Ein Optimalsteuerproblem mit einem speziellen Zielfunktional und Zustandsbeschränkungen in einem Teilintervall bei beliebigem Relativgrad

Harald Abeßer, Joachim Steigenberger *

9. November 2009

Zusammenfassung

Ausgangspunkt für die Untersuchungen sind zwei klassische Optimalsteuerprobleme mit verschiedenen Integrationsintervallen. Die Zustände sind einer Ungleichungsrestriktion mit beliebigem Relativgrad auf einem gemeinsamen Teilintervall unterworfen. Für dieses Problem werden notwendige Optimalitätsbedingungen hergeleitet.
Die Anregung für diese Aufgabenstellung kommt aus der Mechanik: Die äußere Form von zwei elastischen Röhren unterschiedlicher Länge wird durch das Variationsprinzip der minimalen potentiellen Energie bestimmt. Steckt eine Röhre in der anderen, ergibt sich eine Ungleichungsbeschränkung für die Formen in einem Teilintervall.

Key words Optimal control, state constraint.

MSC (2000) 49K15, 49K30

1 Einleitung

In [AS 2005] wurden notwendige Optimalitätsbedingungen für eine Klasse von Optimalsteuerproblemen mit beschränkten Zustandskoordinaten hergeleitet und dort sowie in Folgearbeiten ([SA 2006], diverse Diplomarbeiten) insbesondere auf ein mechanisches Problem angewendet. Eine Verbesserung der Modellierung für die Grundaufgabe in [SA 2006] führte auf eine Klasse von Optimalsteuerproblemen, die nicht in die behandelte Problemklasse passt. Für die Bearbeitung der neuen Aufgabenstellung müssen deshalb (teilweise) neue Optimalitätsbedingungen bereitgestellt werden.
Die Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen sollte jedoch nicht Teilinhalt einer Arbeit sein, die sich bevorzugt mit der Lösung eines mechanischen Problems beschäftigt.

*TU Ilmenau, Institute of Mathematics, harald.abeszer@tu-ilmenau.de, joachim.steigenberger@tu-ilmenau.de

Aus diesem Grund werden in dieser (Vorgänger)-Arbeit zitierfähige notwendige Optimalitätsbedingungen aufgestellt. Es wird eine allgemeine Aufgabenklasse behandelt, die das vorgelegte Problem als Spezialfall enthält.
In der Arbeit [AS 2005] blieben außerdem zwei offene Fragen: Für Probleme mit dem Relativgrad (Ordnung des Problems) $h > 1$ gibt es keine Aussage, ob es eine Erweiterung des „Energiesatzes“ gibt; das Monotonieverhalten des zur Ungleichungsrestriktion gehörenden Multiplikators ρ ist ungeklärt. Diese Lücken werden mit der vorliegenden Arbeit geschlossen. (Ein großer Teil der Arbeiten in der Literatur zur ähnlichen Problematik beschränkt sich auf den Fall $h = 1$.)
Diese Arbeit ist deshalb nicht nur als Zuarbeit anzusehen.
Die neue Aufgabenstellung unterscheidet sich in zwei Punkten von der Problematik der Vorgängerarbeit [AS 2005]: Das Zielfunktional setzt sich additiv aus zwei Integralen mit unterschiedlichen Integrationsintervallen zusammen (unwesentlicher Unterschied); die Zustandsbeschränkung gilt nur auf einem Teilintervall (wesentlicher Unterschied).
Da in der hinterliegenden mechanischen Aufgabenstellung keine Beschränkungen für die Steuerung vorliegen, wird auch in der Arbeit keine Beschränkung des Steuerbereiches angenommen. Unter Verwendung der Methodik aus [AS 2005] lassen sich Probleme mit Steuerbeschränkungen jedoch einfach behandeln und die notwendigen Optimalitätsbedingungen entsprechend modifizieren.
Die Beweismethodik dieser Arbeit ist die gleiche, die auch schon in [AS 2005] verwendet wurde: Das Optimalsteuerproblem wird in ein äquivalentes Bolzaproblem der Variationsrechnung überführt. Die notwendigen Bedingungen für dieses Bolzaproblem werden dann als notwendige Bedingungen für das Optimalsteuerproblem interpretiert. Von Interesse sind insbesondere die problemtypischen Knick- und Transversalitätsbedingungen. Es sind deshalb verweisende Zitate angebracht.

