $\int_{\frac{r}{R}}^{1} \frac{R^2\eta}{\sqrt{1-\eta^4}} d\eta$, und es folgt

$$\mathcal{S}(r,R) = 2\pi R\{R \arccos(\frac{r^2}{R^2}) + 1 - 2R(\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\frac{r}{R}))\}, \;\; r < R \leq \bar{R}(r).$$

Für alle $R > \bar{R}(r)$ ist

$$\mathcal{S}(r,R) = \mathcal{S}(r,\bar{R}(r)) = 2\pi R_0^2(r) \arccos(\frac{r^2}{R_0^2(r)}).$$

Bemerkung: Alle längendimensionierten Größen sind in den Rechnungen mit der Meridianlänge L_0 normiert (L_0 als Längeneinheit).Bei Meridianlänge $L_0 \neq 1$ sind s, x, und y mit L_0 zu multiplizieren, $\mathcal{V}$ erhält den Faktor L_0^3, $\mathcal{S}$ den Faktor L_0^2.

Die Diagramme in den folgenden Figuren ergeben sich unmittelbar aus den vorangegangenen Formeln mittels Maple 7. (In [11] hingegen wurden alle Graphiken durch numerische Integration der Randwertprobleme gewonnen.)

Die drei Abbildungen 5 - 6 zeigen, in Abhängigkeit von r, den maximalen (ohne Restriktion) Radius $\bar{R}(r)$ und die zugehörigen Volumina $\mathcal{V}(r,\bar{R}(r))$ und Inhalte der Mantelflächen, $\mathcal{S}(r,\bar{R}(r))$. Für die Funktion $r \longmapsto \bar{R}(r)$ ist

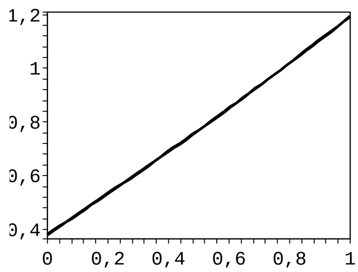


Abbildung 5: Unrestringierter Radius $\bar{R}$ über r

$$r \longmapsto .382210 + .745230r + .060065r^2 + .005035r^3$$

eine brauchbare L^2-Approximation mit einem relativen Fehler $\leq .42\%$ im Bereich $r \in [0, 1.5]$.

Für Radien $r = 0, .25, .5, .75$ sind in den folgenden Figuren (Abbildungen 7 und 8) die Volumina $\mathcal{V}(r,R)$, Mantelflächeninhalte $\mathcal{S}(r,R)$ und Kontaktlängen $l_c(r,R)$ in Abhängigkeit von $R \in (0,\bar{R}(r))$ dargestellt. Schließlich werden noch die Formen (Längsschnitt, obere Hälfte) der Segmente mit Radien $r = .025$ und $r = .25$ unter verschiedenen Restriktionen ($R = r + k(\bar{R}(r) - r)/4$, $k = 1...4$) angegeben. Die zugehörigen Werte der Volumina und Flächeninhalte sind vermerkt (Abbildung 9).

(a) Volumen bei $R = \bar{R}(r)$ über r

(b) Inhalt der Mantelfläche bei $R = \bar{R}(r)$ über r

Abbildung 6: Volumina und Mantelflächeninhalte

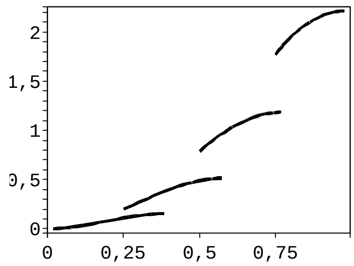


Abbildung 7: Maximales Volumen über $R = r...\bar{R}(r)$ für $r = 0, .25, .5, .75$

3.3.1 Maximales Volumen eines Rotationskörpers, Festrand

Betrachtet wird

$$\pi \int_{-a}^{a} y^2(x)dx \to \max, \quad \begin{array}{l} y \in D^1[-a, a], \quad 0 < a < 1/2 \\ y(-a) = y(a) = r > 0, \\ 0 < y(x) \leq R, \;\; R > r, \\ \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = 1, \end{array}$$

und das entsprechende Optimalsteuerproblem

$$(\mathbf{P7}) \quad \int_{-1/2}^{1/2} y^2(s) \cos u(s) ds \to \max, \quad \begin{array}{l} (x, y) \in D_2^1[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \; u \in D^0[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ x(\pm\frac{1}{2}) = \pm a, \;\; y(\pm\frac{1}{2}) = r, \\ \dot{x} = \cos u, \;\; \dot{y} = \sin u, \\ 0 < y(s) \leq R, \; 0 < r < R. \end{array}$$

In den Optimalitätsbedingungen ist der einzige aber wesentliche Unterschied zum Problem (P6) das Fehlen der Transversalitätsbedingung $\lambda_1(-\frac{1}{2}) = 0$. Dies führt zu $\lambda_1(s) = d \in \mathbb{R}$ und damit zu einem Erhaltungssatz mit zwei Konstanten,

$$d = c \cos u + y^2.$$

(a) Inhalt der Mantelfläche bei maximalem Volumen über $R = r...\bar{R}(r)$ für $r = 0, .25, .5, .75$

(b) Kontaktlänge bei maximalem Volumen über $R = r...\bar{R}(r)$ für $r = 0..25, .5, .75$

Abbildung 8: Mantelflächeninhalte und Kontaktlängen

(a) Form für $r = .025$ und verschiedene R (Volumina $= .2e^{-2}$, $.37e^{-1}$, $.96e^{-1}$, .152, .178, Flächen = .157, .687, 1.101, 1.398, 1.579)

(b) Form für $r = .25$ und verschiedene R, (Volumina = .196, .311, .411, .484, .512, Flächen = 1.571, 2.016, 2.376, 2.652, 2.843)

Abbildung 9: Formen (Längsschnitt, obere Hälfte)

Dies hat zur Folge, dass $\cos u$ nicht mehr vorzeichenstabil ist, für die Steuerung u sind Werte in $[0, 3\pi/2)$ zulässig (vergleiche dazu auch die Ergebnisse in 3.2.2). Dann braucht zufolge $\dot{y} = \sin u$ aber $y(\cdot)$ nicht mehr monoton zu sein, und $\eta = y/R$ kann nicht mehr unbedenklich als Kurvenparameter für die Extremalen verwendet werden. Monoton bleibt wegen der Differentialgleichung $\dot{u} = 2y/c$ die Funktion $u(\cdot)$, und die Durcharbeitung kann mit Hilfe von u als Kurvenparameter erfolgen.

Die Auswertung wird hier nicht vorgenommen, sondern auf ein nachfolgendes Paper verschoben.

4 Problemerweiterungen: Optimalsteuerprobleme mit Innenbedingungen

4.1 Optimalsteuerprobleme bei Vorgabe von Werten für die Zustandsvariable im Innern des Zeitintervalls

Untersuche das Optimalsteuerproblem (1) - (5) mit zusätzlichen Innenbedingungen

$$x_{i_0}(\tilde{t}_\sigma) = x_{i_0},\ \tilde{t}_\sigma\ fest,\ t_0 < \tilde{t}_\sigma < T,\ i_0 = 1\ldots n_0,\ 1 \le n_0 \le n \tag{5*}$$

Im Folgenden soll es o.E.d.A. nur ein $\tilde{t}_\sigma =: \tilde{t}$ geben.
Eine solche Aufgabenstellung liegt z.B. für die betrachteten und für die noch zu behandelnden Probleme ($t_0 = -1/2$, $T = 1/2$, $\tilde{t} = 0$, $x(0) = 0$) vor, falls man gewisse Symmetrieeigenschaften der zulässigen Elemente beschreiben will.
Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für diese eingeschränkte Klasse zulässiger Elemente ergeben sich leicht nach Sektion 2, falls man $\delta\tilde{t} = 0$, $\delta x_{i_0}(\tilde{t}) = 0$ und damit $\Delta x_{i_0}(\tilde{t}) = 0$ für zulässige Variationen berücksichtigt. Da dann in den Variationsgleichungen die entsprechenden Variationsfaktoren nicht mehr beliebig sind, folgt deshalb in $\tilde{t}$ die Stetigkeit der Multiplikatoren $\lambda_{i_0}(\cdot)$ bzw. der Hamiltonfunktion $H(\cdot)$ nicht notwendig. Die Eulergleichungen sind nur noch in $[t_0, \tilde{t}\,)$ und $(\,\tilde{t}, T]$ notwendig.

Satz 4.1 *(x,u)* auf $[t_0, T]$ löst das Bolzaproblem (1) - (5) unter der Zusatzrestriktion (5*) unter den in Sektion 2 formulierten Voraussetzungen. Die Ausnahmemenge E wird durch $\tilde{E} := E \cup \{\tilde{t}\}$ und die Ausnahmemenge B durch $\tilde{B} := B \cup \{\tilde{t}\}$ ersetzt. Dann folgt:
$\exists$ Multiplikatorenvektor $(l_0, l, \lambda(\cdot), \mu(\cdot), \rho(\cdot)) \neq 0\ \forall t$ mit $l_0 \geq 0$, $l \in \mathbb{R}^q$, $\lambda \in D_n^1[t_0.\tilde{t}]$ und $\lambda \in D_n^1[\tilde{t}, T]$, $\mu \in D_m^0[t_0, T]$, $\rho \in D_1^0[t_0, T]$, so daß die notwendigen Bedingungen (i) - (viii), (x) - (xiv) auf $\tilde{E}$ bzw. $\tilde{B}$ gelten. Bedingung (ix) wird durch

$$H(\cdot, x(\cdot), u(\cdot), \lambda(\cdot), \rho(\cdot)) \in D_1^1[t_0, \tilde{t}\,] \quad \text{und} \quad \in D_1^1[\,\tilde{t}, T]$$

ersetzt.