2 Problemstellung

Gesucht sind

$$x \in D^1_n[t_0, T], u \in D^0_m[t_0, T], y \in D^1_n[t'_0, T'], v \in D^0_m[t'_0, T']$$

mit

$$g_0 := g_{01}(t_0, x(t_0)) + g_{02}(T, x(T)), \tag{1}$$

wobei $t_0 < t'_0 < T' < T$,
so daß

$$J := \int_{t_0}^{T} f_{01}(t, x, u)\, dt + \int_{t'_0}^{T'} f_{02}(t, y, v)\, dt + g_0(t_0, x(t_o), T, x(T))) \rightarrow min,$$

unter folgenden Restriktionen:
den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} g_1 &= x(t_0) - x_0 = 0, \\ g_2 &= x(T) - x_T = 0, \\ g_3 &= y(t_0') - y_0 = 0, \\ g_4 &= y(T') - y_T = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

bei freien t_0, t_0', T', T;

den Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t,x,u) \quad in \quad [t_0, T], \\ \dot{y} &= f_2(t,y,v) \quad in \quad [t_0', T'] \end{aligned} \tag{3}$$

und einer Zustandsbeschränkung auf einem Teilintervall:

$$S(t,x,y) \geq 0 \quad auf \quad [t_0', T'], \quad S : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^1. \tag{4}$$

Voraussetzungen

$V1:$ Die Ordnung des Problems (Relativgrad) sei h, d.h.
Mit $L_f S := S_{,t} + S_{,x} f_1 + S_{,y} f_2$, $L_f^k S := L_f(L_f^{k-1} S)$, $k = 2, 3...$, $L_f^1 := L_f$ gelte $(L_f^k S)_{,(u,v)} = 0$, $k = 1...h-1$, $(L_f^h S)_{,(u,v)} \neq 0$.
$R_0(t,x,y,u,v) := L_f^h S$ ist die $h - te$ Ableitung von S längs des Vektorfeldes $f := (f_1, f_2)$.

$V2:$ $rg(R_{0,(u,v)}) = 1$ auf $\{t : S(t,x(t),y(t)) = 0\}$, (Ungleichung ist aktiv),

$V3:$ für $t = T'$ soll die Restriktion $S(t,x,y)$ inaktiv sein $(S(T', x(T'), y(T')) > 0)$,
t_0' sei kein Berührungspunkt, es gilt also nicht $S(t_0', x(t_0') y(t_0') = 0$ und $S(t_0' + \epsilon, x(t_0' + \epsilon), y(t_0' + \epsilon)) > 0 \; \forall \epsilon, \; 0 < \epsilon < \epsilon_0$.

$V4$ $rg(g_{0,(t_0, x(t_0), T, x(T))}) = max$

$V5$ $f_1(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f_2(\cdot,\cdot,\cdot)$, $S(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^{h+1}$, $f_{01}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot), f_{02}(\cdot,\cdot,\cdot), g_0(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \in C^2$.
(Die Differenzierbarkeitsannahmen können gegebenenfalls abgeschwächt werden.)

Vereinbarung

Ein- und Austrittsstellen der Extremalen $x(t), y(t)$ in die Randmannigfaltigkeit $\{(t,x,y),\; S(t,x,y) = 0\}$ von $S \geq 0$ heißen Verbindungsstellen.
Es wird o.E.d.A. angenommen, daß es nur einen Eintrittspunkt t_1 und einen Austrittspunkt t_2 gibt. $t_1 = t_2$ heißt Berührungspunkt.

Bemerkung

Nach Voraussetzung V3 gilt: $t_2 < T'$. Falls $t_2 = T'$, aber $t_1 > t_0'$ lassen sich die kommenden Abhandlungen sinngemäß übertragen.

3 Überführung des Optimalsteuerproblems in ein klassisches Variationsproblem

Für die Überführung werden Hilfsfunktionen $z(t)$, $w(t)$ und $\varphi(t)$ eingeführt (siehe auch [AS 2005]):

$$\begin{aligned} \dot{z} &:= u, \quad z \in D^1_m[t_0, T] \\ \dot{w} &:= v, \quad w \in D^1_m[t'_0, T']. \end{aligned}$$

Der Ungleichung $S(t, x, y) \geq 0$ in $[t'_0, T']$ wird dort ein Ersatzproblem mit $\varphi \in D^1_h[t'_0, T']$ zugeordnet:

$$\begin{aligned} S &=: \varphi_1^2 \\ \dot{S} &=: \varphi_2 \\ &\vdots \\ S^{(h-1)} &=: \varphi_h \end{aligned} \tag{5}$$

und dazu ein äquivalentes System von Differentialgleichungen in $[t'_0, T']$

$$\begin{aligned} 2\varphi_1\dot{\varphi}_1 - \varphi_2 &= 0 \\ \dot{\varphi}_2 - \varphi_3 &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{\varphi}_h - R_0(t, x, y, \dot{z}, \dot{w}) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

mit $R_0 = S^{(h)} = L^h_f S$ und Randbedingungen

$$\begin{aligned} (S - \varphi_1^2)|^{T'} &= 0 \\ (\dot{S} - \varphi_2)|^{T'} &= 0 \\ &\vdots \\ (S^{(h-1)} - \varphi_h)|^{T'} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Variationsproblem

Gesucht sind $(x, z) \in D^1_{n+m}[t_0, T]$, $(y, w, \varphi) \in D^1_{n+m+h}[t'_0, T']$, so daß

$$J \rightarrow \min$$

mit der Dynamik:
- Differentialgleichungen (3)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, x, \dot{z}) \\ \dot{y} &= f_2(t, x, \dot{w}), \end{aligned} \tag{8}$$

- Differentialgleichungen (6)

$$\tilde{R}(t, x, y, \dot{z}, \dot{w}, \varphi, \dot{\varphi}) = 0, \quad \tilde{R} : \mathbb{R}^{1+2n+2m+2h} \rightarrow \mathbb{R}^h \tag{9}$$

auf den entsprechenden Intervallen
und den Randbedingungen:
- Randbedingung $g = 0$ nach (2) bei freien t_0, t_0', T', T,
- gemischte Rand- und Innenbedingung nach (7)

$$\tilde{g}(T', x(T'), y(T'), \varphi(T')) = 0, \quad \tilde{g} : \mathbb{R}^{1+2n+h} \rightarrow \mathbb{R}^h. \tag{10}$$

Dieses Variationsproblem ist ein Lagrangeproblem mit (impliziten) Differentialgleichungen (8)und (9) als Nebenbedingungen. Es ändert sich insbesondere die Anzahl der Differentialgleichungen beim Wechsel in den anderen Integrationsbereich.
Das Grundprinzip der Variationsrechnung besteht nun darin, zu einem vorgegebenen (fiktiven) optimalen Element (Funktion und Randvariable) eine Familie von zulässigen Elementen zu finden, in die das vorgelegte Element für einen speziellen Parameter eingebettet ist. Dazu sind gewisse Rangvoraussetzungen an die Differentialgleichungen und an die Randfunktionen g und $\tilde{g}$ erforderlich. Die Voraussetzungen V2, V3 und V4 sichern diese Rangvoraussetzungen (siehe auch [AS 2005]). Es läßt sich die Existenz zulässiger Vergleichselemente zeigen (Einbettungslemma, [Bl 1946] S.196 ff. für Variationsprobleme und [Ab 1975] für Optimalsteuerprobleme).

4 Notwendige Optimalitätsbedingungen

4.1 Kurvenscharen und Variationen

Ausgehend von einem optimalen $x(t)$ in $[t_0, T]$ mit Knickpunkten $t_s \in (t_0, T)$, $s = 1...s_0$, wird eine Familie von Elementen

$$x(t, \epsilon),\ \epsilon \in U(0) \subset \mathbb{R} \text{ mit Knickpunkten } t_s(\epsilon) \in (t_0(\epsilon), T(\epsilon))$$

untersucht mit den Eigenschaften:

1. $x(t)$ in $[t_0, T]$ ist für $\epsilon = 0$ in der Schar $x(t, \epsilon)$ in $[t_0(\epsilon), T[\epsilon)]$ enthalten mit $t_s = t_s(0)$ (Einbettung)
2. $x(t, \epsilon)$ in $[t_0(\epsilon), T(\epsilon)]$ ist zulässig $\forall \epsilon \in U(0)$
3. $x(t, \cdot)$ *und* $t_{\bar{s}}(\cdot)$ sind differenzierbar $\forall \epsilon \in U(0),\ \bar{s} = 0, ..., s_0 + 1,\ t_{s_0+1} := T$