Bemerkung: Falls es mehrere $\tilde{t}_\sigma$ gibt, ist dort analog zu verfahren.

4.2 Optimalsteuerprobleme mit unstetigem Integranden im Zielfunktional

Für die spätere Behandlung weiterer applikativer Problemklassen sind notwendige Bedingungen für Extremalprobleme gesucht, bei denen der Integrand des Zielfunktionals in einem variablen Innenpunkt $\bar{t}$ (der durch eine Schaltfunktion S determiniert wird) seine Struktur ändert. Klassische Probleme dieser Art sind der Start und der Flug von Unterwasserraketen und ihr Verhalten beim Übergang vom Wasser in die Luft, sowie der Weg eines Lichtstrahls, der Medien mit verschiedenen Brechungsindices durchläuft.

4.2.1 Variationsprobleme

Untersuche das Variationsproblem

$$J(w) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, w, \dot{w})\, dt \to min, \qquad \begin{array}{l} w \in D_n^1[t_0, T], \\ w(t_0)\, fest, \;\; w(T)\, frei, \;\; t_0, T\, fest \end{array} \tag{PVI}$$

Sei $S : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \; m \leq n, \; S(\cdot, \cdot) \in C^1, \; rg(S_{,(t,w)}) = m \; (max)$ und

$$f_0(t, w(t), \dot{w}(t)) := \begin{cases} f_1(t, w(t), \dot{w}(t)) \; auf \; I_1 = \{t : S(t, w(t)) < 0\} \\ f_2(t, w(t), \dot{w}(t)) \; auf \; I_2 = \{t : S(t, w(t)) > 0\} \\ f_3(t, w(t), \dot{w}(t)) \; auf \; I_3 = \{t : S(t, w(t)) = 0\} \end{cases},$$

$f_1 \in C^2(I_1 \times \mathbb{R}^{2n}), \; f_2 \in C^2(I_2 \times \mathbb{R}^{2n}), \; f_3 \in C^2(I_3 \times \mathbb{R}^{2n})$,

Annahmen:

1. Es gibt genau eine Durchgangsstelle $\bar{t} \, : \, sgnS(\bar{t} - \epsilon, w(\bar{t} - \epsilon)) \neq sgnS(\bar{t} + \epsilon, w(\bar{t} + \epsilon))$, mit $sgnS^- \neq 0, \; sgnS^+ \neq 0$. Falls es mehrere (endlich viele!) $\bar{t}$ gibt, ist dort sinngemäß zu verfahren.
2. Knickpunkte der Extremalen $w(\cdot)$ sollen höchstens in $\bar{t}$ auftreten. Falls es weitere Knickpunkte in $t_\beta \in [t_0, T]$ gibt, sind dort die klassischen Knickbedingungen anzusetzen.

Zulässige Vergleichskurvenscharen und zulässige Variationen

Betrachte zu einem zulässigen (später optimalen) $w = w(t)$ in $[t_0, T]$ mit $S(\bar{t}, w(\bar{t})) = 0$ bzw. in Parameterdarstellung

$$E := \begin{cases} t = \tau \\ w = w(\tau) \end{cases}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_T] := I \text{ mit } \bar{\tau} = \bar{t}, \, \tau_0 = t_0, \, \tau_T = T$$

eine Vergleichskurvenschar

$$E_b := \begin{cases} t = \tau + b\delta t(\tau) \\ w = w(\tau) + b\delta w(\tau) \end{cases}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_T], \; b \in U(0) \subset \mathbb{R}$$

mit $\delta t(\cdot) \in D^1(I), \; \delta w(\cdot) \in D_n^1(I), \; \delta t(\tau_0) = 0, \; \delta w(\tau_0) = 0$ und

$$S|^{\bar{\tau}} \; = \; S(\bar{\tau} + b\delta t(\bar{\tau}), w(\bar{\tau}) + b\delta w(\bar{\tau})) = 0 \;\; \forall b.$$

Hieraus ergibt sich eine Bedingung für zulässige Variationen in $\bar{\tau}$

$$S_{,t}\,(\bar{\tau}, w(\bar{\tau}))\delta t(\bar{\tau}) + S_{,w}\,(\bar{\tau}, w(\bar{\tau}))\delta w(\bar{\tau}) = 0. \tag{16}$$

Die Variationen $\delta t, \delta w$ in $\tau = \bar{\tau}$ sind also nicht unabhängig.
Die Schar E_b ist zulässig: Wegen $\frac{dt}{d\tau} = 1 + b\delta t'(\tau) \neq 0$ für $b \in U(0)$ existiert $\tau = \tau(t, b)$. Dann folgt für $w(t, b) := w(\tau(t, b)) : \; w(\cdot, b) \in D_n^1, \; w(t_0, b) = w(t_0, 0) = w(t_0) \; \forall\, b, \; w(t, \cdot) \in$

C^1, also die Zulässigkeit.

Variation des Zielfunktionals über $[t_0, \bar{t}]$

Für das Teilfunktional $J_1 := J|_{[t_0,\bar{t}]}$ läßt sich die Variation δJ_1 aus

$$J_1(w_b) = \int_{\tau_0}^{\bar{\tau}} f_1 \left(\tau + b\delta t(\tau), w(\tau) + b\delta w(\tau), \frac{w'(\tau) + b\delta w'(\tau)}{1 + b\delta t(\tau)} \right) (1 + b\delta t'(\tau))\, d\tau$$

berechnen:

$$\delta J_1 = \int_{\tau_0}^{\bar{\tau}} \big(f_{1,t}(\cdot)\delta t(\tau) + f_{1,w}(\cdot)\delta w(\tau) + f_{1,\dot{w}}(\cdot)(\delta w'(\tau) - w'(\tau)\delta t'(\tau)) + f_1(\cdot)\delta t'(\tau) \big)\, d\tau$$

bzw. nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \delta J_1 \ &= \textstyle\int_{\tau_0}^{\bar{\tau}} \left(\left(\left(f_{1,t}(\cdot) - (f_1(\cdot) - \dot{w} f_{,\dot{w}}(\cdot)') \right) \delta t(\tau) + \left(f_{1,w}(\cdot) - (f_{1,\dot{w}}(\cdot))' \right) \right) \delta w(\tau) \right) d\tau \\ &+ f_{1,\dot{w}}|^{\bar{\tau}-0}\, \delta w(\bar{\tau}) + (f_1 - \dot{w} f_{1,\dot{w}}|^{\bar{\tau}-0} \delta t(\tau). \end{aligned}$$

Für $J_2 := J|_{[\bar{t},T]}$ ergibt sich δJ_2 analog.

Auswertung

Für extremale Elemente ist $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0$ eine notwendige Optimalitätsbedingung. Eine standardmäßige Auswertung dieser Bedingung unter Verwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung liefert die bekannten Eulergleichungen und den Energiesatz jeweils in den Intervallen $I_1 = [t_0, \bar{t})$ und $I_2 = (\bar{t}, T]$:

$$f_{k,w} - \frac{d}{dt} f_{k,\dot{w}} = 0, \quad in\ I_k,\ k = 1, 2 \tag{17}$$

$$f_{k,t} - \frac{d}{dt}(f_k - \dot{w} f_{k,\dot{w}}) = 0 \quad in\ I_k,\ k = 1, 2. \tag{18}$$

Da $w(T)$ frei, also $\delta w(\tau_T)$ beliebig ist, ergibt sich die klassische Transversalitätsbedingung $f_{2,\dot{w}}|^T = 0$. Es bleibt

$$\begin{aligned} &\Big((f_1 - \dot{w} f_{1,\dot{w}})|^{\bar{t}-0} \ - \ (f_2 - \dot{w} f_{2,\dot{w}})|^{\bar{t}+0} \Big)\ \delta t(\bar{\tau}) \\ &+ \Big(f_{1,\dot{w}}|^{\bar{t}-0} - f_{2,\dot{w}}|^{\bar{t}+0} \Big)\, \delta w(\bar{t}) \ = \ 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$\forall\ (\delta t(\bar{\tau}), \delta w(\bar{\tau}))$ mit

$$S_{,t}|^{\bar{\tau}}\, \delta t(\bar{\tau}) \ + \ S_{,w}|^{\bar{\tau}}\, \delta w(\bar{\tau}) \ = \ 0. \tag{20}$$

(20) ist ein homogenes Gleichungssystem für die $(\delta t, \delta w)|^{\bar{\tau}} \in \mathbb{R}^{1+n}$, dessen Koeffizientenmatrix $(S_{,t}\ \ S_{,w})|^{\bar{t}}$ maximalen Rang m hat. Damit sind m Komponenten von $(\delta t, \delta w)|^{\bar{\tau}}$ von den restlichem $(1 + n - m)$ abhängig.
Berücksichtigt man diese Abhängigkeit bei der Auswertung von (19), ergeben sich $1+n-m$ Knickbedingungen in $\bar{t}$.

Satz 4.2 (notwendige Optimalitätsbedingung)
$w(t)$ in $[t_0, T]$ mit einer Durchgangsstelle $\bar{t}$ löst das Variationsproblem (PVI). Dann folgt

$$
\begin{array}{lll}
(i) & f_{1,w} - \frac{d}{dt} f_{1,\dot{w}} = 0 & \text{auf } I_1 \\
 & f_{2,w} - \frac{d}{dt} f_{2,\dot{w}} = 0 & \text{auf } I_2, \\
(ii) & f_{1,\dot{w}}\,(\cdot, w(\cdot), \dot{w}(\cdot)) & \text{auf } I_1 \text{ und} \\
 & f_{2,\dot{w}}\,(\cdot, w(\cdot), \dot{w}(\cdot)) & \text{auf } I_2 \text{ sind stetig,} \\
(iii) & (f_1 - \dot{w} f_{1,\dot{w}})(\cdot) & \text{ist auf } I_1 \text{ und} \\
 & (f_2 - \dot{w} f_{2,\dot{w}})(\cdot) & \text{ist auf } I_2 \text{ stetig,} \\
(iv) & f_{1,t} - \frac{d}{dt}(f_1 - \dot{w} f_{1,\dot{w}}) = 0 & \text{auf } I_1 \\
 & f_{2,t} - \frac{d}{dt}(f_2 - \dot{w} f_{2,\dot{w}}) = 0 & \text{auf } I_2 \\
(v) & f_{2,\dot{w}}\,|^{T} \;=\; 0, & \\
(vi) & \left[(f_1 - \dot{w} f_{1,\dot{w}})|^{\bar{t}-0} - (f_2 - \dot{w} f_{2,\dot{w}})|^{\bar{t}+0} \right] \delta\bar{t} & \\
 & \qquad + \left[f_{1,\dot{w}}\,|^{\bar{t}-0} - f_{2,\dot{w}}\,|^{\bar{t}+0} \right] \delta w(\bar{t}) = 0 & \\
 & \forall\; (\delta\bar{t}, \delta w(\bar{t})) \text{ mit } S_{,t}\,|^{\bar{t}}\, \delta\bar{t} \;+\; S_{,w}\,|^{\bar{t}}\, \delta w(\bar{t}) = 0. &
\end{array}
$$

Diskussionen und Bemerkungen:

1. Falls es Knickstellen t_β von w außerhalb von $\bar{t}$ gibt, gelten (i) und (iv) jeweils zwischen diesen Knickstellen.
2. Für Schaltfunktionen der Form $S(w) := R(x) - y,\; w := (x, y),\; n = 2,\; m = 1$, für die die Rangbedingung für den Gradienten von S trivialerweise erfüllt ist, müssen zulässige Variationen in der Durchgangsstelle $\bar{t}$ der Gleichung

$$\delta y(\bar{t}) = -R'(x(\bar{t}))\delta x(\bar{t})$$

genügen. Nach (19) und (20) ergeben sich (Knickbedingungen)

$$(f_1 - \dot{x} f_{1,\dot{x}} - \dot{y} f_{1,\dot{y}})|^{\bar{t}-0} = (f_2 - \dot{x} f_{2,\dot{x}} - \dot{y} f_{2,\dot{y}})|^{\bar{t}+0}$$

und

$$(f_{1,\dot{x}} + f_{1,\dot{y}}\,(-R'))|^{\bar{t}-0} = (f_{2,\dot{x}} + f_{2,\dot{y}}\,(-R'))|^{\bar{t}+0}.$$

3. Für Schaltfunktionen der Form $S(t, w) := w - g(t),\; n = 1,\; S(\bar{t}, w(\bar{t})) = 0,\; \delta w = \dot{g}\delta t$ ergeben sich die Knickbedingungen

$$\left[(f_1 - \dot{w} f_{1,\dot{w}} + \dot{g} f_{1,\dot{w}})|^{\bar{t}-0} - (f_2 - \dot{w} f_{2,\dot{w}} + \dot{g} f_{2,\dot{w}})|^{\bar{t}+0} \right] \delta t(\bar{t}) \;=\; 0$$

also

$$(f_1 - f_{1,\dot{w}}\,(\dot{w} - \dot{g}))|^{\bar{t}-0} \;=\; (f_2 - f_{2,\dot{w}}\,(\dot{w} - \dot{g}))|^{\bar{t}+0}.$$

4. Falls es mehrere Durchgangsstellen $\bar{t}$ gibt, gelten die notwendigen Bedingungen des Satzes sinngemäß, unter Beachtung der Form des Integranden in $\bar{t}-\epsilon$ und $\bar{t}+\epsilon,\ \ \epsilon>0$.

5. In diesen $\bar{t}$ sind also die üblichen Knickbedingungen (i) und (iii) nicht notwendig. Dafür muß (vi) zusammen mit $S(\bar{t},w(\bar{t}))=0$ gelten.

6. Bei gemischten Randbedingungen für $w:=(\bar{w},\bar{\bar{w}}),\ \bar{w}(t_0)=\bar{w}_0,\ \bar{w}(T)=\bar{w}_T$ fest, $\bar{\bar{w}}(t_0)$ und $\bar{\bar{w}}(T)$ frei, ergeben sich die notwendigen Optimalitätsbedingungen (Transversalitätsbedingungen) auf klassische Weise:

$$f,_{\dot{\bar{\bar{w}}}}|^{t_0}=0,\ \ f,_{\dot{\bar{\bar{w}}}}|^{T}=0.$$

Falls in t_0 und in T nicht die gleichen Komponenten von w frei sind, ist sinngemäß zu verfahren.
7. Für den Fall $int\, I_3\neq\varnothing$, d.h. $S(t,w(t))\equiv 0$ in I_3 muß für zulässige Variationen

$$S,_t\,\delta t+S,_w\,\delta w\equiv 0\quad\forall t\in\ I_3$$

gelten. Im Zusammenhang mit der vorausgesetzten Rangbedingung für $(S,_t\ \ S,_w\,)$ ergeben sich intervallweise bzw. an den Rändern von I_3 Abhängigkeiten für die zulässigen Variationen. Diese wirken sich nicht nur auf die Knickbedingungen an den Rändern von I_3, sondern auch auf die Form der Eulergleichungen in $int\, I_3$ aus. Die Herleitung der entsprechenden Optimalitätsbedingung kann man durch leichte Veränderung des Beweises zum Satz selbst vornehmen.

8. Falls - wie im angestrebten Anwendungsfall - eine zusätzliche Innenbedingung zu $w:=(\bar{w},\bar{\bar{w}})$ in der Form $\bar{w}(t_2)=0,\ t_2\in\ (t_0,T)$ fest, vorliegt, folgt $\delta\bar{w}(t_2)=0$ und deshalb ist die Stetigkeit von $f,_{\dot{\bar{w}}}(\cdot)$ in t_2 nicht mehr notwendig.

4.2.2 Optimalsteuerprobleme

$$J(u)=\int_{t_0}^{T}f_0(t,w,u)\,dt\rightarrow min,\qquad \begin{array}{l} w\in D^1_n[t_0,T],\ u\in D^0_m[t_0,T]\\ \dot{w}=f(t,w,u)\\ w(t_0)\,fest,\ \ w(T)\,frei,\ \ t_0,T\,fest\end{array}\qquad (POI)$$

Sei $S:[t_0,T]\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m,\ m\leq n,\ S(\cdot,\cdot)\in C^1,\ rg(S,_t\ \ S,_w\,)=m\,(max)$ und

$$f_0(t,w(t),u(t)):=\left\{\begin{array}{ll} f_1(t,w(t),u(t)) & auf\ I_1=\{t:S(t,w(t))<0\}\\ f_2(t,w(t),u(t)) & auf\ I_2=\{t:S(t,w(t))>0\}\end{array}\right.$$

Bezeichnung: $\bar{t}$ mit $S(\bar{t},w(\bar{t}))=0,\ 0\neq sgn\,S(\bar{t}+\epsilon,w(\bar{t}+\epsilon))\neq sgn\,S(\bar{t}-\epsilon,w(\bar{t}-\epsilon))\neq 0,\ \epsilon>0,\ w(t)$ Lösung des (POI), heißen Durchgangsstellen.

Annahmen:
1. $int\ I_3\ =\ \emptyset$.

2. $\exists$ endlich viele Durchgangsstellen $\bar{t}$.
3. technische Annnahme: $\exists$ genau ein $\bar{t}$ mit o.B.d.A $S|^{\bar{t}-\epsilon} < 0$ und $S|^{\bar{t}+\epsilon} > 0$. Bei mehreren $\bar{t}$ sind die folgenden Optimalitätsbedingungen sinngemäß anzuwenden.

Satz 4.3 (notwendige Optimalitätsbedingung)
$(w(t),\, u(t))$ *in* $[t_0, T]$ mit einer Durchgangsstelle $\bar{t}$ löst das Optimalsteuerproblem (POI).
Dann folgt: $\exists\, (l_0, \lambda(t)) \neq 0,\ \lambda \in D_n^1([t_0, T] \setminus \{\bar{t}\}),\ l_0 \geq 0,$ so daß mit

$$H(t, w, u; \lambda) := l_0 f_0(t, w, u) + \lambda f(t, w, u) \text{ in } I$$

(bzw. $H_1 := l_0 f_1 + \lambda f$ in I_1 und $H_2 := l_0 f_2 + \lambda f$ in I_2) gilt:

(i) $\quad \dot{\lambda} = -H_{1,w}$ in I_1 bzw. $\dot{\lambda} = -H_{2,w}$ in I_2
zwischen den Unstetigkeitspunkten von u

(ii) $\quad H_{,u} = 0\ \forall\, t \in [t_0, T]$

(iii) $\quad H_1$ auf I_1 und H_2 auf I_2 stetig

(iv) $\quad H_{1,t} = \dot{H}_1$ in I_1 bzw. $H_{2,t} = \dot{H}_2$ in I_2
zwischen den Unstetigkeitspunkten von u

(v) $\quad (H_1|^{\bar{t}-0} - H_2|^{\bar{t}+0})\delta\bar{t} + (\lambda(\bar{t}-0) - \lambda(\bar{t}+0))\delta w(\bar{t}) = 0$
$\forall (\delta\bar{t}, \delta w(\bar{t}))$ mit $S_{,t}\,|^{\bar{t}}\delta\bar{t} + S_{,w}\,|^{\bar{t}}\delta w(\bar{t}) = 0$

(vi) $\quad \lambda(T) = 0.$

Bemerkung:
Im Fall $w = (x, y),\ S := y - R(x)$ gilt für zulässige Variationen $\delta y(\bar{t}) = R_{,x}\,(x(\bar{t}))\delta x(\bar{t})$ und $\delta\bar{t}$ unabhängig. Dann zerfällt die Knickbedingung (v) in zwei Knickbedingungen:

$$H_1|^{\bar{t}-0} \;=\; H_2|^{\bar{t}+0}$$

und

$$(\lambda_1 + \lambda_2 R_{,x}\,)|^{\bar{t}-0} \;=\; (\lambda_1 + \lambda_2 R_{,x}\,)|^{\bar{t}+0}.$$

Beweisskizze:
Man verfolge den Beweis von Satz (4.2) und nehme kleine Ergänzungen vor.