([Bl 1946], S.194 ff.). Analoge Ansätze können für y, z, w, φ auf den entsprechenden Intervallen gemacht werden.
Für die Variation dieser Schar sind einige spezielle Strukturen zu berücksichtigen. Für festes t ergibt sich aus $x(t, \epsilon)$ die Ortsvariation $\delta x(t) := x(t, \epsilon)_{,\epsilon}\, |^{\epsilon=0}$, zu $t_{\bar{s}}(\epsilon)$ die Zeitvariation $\delta t_{\bar{s}} := t_{\bar{s}}'(0)$, und für $x(t_{\bar{s}}(\epsilon), \epsilon)$ die Totalvariation

$$\Delta x(t_{\bar{s}} \pm 0) := \dot{x}(t_{\bar{s}} \pm 0)\delta t_{\bar{s}} + \delta x(t_{\bar{s}} \pm 0) \; in \; [t_0, T]$$

analog für $t = t_0$, $t = T$ und für die Knickpunkte $t = t_\gamma \in [t_0', T']$:

$$\Delta y(t \pm 0) := \dot{y}(t \pm 0)\delta t + \delta y(t \pm 0)$$
$$\Delta \varphi(t \pm 0) := \dot{\varphi}(t \pm 0)\delta t + \delta \varphi(t \pm 0).$$

Für Totalvariationen gilt wegen der Stetigkeit der Funktionenfamilie $x(t,\epsilon)\ \forall\,\epsilon$ die Gleichheit der Grenzwerte: z. B. $\Delta x(t_s-0)=\Delta x(t_s+0)$; für die Ortsvariationen läßt sich dies nicht behaupten,

Diskussion

1. Seien t_1 und t_2 die (einzigen) Verbindungspunkte in (t_0', T'). Dann ist in $[t_1,t_2]\quad S=0$ und damit auch $\varphi=0$. Für die Totalvariation $\Delta\varphi$ muß deshalb $\Delta\varphi=0$ in t_1+0 und t_2-0 sein und wegen der Gleichheit der Grenzwerte auch $\Delta\varphi(t_1-0)=0$, $\Delta\varphi(t_2+0)=0$.
2. Da die Randwerte $x(t_0), x(T), y(t_0'), y(T')$ fest sind, ist dort $\delta x(t_0)=\delta x(T)=0$, $\delta y(t_0')=\delta y(T')=0$, also z,B. $\Delta x(t_0)=\dot{x}(t_0)\delta t_0$.
3. $x(t_0'), x(T')$ sind frei. Deshalb gilt $\Delta x(t-0)=\Delta x(t+0))$ füt $t=t_0'$ und $t=T'$.

4.2 Notwendige Bedingungen für das Lagrangeproblem der Variationsrechnung

Die notwendige Optimalitätsbedingung für das Variationsproblem mit Nebenbedingungen ist

$$\delta J\;=\;0$$

für alle zulässigen Variationen $(\delta t,\delta x,\delta y,\delta\varphi)$, welche insbesondere den linearisierten Differentialgleichungen genügen müssen. Mit entsprechend gewählten Lagrangefunktionen F und G muß

$$\delta J=\delta\int_{t_0}^{T}F\,dt\;+\;\delta G\;=\;0$$

sein für alle im Sinne von Abschnitt 4.1 zulässigen Variationen (freies Minimum).

Vereinbarungen

1. Lagrangefunktion: Mit

$$\begin{array}{lll} F_1 := l_0 f_{01} + \lambda_1(f_1-\dot{x}), & [t_0,T] \\ F_2 := l_0 f_{02} + \lambda_2(f_2-\dot{y}), & [t_0',T'] \end{array}$$

wird

$$F\;:=\;\begin{cases} F_1, & (t_0,t_0')\,\cup\,(T',T) \\ F_1+F_2+\rho_1(\varphi_2-2\varphi_1\dot{\varphi}_1)+...+\rho_h(R_0-\dot{\varphi}_h), & (t_0',T') \end{cases}\tag{11}$$

erklärt.