1. Zu $(w(t), u(t))$ in $[t_0, T]$ mit einer Durchgangsstelle $\bar{t}$, d.h. zu

$$E_0 := \begin{cases} t &= \tau \\ w &= w(\tau) \\ u &= u(\tau) \end{cases} ,\tau \in [t_0, T] =: [\tau_0, \tau_T],\ \ \bar{\tau} := \bar{t}$$

wird eine zulässige Familie

$$E_b := \begin{cases} t &= \tau + b\delta t(\tau) \\ w_b &= w(\tau) + b\delta w(\tau) \\ u_b &= u(\tau) + b\delta u(\tau) \end{cases} ,\ b \in U(0)$$

mit $\delta t(\cdot) \in D^1,\ \delta w(\cdot) \in D^1_n,\ \delta u(\cdot) \in D^0_m$ auf $[t_0, T]$, $\delta t(\tau_0) = 0,\ \delta w(\tau_0) = 0$ und $\dot{w}_b = f(t, w_b, u_b)\ \forall b \in U(0)$ betrachtet.

2. Für $l_0 = 1$ läßt sich die Struktur der notwendigen Bedingungen für das POI anhand der notwendigen Bedingungen für das PVI plausibel machen. Für $l_0 \geq 0$ müssen wie in den klassischen Fällen Trennungssätze zur Herleitung der notwendigen Bedingungen herangezogen werden.
Ersetze f_1 durch $F_1 := f_1 + \lambda(f - \dot{w}) =: H_1 - \lambda\dot{w}$, $\quad f_2$ durch $F_2 = f_2 + \lambda(f - \dot{w}) =: H_2 - \lambda\dot{w}$.
Betrachte für zulässige (w, u)

$$J(u) = \int_0^{\bar{t}} F_1\, dt + \int_{\bar{t}}^T F_2\, dt.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\delta J \ &= \textstyle\int_{\tau_0}^{\bar{\tau}} (F_{1,t}\, \delta t + (F_1 - F_{1,\dot{w}}\, \dot{w})\delta t' + F_{1,w}\, \delta w + F_{1,\dot{w}}\, \delta\dot{w})\, d\tau \\ &+ \textstyle\int_{\bar{\tau}}^{\tau_T} (F_{2,t}\, \delta t + (F_2 - F_{2,\dot{w}}\, \dot{w})\delta t' + F_{2,w}\, \delta w + F_{2,\dot{w}}\, \delta\dot{w})\, d\tau\end{aligned}$$

Für zulässige Variationen muß $\delta\dot{w} = f_{,t}\, \delta t + f_{,w}\, \delta w + f_{,u}\, \delta u$ gelten. Verwendet man

$$F_{\mu,w} = H_{\mu,w}\,,\ F_{\mu,\dot{w}} = -\lambda^{(\mu)},\ F_{\mu,t} = H_{\mu,t}\,,\ F_\mu - F_{\mu,\dot{w}}\, \dot{w} = H_\mu,\ F_{\mu,u} = H_{\mu,u}\,,\ \mu = 1, 2$$

und $\lambda^{(1)} := \lambda_{[\tau_0, \bar{\tau}]},\ \lambda^{(2)} := \lambda_{[\bar{\tau}, \tau_T]}$ ergeben sich nach Schlüssen, die analog zu denen im Beweis von Satz (4.2) verwendeten sind, die Aussagen von Satz (4.3).

Die Bemerkungen im Anschluß an Satz (4.2) bleiben sinngemäß gültig; insbesondere die Bemerkung 7..

5 Variationsprobleme unter Zustandsrestriktionen

Ziele dieses Abschnitts sind:

1. Diskussion weiterer Extremalprobleme mit verschiedenen Zustandsrestriktionen (Gleichungen und Ungleichungen, holonome und nichtholonome Nebenbedingungen)
2. Vorstellung und Diskussion der direkten und der indirekten Methode. Begründung der notwendigen Bedingung $\dot{\rho} \geq 0$ (stückweise) aus Satz 2.1
3. Bezug zu Integralprinzipien der Analytischen Mechanik und Vorstellung des Sonderfalles mit nichtholonomen Nebenbedingungen
4. (Deshalb) Beschränkung auf Variationsprobleme, an denen die wesentlichen Strukturen schon zu erkennen sind

Die folgenden beiden Sätze finden sich in [7] S.50 ff. Sie sind die Verallgemeinerungen des klassischen Fundamentallemmas der Variationsrechnung auf die betrachteten Fälle.

Satz 5.1 Seien $M(\cdot)$ und $N(\cdot)$ in $D^0[a,b]$ und sei $\overset{\circ}{D}{}^1[a,b] := \{h \in D^1[a,b],\, h(a) = h(b) = 0\}$. Dann gilt:

$$L(h) \;=\; \int_a^b (M(t)h(t) + N(t)\dot{h}(t))\,dt \;=\; 0 \quad \forall h \in \overset{\circ}{D}{}^1[a,b]$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists c \in \mathbb{R}: \quad N(t) \;=\; \int_a^t M(s)\,ds + c \quad \forall t \in [a,b]. \tag{21}$$

Falls (21) *gilt, folgt* $\dot{N} - M = 0$ *stückweise.*

Die Beweisidee läßt sich skizzieren: Berechne $L(h)$ für spezielle zulässige h_ϵ: Sei $\bar{t} \in [a,b]$, $\bar{t}$ ein Stetigkeitspunkt von $N(t)$ und $\epsilon :\, 0 < \epsilon < \frac{\bar{t}-a}{2}$. Betrachte

$$h_\epsilon(t) \;:=\; \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}(t-a) & a \le t \le a+\epsilon, \\ 1 & a+\epsilon \le t \le \bar{t}-\epsilon, \\ \frac{1}{\epsilon}(\bar{t}-t) & \bar{t}-\epsilon \le t \le \bar{t}, \\ 0 & \bar{t} \le t \le b. \end{cases} \;.$$

Berechne $\lim_{\epsilon\to 0} L(h_\epsilon) = 0$.

Satz 5.2 Seien $M(\cdot)$ und $N(\cdot)$ in $D^0[a,b]$ und sei $\overset{\circ}{D}{}^1[a,b] := \{h \in D^1[a,b],\, h(a) = h(b) = 0\}$. *Dann gilt:*

1. $L(h) = \int_a^b (M(t)h(t) + N(t)\dot{h}(t))\,dt \;\ge\; 0 \quad \forall\, h \in \overset{\circ}{D}{}^1[a,b],\; h(t) \ge 0,$

   $$\Leftrightarrow q(t) := N(t) \;-\; \int_a^t M(s)\,ds \text{ ist nicht wachsend auf } [a,b] \tag{22}$$

   $\Leftrightarrow N(\beta - 0) - N(\alpha + 0) \le \int_\alpha^\beta M(s)\,ds \quad \forall\,[\alpha,\beta] \subset [a,b]$

2. *Falls* (22) *gilt, folgt:* $N(c+0) \ge N(c-0)\;\forall\, c \in [a,b]$.

3. *Aus* (22) *folgt für* $N \in D^1$: $\quad \dot{N} - M \le 0$ *stückweise.*

Beweisidee: Berechne $L(h_\epsilon)$ für die in Satz 5.1 benutzte zulässige Funktion $h_\epsilon \ge 0$ und damit $\lim_{\epsilon\to 0} L(h_\epsilon) \ge 0$.

Folgerungen: Unter den Voraussetzungen der Sätze 5.1 bzw. 5.2 gilt:

1. $\int_a^b (M(t)h(t) + N(t)\dot{h}(t))\,dt = 0 \quad \forall\, h \in \overset{\circ}{D}{}^1[a,b],\, h \ge 0 \quad \Rightarrow$
   $\exists c \in \mathbb{R}: \quad N(t) \;=\; \int_a^t M(s)\,ds + c \quad \forall t \in [a,b]$
   und $N(\cdot)$ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar,

2. $\int_a^b M(t)h(t)\,dt = 0 \quad \forall\, h \in \overset{\circ}{D}{}^1[a,b] \quad \Rightarrow \quad M(t) = 0,$

3. Zusatz: Falls $K \in L^1[a,b]$, dann gilt:

$$\int_a^b K(t)\dot{h}(t)\,dt = 0 \;\forall\, h \in \overset{\circ}{D}{}^1[a,b] \;\Rightarrow\; K(t) = const.$$

   Siehe z.B. [4], S.42

5.1 Variationsprobleme unter geometrischen (holonomen) Zustandsrestriktionen

Bemerkung: Im ganzen Kapitel 5 wird $l_0 = 1$ (Normalität) vorausgesetzt.

Nebenbedingungen in Gleichungsform $S(x) = 0$

$$\textbf{(P8)} \quad I(x) = \int_{t_0}^T f(t,x,\dot{x})\,dt \to \min, \quad \begin{array}{l} x \in D_n^1[t_0,T], \quad f \in C^2 \\ x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad \text{(Festrand)} \\ S(x) = 0, \quad S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad k < n, \\ S \in C^2, \quad rg(S_{,x}(x)) = k \;\; \forall x \end{array}$$

Zulässige Variation:
$\delta x \in \overset{\circ}{D}{}_n^1[t_0,T],\; S_{,x}\,\delta x = 0$
Da $rg(S_{,x}) = k$ ist, gibt es zu jedem x eine reguläre Untermatrix $S_{,x_1} \in \mathbb{R}^{k\times k},\; S_{,x_1}(x) =: a(x)$, so daß (nach Umordnung) mit $S_{,x} = (a,b),\; a$ regulär, gilt:

$$S_{,x}\,\delta x \;=\; a\delta x_1 + b\delta x_2 = 0 \text{ genau dann, wenn}$$

$$\delta x_1 = -a^{-1}b\delta x_2 =: B\delta x_2 \text{ mit } \delta x_2 \in \overset{\circ}{D}{}_{n-k}^1 \text{ beliebig.} \tag{23}$$

Die $\delta x_1 \in \overset{\circ}{D}{}_k^1$ sind also abhängige Variationen.
Fall 1:
Zuerst wird der Fall $k = 1$ ($S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$) (nach einer Idee von Hestenes [7]) betrachtet. Für

$$A^T(t) := \frac{S_{,x}(x(t))}{|S_{,x}(x(t))|^2}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

folgt $S_{,x}(x(t))A(t) = 1 \;\forall\, t \in [t_0,T]$.

Spezielle Variationen: Betrachte eine beliebige Variation $\delta\tilde{x} \in \overset{\circ}{D}{}_n^1[t_0,T]$ und dazu eine Variation $\delta\varphi := S_{,x}\,\delta\tilde{x}$. Es folgt $\delta\varphi \in \overset{\circ}{D}{}^1[t_0,T]$. Für eine Variation $\delta\bar{x} := A\delta\varphi,\; \delta\bar{x} \in \overset{\circ}{D}{}_n^1[t_0,T]$, gilt dann $S_{,x}\,\delta\bar{x} = S_{,x}\,A\delta\varphi = \delta\varphi$. Eine dritte Variation $\delta x := \delta\tilde{x} - \delta\bar{x}$ ist zulässig: $S_{,x}\,\delta x = S_{,x}\,\delta\tilde{x} - S_{,x}\,\delta\bar{x} = S_{,x}\,\delta\tilde{x} - S_{,x}\,A\delta\varphi = S_{,x}\,\delta\tilde{x} - \delta\varphi = 0.$

Variation des Zielfunktionals
Falls $x(\cdot)$ auf $[t_0, T]$ Problem (P8) löst, folgt:

$$\delta I(x, \delta x) = \delta I(x, \delta\tilde{x}) - \delta I(x, \delta\bar{x}) = 0 \quad \forall\, \delta\tilde{x} \in \overset{\circ}{D}{}^1_n[t_0, T] \text{ und } \delta\varphi \in \overset{\circ}{D}{}^1[t_0, T].$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \delta I(x, \delta x)) &= \textstyle\int_{t_0}^T (f_{,x}\, \delta\tilde{x} + f_{,\dot{x}}\, \delta\dot{\tilde{x}})\, dt \;-\; \int_{t_0}^T (f_{,x}\, A\delta\varphi + f_{,\dot{x}}\, \frac{d}{dt}(A\delta\varphi))\, dt \\ &= \textstyle\int_{t_0}^T ((f_{,x}\, \delta\tilde{x} + f_{,\dot{x}}\, \delta\dot{\tilde{x}}) - (f_{,x}\, A + f_{,\dot{x}}\, \dot{A})\delta\varphi + f_{,\dot{x}}\, A\delta\dot{\varphi})\, dt \;=\; 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Mit

$$\mu(t) := f_{,\dot{x}}\, A - \int_{t_0}^t (f_{,x}\, A + f_{,\dot{x}}\, \dot{A})\, ds + d \tag{25}$$

läßt sich der $(\delta\varphi, \delta\dot{\varphi})$-Term umformen und die Struktur in Satz 5.1 ausnutzen. Partielle Integration ergibt eine andere Darstellung für μ:

$$\mu(t) = (f_{,\dot{x}} - \int_{t_0}^t f_{,x}\; ds)A - \int_{t_0}^t (f_{,\dot{x}} - \int_{t_0}^s f_{,x}\; d\tau)\dot{A}\, ds + d. \tag{26}$$

μ ist dann differenzierbar in allen Teilintervallen $[\alpha, \beta]$ von $[t_0, T]$, in denen $x \in C^2[\alpha, \beta]$. Mit diesem $\mu(t)$ hat der $(\delta\varphi, \delta\dot{\varphi})$-Term aus Formel (24) die Gestalt

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{t_0}^T \mu\, \delta\dot{\varphi}\, dt &= \textstyle\int_{t_0}^T (f_{,\dot{x}}\, A\delta\dot{\varphi} - \int_{t_0}^t (f_{,x}\, A + f_{,\dot{x}}\, \dot{A})\, ds\delta\dot{\varphi} + d \cdot \delta\dot{\varphi})\, dt \\ &= \textstyle\int_{t_0}^T (f_{,\dot{x}}\, A\delta\dot{\varphi} + (f_{,x}\, A + f_{,\dot{x}}\, \dot{A})\delta\varphi)\, dt, \quad \text{wobei per Definition} \\ \textstyle\int_{t_0}^T \mu\, \delta\dot{\varphi}\, dt &= \textstyle\int_{t_0}^T \mu \frac{d}{dt}(S_{,x}\, \delta\tilde{x})\, dt = \int_{t_0}^T ((\mu \frac{d}{dt} S_{,x})\delta\tilde{x} + \mu S_{,x}\, \delta\dot{\tilde{x}})\, dt. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich für die Variation von I nach Formel (24)

$$\delta I(x, \delta x) = \int_{t_0}^T ((f_{,x} - \mu\frac{d}{dt} S_{,x})\delta\tilde{x} + (f_{,\dot{x}} - \mu S_{,x}\, \delta\dot{\tilde{x}}))\, dt = 0 \quad \forall\, \delta\tilde{x} \in \overset{\circ}{D}{}^1_n[t_0, T].$$

Notwendige Bedingungen
Nach Satz 5.1 muß dann

$$f_{,\dot{x}} - \mu S_{,x} = \int_{t_0}^t (f_{,x} - \mu\frac{d}{dt} S_{,x})\, ds + c, \quad c \in \mathbb{R}^n \tag{27}$$

gelten. Sei $\dot{S}(x) = S_{,x}(x)\dot{x} =: R_0(x, \dot{x})$, also $S_{,x} = R_{0,\dot{x}}$ und $\frac{d}{dt} S_{,x} = S_{,xx}\, \dot{x} = R_{0,x}$. Bei Verwendung einer Lagrangefunktion

$$F := f + \rho R_0 = f + \rho\dot{S} \text{ mit } \rho := -\mu$$

ergeben sich die üblichen Eulergleichungen in integrierter Form

$$F_{,\dot{x}} = \int_{t_0}^t F_{,x}\; ds \;+\; c$$

oder

$$\frac{d}{dt}F_{,\dot{x}} \;=\; F_{,x} \quad \text{stückweise.}$$

Dies ist die *indirekte Form* der notwendigen Bedingungen, da an den Integranden f die *Ableitung* $\dot{S}$ adjungiert wird.
Die *direkte Form* ergibt sich bei Verwendung von Gleichung (27) und

$$\frac{d}{dt}(f_{,\dot{x}} + \rho S_{,x}) \;=\; f_{,x} + \rho\frac{d}{dt}S_{,x} \quad \text{stückweise}$$

Hieraus folgt für Intervalle I mit $x \in C^2(I)$

$$\frac{d}{dt}f_{,\dot{x}} \;=\; f_{,x} - \dot{\rho}S_{,x}\,.$$

Benutzt man eine Lagrangefunktion

$$\tilde{F} \;:=\; f + \nu S, \quad \nu := \dot{\rho},$$

folgt als notwendige Bedingung die *direkte Form* der Eulergleichungen

$$\frac{d}{dt}\tilde{F}_{,\dot{x}} \;=\; \tilde{F}_{,x} \quad \text{stückweise.}$$

Fall 2:
Sei $k \geq 1$ beliebig. Nach Gleichung (23) sind von den zulässigen Variationen $\delta x \in \overset{\circ}{D}{}^1_n[t_0.T]$ nur die $\delta x_2 \in \overset{\circ}{D}{}^1_{n-k}[t_0, T]$ unabhängig:

$$\delta x_1 = -a^{-1}b\delta x_2 := B\delta x_2.$$

Variation des Zielfunktionals

$$\begin{aligned}\delta I(x,\delta x) \quad &= \textstyle\int_{t_0}^T (f_{,x}\,\delta x + f_{,\dot{x}}\,\delta\dot{x})\,dt \\ &= \textstyle\int_{t_0}^T ((f_{,x_1}B + f_{,x_2} + f_{,\dot{x}_1}\dot{B})\delta x_2 + (f_{,\dot{x}_1}B + f_{,\dot{x}_2})\delta\dot{x}_2)\,dt \\ &= 0 \quad \forall\, \delta x_2 \in \overset{\circ}{D}{}^1_{n-k}.\end{aligned} \tag{28}$$

Wähle

$$\begin{aligned}\mu(t) \quad &:= f_{,\dot{x}_1}a^{-1} - \textstyle\int_{t_0}^t (f_{,\dot{x}_1}(a^{-1})^{\cdot} + f_{,x_1}a^{-1})\,d\tau + d, \quad d \in \mathbb{R}^{1\times k} \\ &= (f_{,\dot{x}_1} - \textstyle\int_{t_0}^t f_{,x_1}\,d\tau)a^{-1} - \int_{t_0}^t (f_{,\dot{x}_1} - \int_{t_0}^\tau f_{,x_1}\,ds)(a^{-1})^{\cdot}\,d\tau + d.\end{aligned} \tag{29}$$