2. Rand-Lagrangefunktion

$$G\;:=\;l_0(g_{01}+g_{02})\;+\;\tilde{l}\tilde{g}\;+\;lg\tag{12}$$

3. Um später wieder zum in der Optimalsteuertheorie üblichen Hamiltonkalkül zurückzukehren wird mit

$$H_1\;:=\;l_0 f_{01}\;+\;\lambda_1 f_1\tag{13}$$

$$H_2 \;:=\; l_0 f_{02} \;+\; \lambda_2 f_2 \tag{14}$$

vereinbart

$$H \;:=\; \begin{cases} H_1 & \text{auf } (t_0, t_0') \;\cup\; (T', T) \\ H_1 \;+\; H_2 \;+\; \rho_h R_0 & \text{auf } (t_0', T'). \end{cases} \tag{15}$$

Bemerkung

Eine Hamiltonfunktion nach den Regeln der Variationsrechnung (modifizierte Legendretransformation) wäre in (t_0', T'):

$$\tilde{H} \;=\; F - \dot{x}F,_{\dot{x}} - \dot{y}F,_{\dot{y}} - \dot{\varphi}F,_{\dot{\varphi}} \;=\; l_0(f_{01} + f_{02}) + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \rho_1 \dot{S} + \rho_2 \ddot{S} + ... + \rho_h R_0$$

Für diese würde gelten: $\tilde{H} \;\in\; D^1$, $\;\dot{\tilde{H}} \;=\; \tilde{H},_t$ (Energiesatz). Da die in der Optimalsteuertheorie für diesen Fall übliche Hamiltonkunktion H aus $\tilde{H}$ durch Streichung der Terme $\rho_\nu S^{(\nu)}$, $\nu = 1, ...h - 1$ entsteht, muß man sich um eine energiesatzähnliche Aussage separat kümmern.

Teilstruktur: Berechne $\delta \int_{t_0}^{t_0'} F\, dt$

Mit $t_{\beta'}(\epsilon) \;\in\; (t_0(\epsilon), t_0'(\epsilon))$, $\;t_{\beta_0'+1} := t_0'$ folgt:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_0'} F\, dt \quad &=: \frac{d}{d\epsilon} \left(\int_{t_0(\epsilon)}^{t_0'(\epsilon)} F(t, x(t,\epsilon), \dot{x}(t,\epsilon) \dot{z}(t,\epsilon))\, dt \right) \Bigg|^{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left(\sum_{\beta'=0}^{\beta_0'} \int_{t_{\beta'}(\epsilon)}^{t_{\beta'+1}(\epsilon)} F(...)\, dt \right) \Bigg|^{\epsilon=0} \\ &= F|^{t_0'} \delta t_0' \;-\; F|^{t_0} \delta t_0 \;+\; \sum_{\beta'=1}^{\beta_0'} F \delta t \,\Big|_{t_{\beta'+}}^{t_{\beta'-}} \;+\; \int_{t_0}^{t_0'} (F,_x \delta x + F,_{\dot{x}} \delta \dot{x} + F,_{\dot{z}} \delta \dot{z})\, dt. \end{aligned}$$

Nach partieller Integration ergibt sich unter Einbeziehung der Totalvariation $\Delta x = \dot{x}\delta t + \delta x$:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_0'} F\, dt \;\; &= \int_{t_0}^{t_0'} ((F,_x - \frac{d}{dt} F,_{\dot{x}})\delta x - \frac{d}{dt} F,_{\dot{z}} \delta z)\, dt \\ &+ (F,_{\dot{x}} \Delta x)|_{t_0}^{t_0'} \;+\; (F,_{\dot{z}} \Delta z)|_{t_0}^{t_0'} \;+\; (F - \dot{x}F,_{\dot{x}} - \dot{z}F,_{\dot{z}})\delta t_0' \\ &- (F - \dot{x}F,_{\dot{x}} - \dot{z}F,_{\dot{z}})\delta t_0 \;+\; \sum_{\beta'} (F - \dot{x}F,_{\dot{x}} - \dot{z}F,_{\dot{z}})\delta t|_{t_{\beta'+}}^{t_{\beta'-}} \\ &+ \sum_{\beta'} (F,_{\dot{x}} \Delta x \;+\; F,_{\dot{z}} \Delta z)|_{t_{\beta'+}}^{t_{\beta'-}}. \end{aligned}$$

Nach diesem Schema kann man die Totalvariation berechnen.