Dann folgt aus Gleichung (28) nach einigen Zwischenschritten

$$\int_{t_0}^T ((f_{,x_2} - \mu\dot{b})\delta x_2 + (f_{,\dot{x}_2} - \mu b)\delta\dot{x}_2)\,dt = 0 \quad \forall\, \delta x_2 \in \overset{\circ}{D}{}^1_{n-k},$$

woraus sich nach Satz 5.1

$$f_{,\dot{x}_2} - \mu b = \int_{t_0}^{t} (f_{,x_2} - \mu \dot{b})\, d\tau + e_2, \quad e_2 \in \mathbb{R}^{1\times(n-k)}$$

ergibt. Mit $R_0(x,\dot{x}) = S_{,x}\,\dot{x}$, $b = S_{,x_2} = R_{0,\dot{x}_2}$, $\dot{b} = R_{0,x_2}$ und einer Lagrangefunktion $F = f + \rho R_0 := f + \rho\dot{S}$, $\rho = -\mu$, $\rho(t) \in \mathbb{R}^{1\times k}$, folgt analog zum Fall 1

$$F_{,\dot{x}_2} = \int_{t_0}^{t} F_{,x_2}\, d\tau + e_2. \tag{30}$$

Es bleibt zu zeigen: Die Gleichung(29) entspricht den ersten k Eulergleichungen.
Nach Satz 5.1 ist Gleichung (29) genau dann erfüllt, falls

$$\int_{t_0}^{T} ((-\mu + f_{,\dot{x}_1} a^{-1})\delta\dot{x}_1 + (f_{,x_1} a^{-1} + f_{,\dot{x}_1} (a^{-1})^{\cdot})\delta x_1)\, dt = 0 \quad \forall\, \delta x_1 \in \overset{\circ}{D}{}^1_k[t_0,T] \tag{31}$$

Wähle $\delta z := a^{-1}\delta x_1 \in \overset{\circ}{D}{}^1_k[t_0,T]$. Es folgt: $\delta\dot{z} = (a^{-1})^{\cdot}\delta x_1 + a^{-1}\delta\dot{x}_1$, $\mu\delta\dot{x}_1 = \mu a\delta\dot{z} + \mu\dot{a}\delta z$ und nach Gleichung (31)

$$\int_{t_0}^{T} ((-\mu a + f_{,\dot{x}_1})\delta\dot{z} + (-\mu\dot{a} + f_{,x_1})\delta z)\, dt = 0 \quad \forall\, \delta z \in \overset{\circ}{D}{}^1_k[t_0,T].$$

Satz 5.1 liefert dann die gesuchten Eulergleichungen

$$f_{,\dot{x}_1} - \mu a = \int_{t_0}^{t} (f_{,x_1} - \mu\dot{a}) d\tau + e_1, \quad e_1 \in \mathbb{R}^{(1\times k)}. \tag{32}$$

Gleichung (32) bzw. die entsprechende Gleichung

$$F_{,\dot{x}_1} = \int_{t_0}^{t} F_{,x_1}\, d\tau + e_1$$

ergibt zusammen mit Gleichung (30) das gewünschte System

$$\frac{d}{dt}F_{,\dot{x}} = F_{,x} \quad \text{stückweise.}$$

Satz 5.3 x löst Problem (P8). Dann folgt:

(A) Es gibt ein $\rho(\cdot) : [t_0,T] \to \mathbb{R}^k$ so daß mit $F := f + \rho\dot{S} = f + \rho R_0$ gilt:
$F_{,\dot{x}} = \int_{t_0}^{t} F_{,x}\, ds + c\ \forall\, t$ bzw. $\frac{d}{dt}F_{,\dot{x}} = F_{,x}$ stückweise,
und $F_{,\dot{x}}(\cdot)$ ist stetig auf $[t_0,T]$ (*indirekte Form*).

(B) Es gibt ein $\nu(\cdot) : [t_0,T] \to \mathbb{R}^k$ so daß mit $\tilde{F} := f + \nu S$ gilt :
$\frac{d}{dt}\tilde{F}_{,\dot{x}} = \tilde{F}_{,x}$ stückweise, (*direkte Form*).

Bemerkung:
(1) $\tilde{F}_{,\dot{x}}(\cdot)$ ist im Gegensatz zu $F_{,\dot{x}}(\cdot)$ nicht notwendig stetig. Um die Lösungen der Eulergleichungen zwischen den Knickstellen der Extremalen über diese Knickstellen hinweg zu verknüpfen, ist die Stetigkeit von $F_{,\dot{x}}(\cdot)$ nützlich. Deshalb wird die indirekte Form der notwendigen Bedingungen bevorzugt verwendet.
(2) Als alternative Methode zur Herleitung notwendiger Bedingungen für Probleme vom Typ (P8) kann die Methode aus Kapitel 2 nur dann verwendet werden, wenn $x(T)$ nicht fest bzw. mit den neuen Randbedingungen verträglich ist. Die Nebenbedingung $S(x(t)) = 0$ kann in die äquivalente Form

$$R_0(x, \dot{x}) := \dot{S}(x) = S_{,x}\,\dot{x} = 0 \text{ und } S(x(T)) = 0$$

gebracht werden Damit wird Problem (P8) ein klassisches Lagrangeproblem der Variationsrechnung:

$$\begin{array}{ll} I(x) = \int_{t_0}^{T} f(x, \dot{x})\, dt \;\to\; \min, & x \in D_n^1[t_0, T], \\ & R_0(x, \dot{x}) = 0,\; rg(R_{0,\dot{x}}) = rg(S_{,x}) = \max, \\ & x(t_0) = x_0,\; S(x(T)) = 0. \end{array}$$

Nebenbedingungen in Ungleichungsform $S(x) \geq 0$

$$\begin{array}{lll} \textbf{(P9)} & I(x) = \int_{t_0}^{T} f(t, x, \dot{x})\, dt \;\to\; \min, & x \in D_n^1[t_0, T], \quad f \in C^2 \\ & & x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad \text{(Festrand)} \\ & & S(x) \geq 0, \quad S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad k < n, \\ & & S \in C^2, \quad rg(S_{,x}(x)) \;=\; k. \end{array}$$

Zulässige Variationen und Variation des Zielfunktionals:
Für eine zulässige Kurvenschar $x(t, \epsilon)$ mit $x(\cdot, \epsilon) \in \mathring{D}_n^1[t_0, T]$, $x(t, 0) = x(t)$, $x(t, \cdot) \in C^2$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\delta x = x_{,\epsilon}(\cdot, 0)$ gilt:

$$S(x(t, \epsilon)) = S(x(t)) + \epsilon S_{,x}(x(t))\delta x + \frac{\epsilon^2}{2}\delta x^T S_{,xx}(\bar{x}(t))\delta x \geq 0 \;\forall \epsilon \in U(0).$$

Also muß $S_{,x}\,\delta x \geq 0$ für $\epsilon \geq 0$ sein.
Betrachte mit beliebigem $\delta\varphi \in \mathring{D}_k^1$, $\delta\varphi \geq 0$

$$S_{,x}\,\delta x - \delta\varphi = a\delta x_1 + b\delta x_2 - \delta\varphi = 0,\; a := S_{,x_1} \text{ regulär nach (P8)},$$

oder

$$\delta x_1 \;=\; -a^{-1}(b\delta x_2 - \delta\varphi). \tag{33}$$

Die Variationen δx_1 sind von den δx_2 und $\delta\varphi$ abhängig.
Sei $x(\cdot)$ Lösung von (P9). Dann ist mit $x_\epsilon(t) := x(t, \epsilon)$

$$I(x_\epsilon) \geq I(x) \;\forall \epsilon \in U(0) \cap \mathbb{R}^+.$$

Es folgt $\delta I \geq 0$ für jedes zulässige δx, also

$$\int_{t_0}^{T} (f_{,x}\,\delta x + f_{,\dot{x}}\,\delta\dot{x})\,dt \geq 0 \quad \forall\,\delta x \in D_n^1[t_0,T], \quad \text{mit}\, S_{,x}\,\delta x \geq 0,$$

bzw.

$$\int_{t_0}^{T} (f_{,x}\,\delta x + f_{,\dot{x}}\,\delta\dot{x})\,dt \geq 0 \quad \forall\,(\delta x,\,\delta\varphi),\ \text{mit}\ \delta\varphi \geq 0\ \ \text{und}\ S_{,x}\,\delta x - \delta\varphi = 0. \tag{34}$$

<u>*Fall* $k = 1$:</u>

Für die Auswertung der Variationsungleichung $\delta I \geq 0$ werden wieder spezielle zulässige Variationen δx bzw. $\delta\varphi$ benutzt. Dabei unterscheidet sich das Vorgehen nur in einzelnen Punkten von der Problembehandlung von (P8).

(A) Betrachte $\delta\varphi \in \overset{\circ}{D}{}^1[t_0,T]$, $\delta\varphi \geq 0$, $A^T := \frac{S_{,x}}{|S_{,x}|^2}$, $\delta\bar{x} := A\delta\varphi$, $\delta\bar{x} \in \overset{\circ}{D}{}_n^1[t_0,T]$. Es folgt: $S_{,x}\,\delta\bar{x} = S_{,x}\,A\delta\varphi = \delta\varphi \geq 0$, also ist $\delta\bar{x}$ zulässig. Mit beliebigem $\delta\tilde{x} \in \overset{\circ}{D}{}_n^1[t_0,T]$, wähle speziell $\delta\varphi := S_{,x}\,\delta\tilde{x}$ und damit ein $\delta\bar{x} := A\delta\varphi$. Dann ist $\delta z := \delta\tilde{x} - \delta\bar{x}$ (speziell) zulässig:

$$S_{,x}\,\delta z = S_{,x}\,\delta\tilde{x} - S_{,x}\,A\delta\varphi = S_{,x}\,\delta\tilde{x} - \delta\varphi = 0.$$

Notwendige Bedingungen
Die Variationsungleichung $\delta I(x,\delta x) \geq 0\ \forall\,\delta x$ mit $S_{,x}\,\delta x \geq 0$ wird, da mit δz auch $-\delta z$ zulässig ist ($S_{,x}\,(-\delta z) = 0$) zur Variationsgleichung $\delta I(x,\delta z) = 0$.
Damit lassen sich die Berechnungen und Strukturen bei der Auswertung von $\delta I(x,\delta x) = 0$ für (P8) verwenden. Mit μ nach (25)

$$\mu \ = \ f_{,\dot{x}}\,A - \int_{t_0}^{t} (f_{,x}\,A + f_{,\dot{x}}\,\dot{A})\,ds + d$$

und $F = f - \mu R_0 =: f + \rho R_0$ folgt

$$F_{,\dot{x}} = \int_{t_0}^{t} F_{,x}\ ds + c \quad \forall t \in [t_0,T].$$

(B) Für die spezielle zulässige Variation $\delta\bar{x}$ aus (A) mit $S_{,x}\,\delta\bar{x} = \delta\varphi \geq 0$ muß

$$\delta I(x,\delta\bar{x}) = \int_{t_0}^{T} ((f_{,x}\,\delta\bar{x} + f_{,\dot{x}}\,\delta\dot{\bar{x}})\,ds = \int_{t_0}^{T} (f_{,x}\,A + f_{,\dot{x}}\,\dot{A})\delta\varphi + f_{,\dot{x}}\,A\delta\dot{\varphi})\,dt \geq 0$$

für alle $\delta\varphi \in \overset{\circ}{D}{}^1[t_0,T]$ mit $\delta\varphi \geq 0$ sein. Nach Satz 5.2 folgt hieraus

$$\mu \ = \ f_{,\dot{x}}\,A - \int_{t_0}^{t} (f_{,x}\,A + f_{,\dot{x}}\,\dot{A})\,ds + d$$

ist nicht wachsend, also $\rho := -\mu$ nicht fallend.

(C) Dieses μ läßt sich durch partielle Integration in die Form (26) bringen. Für Intervalle $I = (\alpha, \beta) \subset [t_0, T]$ mit $S(x(t)) > 0 \, \forall \, t \in I$ ist $f_{,\dot{x}} - \int_{t_0}^t f_{,x} \, ds$ konstant. Folglich gilt dort $\dot{\mu} = 0$. Der Multiplikator μ und damit auch $\rho = -\mu$ ist bei inaktiver Ungleichung $S(x(t)) > 0$ konstant. Zusammen mit $S = 0$ in den Aktivitätsintervallen folgt die Schlupfbedingung

$$\dot{\rho}(t) S(x(t)) = 0 \quad \forall \, t \in [t_0, T].$$

Fall 2: ($k \geq 1$)

Betrachte Variationen δx, $\delta\varphi$, für die nach Gleichung (33) gilt:

$$\delta x_1 = -a^{-1}(b \delta x_2 - \delta\varphi) =: B \delta x_2 + a^{-1} \delta\varphi, \;\; \delta x_2 \in \overset{\circ}{D}{}^1_{n-k}[t_0, T], \;\; \delta\varphi \in \overset{\circ}{D}{}^1_k[t_0, T], \;\; \delta\varphi \geq 0.$$

Für diese Variationen muß nach Ungleichung (34)

$$\int_{t_0}^T (f_{,x} \, \delta x + f_{,\dot{x}} \, \delta\dot{x}) \, dt \geq 0 \quad \forall \, (\delta x, \delta\varphi) \text{ mit } S_{,x} \, \delta x - \delta\varphi = 0, \quad \delta\varphi \geq 0$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{t_0}^T ((f_{,x_1} \, B + f_{,\dot{x}_1} \, \dot{B} + f_{,x_2} \,) \delta x_2 + (f_{,\dot{x}_2} + f_{,\dot{x}_1} \, B) \delta\dot{x}_2 \\ &+ (f_{,x_1} \, a^{-1} + f_{,\dot{x}_1} \, (a^{-1})^{\cdot}) \delta\varphi + f_{,\dot{x}_1} \, a^{-1} \delta\dot{\varphi}) \, dt \geq 0 \end{aligned}$$

sein.
Für $\delta\varphi = 0$ ergibt sich nach den Schlußweisen, die zum Satz 5.3 führten,

$$F_{,\dot{x}} = \int_{t_0}^t F_{,x} \, d\tau + d, \quad \text{mit} \quad F = f + \rho R_0.$$

Für $\delta x_2 = 0$ bleibt

$$\int_{t_0}^T ((f_{,x_1} \, a^{-1} + f_{,\dot{x}_1} \, (a^{-1})^{\cdot}) \delta\varphi + f_{,\dot{x}_1} \, a^{-1} \delta\dot{\varphi}) \, dt \geq 0, \quad \delta\varphi \geq 0.$$

Hierfür liefert Satz 5.2:

$$q(t) = f_{,\dot{x}_1} \, a^{-1} - \int_{t_0}^t (f_{,x_1} \, a^{-1} + f_{,\dot{x}_1} \, (a^{-1})^{\cdot}) \, d\tau \quad \text{nicht wachsend auf } [t_0, T]$$

(komponentenweise). Dieses q ist aber nach Gleichung (29) gleich μ. Also folgt: Der Multiplikator $\rho = -\mu$ in der Lagrangefunktion F ist nicht fallend (komponentenweise).
Die Schlupfbedingung $\dot{\rho}_\kappa S_\kappa = 0, \;\; \kappa = 1 \ldots k$ ergibt sich mit gleicher Schlußweise wie beim Fall $k = 1$ unter Verwendung der Gleichung (29). Es folgt

Satz 5.4 x löst (P9). Dann gibt es ein $\rho(\cdot)$, so daß mit $F := f + \rho \dot{S}$ gilt

(i)	$F_{,\dot{x}} = \int_{t_0}^t F_{,x} \, ds + d \quad \forall \, t$ bzw.	
	$\frac{d}{dt} F_{,\dot{x}} = F_{,x}$ stückweise	Eulergleichungen
(ii)	$S_\kappa(x(t)) \dot{\rho}_\kappa(t) = 0 \, \forall \, t, \;\; \kappa = 1 \ldots k$	Schlupfbedingung
(iii)	$F_{,\dot{x}} \, (\cdot)$ stetig auf $[t_0, T]$	Knickbedingung
(iv)	$\rho(\cdot)$ nicht fallend	Monotonie.

Dies ist die *indirekte Form* der notwendigen Bedingungen. Die *direkte Form* ergibt sich in Analogie zu den Überlegungen, die auf Satz 5.3 führten.

Satz 5.5 x löst (P9). Dann gibt es ein $\nu(\cdot)$, $(\nu = -\dot\rho)$ so daß mit $\tilde F := f + \nu S$ gilt

(i)	$\frac{d}{dt}\tilde F,_{\dot x} = \tilde F,_x$ stückweise	Eulergleichungen
(ii)	$S_\kappa(x(t))\nu_\kappa(t) = 0\,\forall\, t,\ \kappa = 1\dots k$	Schlupfbedingung
(iii)	$\int_{t_0}^t \nu\, ds$ nicht wachsend $\quad(\nu \leq 0)$	Monotonie,

Bemerkungen:
(1) Die Bemerkung (1) nach Satz 5.3 über die Stetigkeit der $F,_{\dot x}(\cdot)$ bzw. $\tilde F,_{\dot x}(\cdot)$ ist auch hier angebracht.

(2) Nicht betrachtet wurden Knick- bzw. Stetigkeitsbedingungen für $F - F,_{\dot x}\,\dot x$.

(3) Die Bedingung (iv) im Satz 5.4 wurde für Variationsprobleme gezeigt. Für ein Optimalsteuerproblem

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_{t_0}^T f_0(t,x,u)\,dt \;\rightarrow\; \min,\quad & x \in D_n^1[t_0,T],\ u \in D_m^0[t_0,T],\\
& \dot x = f(t,x,u),\ x(t_0) = x_0,\ x(T) = x_T,\\
& S(x) \geq 0,\ S:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k,\ k < n,\ S \in C^2,\ rg(S,_x) = k\\
& Q(t,x,u) \geq 0,\ \text{Rangbedingungen für }\ Q,_u\\
& \text{siehe Voraussetzungen V2, V3 in Kap, 2.1}
\end{aligned}
$$

mit $l_0 = 1$ (Normalität) und $h = 1$ (Ordnung) läßt sich auf diese Weise durch Vergleich der notwendigen Bedingungen bei der direkten und indirekten Methode mit $H_1 = f_0 + \lambda f + \mu Q + \nu S$ bzw. $H_2 = f_0 + \lambda f + \mu Q + \rho\dot S$ zeigen: ρ nicht fallend. Dies ist der fehlende Beweisteil von Satz 2.1. (1) Die Bedingung (iv) im Satz 5.4 ist für einfache Variationsprobleme der fehlende Beweisteil von Satz 2.1.

(4) Wählt man die Beweismethode nach Kapitel 2 für Probleme mit $S(x(t)) \geq 0$, wird für eine zulässige Kurve die Äquivalenz von $S(x(t)) =: \varphi^2(t)$ mit der Differentialgleichung $R_0(x,\dot x) - 2\varphi\dot\varphi = S,_x(x)\dot x - 2\varphi\dot\varphi = 0$ und der zugehörigen Randbedingung $(S - \varphi^2)|^T = 0$ benutzt. Diese muß mit den eventuell gestellten sonstigen Randbedingungen für $x(T)$ verträglich sein.

(5) Bei der Arbeit mit den Schlupfbedingungen bedenke man, daß die Aktivitätsintervalle der Komponenten S_κ natürlich verschieden sein können.

(6) Am Ende dieses Kapitels wird das *Lagrange-d'Alembert-Prinzip* der Analytischen Mechanik angegeben:
Gesucht ist ein $x \in D_n^1[t_0,T]$, so daß

$$
\textbf{(P10)}\quad \delta I(x,\delta x) = \delta\int_{t_0}^T f(x,\dot x)\,dt = 0\ \forall\,\delta x \text{ mit } a(x)\delta x \geq 0 \text{ bzw. } a(x)\delta x = 0,
$$

bei gegebenem $a(\cdot),\ a(x) \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $k < n,\ rg(a(x)) = k$.
Diesem Problem ist im Allgemeinen kein Extremalproblem $I(x) \rightarrow$ extr zuzuordnen. Bei

der Herleitung der Sätze 5.4 und 5.5 wurde jedoch nicht von der speziellen Struktur von $S_{,x}$ als Ableitung von S Gebrauch gemacht. Deshalb kann man dort formal $a(x) := S_{,x}(x)$ setzen. Dann liefern die Sätze 5.4 und 5.5 die notwendigen Bedingungen auch für das Problem (P10):
Es gibt ein $\nu(\cdot)$, so daß gilt

$$f_{,\dot{x}} = \int_{t_0}^{t} (f_{,x} + \nu a(x))\, ds \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} f_{,\dot{x}} = f_{,x} + \nu a(x) \quad \text{stückweise.}$$

5.2 Variationsprobleme unter kinematischen (nichtholonomen) Zustandsrestriktionen

Insbesondere in der Mechanik kommen bei Variationsproblemen Nebenbedingungen (*Zwangsbedingungen*) der Form

$$\begin{aligned} a(x)\dot{x} &= 0, \quad \text{bzw.} \\ a(x)\dot{x} &\geq 0, \quad a(x) \in \mathbb{R}^{k\times n} \text{ mit } rg(a(x)) = k < n \end{aligned}$$

vor. Sie heißen *nichtholonom*, wenn folgendes gilt:

$$\nexists\, S(x): \; S_{,x}(x)\dot{x} = 0 \Leftrightarrow a(x)\dot{x} = 0,$$

dh., $\nexists\, S: \; S_{,x} \in \operatorname{span}\{a\}$, d.h, $a(x)\dot{x} = 0$ ist nicht (vollständig) integrierbar.
Formuliert man ein Variationsproblem mit solchen Nebenbedingungen

$$\textbf{(P11)} \quad \int_{t0}^{T} f_0(t,x,\dot{x})\, dt \;\to\; \min, \quad \begin{array}{l} x \in D_n^1[t_0,T], \text{ Festrand} \\ a(x)\dot{x} = 0 \;\text{ bzw.}\; a(x)\dot{x} \geq 0, \end{array}$$

so läßt sich dies auf einfache Weise als Optimalsteuerproblem auffassen:

$$\int_{t0}^{T} f_0(t,x,u)\, dt \;\to\; \min, \quad \begin{array}{l} x \in D_n^1[t_0,T], \; u \in D_n^0[t_0,T] \text{ Festrand} \\ \dot{x} = u, \; a(x)u = 0 \;\text{ bzw.}\; a(x)u \geq 0. \end{array}$$

Hier sind statt der Zustandsvariablen die Steuervariablen beschränkt ($Q(t,x,u) \geq 0$, siehe $P1$). Solche Probleme sind aber in der Regel einfacher zu lösen.
Im Kontext der Integralprinzipien der Mechanik (z.B. beim Prinzip der kleinsten Wirkung) gibt es gravierende Unterschiede bei der Behandlung von Problemen mit geometrischen (holonomen) und kinematischen (nichtholonomen) Zwangsbedingungen. Für holonome Zwangsbedingungen der Form $S(x) = 0$ bzw. $S(x) \geq 0$ besagt das Prinzip, daß sich die Bewegung eines mechanischen Systems (beschrieben durch $x(t)$) als Extremale des Variationsproblems

$$I(x) = \int_{t_0}^{T} L(x,\dot{x})\, dt \;\to\; \textit{extremal}, \quad \begin{array}{l} x \in D_n^1[t_0,T], \text{ Festrand,} \\ S(x) = 0 \;\text{ bzw.}\; S(x) \geq 0, \end{array}$$

ergibt. Die Lagrangefunktion L ist die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie des mechanischen Systems. Durch $S(x) = 0$ bzw. $S(x) \geq 0$ werden geometrische Zwangsbedingungen beschrieben. Als notwendige Bedingungen für den extremalen Charakter von x ergeben sich

$$\delta I(x) \;=\; 0, \quad \forall\, \delta x: \;\delta x \in \overset{\circ}{D}{}^1_n,\; S_{,x}\, \delta x = 0 \,\text{bzw.}\; S_{,x}\, \delta x \geq 0$$

(zulässige Variationen). Solche zulässigen Variationen sind die *virtuellen Verrückungen* der Mechanik. Die sich hieraus ergebenden Eulergleichungen sind die *Bewegungsgleichungen* des Systems.

Im nichtholonomen Fall (also nichtintegrable kinematische Restriktionen der Form $a(x)\dot{x} = 0$ bzw. $a(x)\dot{x} \geq 0$), wird ein anderes Prinzip zur Gewinnung der Bewegungsgleichungen postuliert.

Lagrange-d´Alembert Prinzip
Sei L eine Lagrangefunktion im Sinne der Mechanik. Dann wird bei kinematischen Restriktionen der Form $a(x)\dot{x} = 0$ bzw. $a(x)\dot{x} \geq 0$ die Bewegung des mechanischen Systems durch

$$\textbf{(P12)} \quad \delta \int_{t_0}^{T} L(x, \dot{x})\, dt \;=\; 0 \quad \forall\, \delta x \in \overset{\circ}{D}{}^1_n[t_0, T] \;\text{ mit } a(x)\delta x = 0, \text{ bzw. } a(x)\delta x \geq 0$$

bestimmt (z.B. [5], [9]). Dieses Prinzip führt auf Eulergleichungen

$$\frac{d\, L_{,\dot{x}}}{dt} \;-\; L_{,x} \;=\; \rho a(x) \;=:\; F,$$

wobei F die aus den kinematischen Nebenbedingungen resultierende Reaktionskraft ist.
Das Prinzip entspricht keinem klassischen Variationsproblem, da die Variationen δx mit $a(x)\delta x = 0$ nicht notwendig zulässige Variationen im Sinne der Nebenbedingungen sein müssen. Zulässige Variationen wären $\delta \bar{x}$ mit

$$a_{,x}\, \dot{x}\delta\bar{x} + a\delta\dot{\bar{x}} \;=\; 0. \tag{35}$$

Mit Variationen δx, die $a(x)\delta x = 0$ erfüllen, sind Funktionen $x(t, \epsilon) = x(t) + \epsilon\delta x$ nicht notwendig zulässig bzgl. $a(x)\dot{x} = 0$.
Gleichwohl wurden in der vorliegenden Arbeit die Eulergleichungen für

$$\delta I \;=\; \delta \int_{t_0}^{T} L(x, \dot{x})\, dt \;=\; 0 \;\text{ mit } a(x)\delta x = 0$$

bzw.

$$\delta I \;=\; \delta \int_{t_0}^{T} L(x, \dot{x})\, dt \;=\; 0 \text{ mit } a(x)\delta x \geq 0$$

bereitgestellt (siehe Bemerkung (6) nach Satz 5.5, wobei formal $S_{,x}$ durch $a(x)$ zu ersetzen ist).

Geht man in (P8) bzw. in (P9) von den Variationsgleichungen (statt von der Extremalaufgabe) aus, ergibt sich die Vorschrift zur Gewinnung der Eulergleichungen (Bewegungsgleichungen) auch für die nichtholonomen Fälle.
Bemerkung
Eine Mechanik für Probleme mit nichtholonomen Nebenbedingungen, die durch Extremalen des Wirkungsintegrals bzgl. *aller* im (klassischen Sinn) zulässigen Variationen $\delta\bar{x}$ nach Gleichung (35) aufgebaut wird, nennt Arnold in [2] *Vaconomic Mechanics.*

Literatur

[1] Abeßer, H. [1975], *Zur Theorie quasiregulärer Variationsprobleme und ihre Anwendung auf optimale Prozesse*, Dissertation, TH Ilmenau.

[2] Arnold, V.I. [1993], *Dynamical Systems III- Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.

[3] Bliss, G. A. [1946], *Lectures on the Calculus of Variations*, The University of Chicago Press, Chicago, Illinois

[4] Cesari, L. [1983], *Optimization - Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York.

[5] Bloch, A.M. [2003], *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer-Verlag, New York.

[6] Feichtinger, G., Hartl, R.F. [1986], *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*, Verlag de Gruyter, Berlin.

[7] Hestenes, M.R. [1966], *Calculus of Variations and Optimal Control Theory* , John Wiley, New York.

[8] Mc Shane, E.J. [1939], *On Multipliers for Lagrange Problems*, Amer. J. Math. (1939), 809-819.

[9] Monforte, J.C. [2002], *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems*, Springer-Verlag, New York.

[10] Seierstad, A., Sydsæter, K. [1987], *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam.

[11] Steigenberger, J. [2003], *Contribution to the mechanics of worm-like motion systems and artificial muscles*, Biomechanics and Modeling in Mechanobiology 2 (2003) 37 - 57, DOI 10.1007/S10237-003-0027-2.