$$
\begin{aligned}
\delta J \; &= \textstyle\int_{t_0}^{t_0'}((F,_x - \frac{d}{dt}F,_{\dot{x}})\delta x - \frac{d}{dt}F,_{\dot{z}}\,\delta z)\,dt \;+\; \int_{T'}^{T}(...)\,dt \\
&+ \textstyle\int_{t_0'}^{T'}((F,_x - \frac{d}{dt}F,_{\dot{x}})\delta x + (F,_y - \frac{d}{dt}F,_{\dot{y}})\delta y - \frac{d}{dt}F,_{\dot{z}}\,\delta z - \frac{d}{dt}F,_{\dot{w}}\,\delta w + (F,_\varphi - \frac{d}{dt}F,_{\dot{\varphi}})\delta\varphi)\,dt \\
&+ (F - \dot{x}F,_{\dot{x}} - \dot{z}F,_{\dot{z}})\delta t|_{t_0}^{t_0'-} + (...)|_{T'+}^{T-} + \textstyle\sum_\beta (...)\delta t|_{t_\beta+}^{t_\beta-} \\
&+ (F - \dot{x}F,_{\dot{x}} - \dot{z}F,_{\dot{z}} - \dot{y}F,_{\dot{y}} - \dot{w}F,_{\dot{w}} - \dot{\varphi}F,_{\dot{\varphi}})\delta t|_{t_0'+}^{T'-} + \textstyle\sum_\gamma (...)\delta t|_{t_\gamma+}^{t_\gamma-} \\
&+ (F,_{\dot{x}}\,\Delta x + F,_{\dot{z}}\,\Delta z)|_{t_0+}^{t_0'-} + (...)|_{T'+}^{T-} + \textstyle\sum_\beta (...)|_{t_\beta+}^{t_\beta-} \\
&+ (F,_{\dot{x}}\,\Delta x + F,_{\dot{z}}\,\Delta z) + F,_{\dot{y}}\,\Delta y + F,_{\dot{w}}\,\Delta w + F,_{\dot{\varphi}}\,\Delta\varphi)|_{t_0'}^{T'-} + \textstyle\sum_\gamma (...)|_{t_\gamma+}^{t_\gamma-} \\
&+ G,_{t_0}\,\delta t_0 + G,_{T'}\,\delta T' + G,_T\,\delta T \\
&+ G,_{x(t_0}\,\Delta x(t_0) + G,_{x(T')}\,\Delta x(T') + G,_{x(T)}\,\Delta x(T) \\
&+ G,_{y(t_0')}\,\Delta y(t_0') + G,_{y(T')}\,\Delta y(T') + G,_{\varphi(T')}\,\Delta\varphi(T') \;=\; 0,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

wobei $t_\beta \in (t_0, t_0') \cup (T', T), t_\gamma \in (t_0', T')$ und $G,_{t_0} = 0, G,_{x(t_0')} = 0, G,_{\varphi(t_0)} = 0$ ist.

4.3 Auswertung von $\delta J = 0$

Das Fundamentallemma und klassische Schlußweisen der Variationsrechnung führen nun - bei Beliebigkeit der beteiligten Variationen - auf die gesuchten notwendigen Optimalitätsbedingungen.

Eulergleichungen

$$F_1,_x - \frac{d}{dt}F_1,_{\dot{x}} \;=\; 0 \quad in\,[t_0, T] \quad \text{stückweise,} \tag{17}$$

$$F_2,_y - \frac{d}{dt}F_2,_{\dot{y}} \;=\; 0 \quad in\,[t_0', T'] \quad \text{stückweise,} \tag{18}$$

$$F_1,_{\dot{z}} \equiv F_1,_u \;=\; const. \quad in\,[t_0, T] \quad \text{stückweise,} \tag{19}$$

$$F_2,_{\dot{w}} = F_2,_v \;\equiv\; const. \quad in\,[t_0', T'] \quad \text{stückweise,} \tag{20}$$

$$F,_\varphi - \frac{d}{dt}F,_{\dot{\varphi}} \;=\; 0 \quad in\,[t_0', T'] \setminus [t_1, t_2] \quad \text{stückweise,} \tag{21}$$

(in $[t_1, t_2]$ ist $S = 0$, also $\varphi = 0$ und $\delta\varphi = 0$; das Fundamentallemma also nicht anwendbar)

Knickbedingungen (beliebige Variationen $\Delta x(\cdot)$)

$\Delta x(t_0') : (F_1,_{\dot{x}}|^{t_0'-} - F_1,_{\dot{x}}|^{t_0'+})\Delta x(t_0') = 0$, also ist $F_1,_{\dot{x}} = -\lambda_1$ in t_0' stetig,

$\Delta x(t_s)$: also $F_1,_{\dot{x}} = -\lambda_1$ in t_s stetig,

$\Delta x(T') : \quad (-F_1,_{\dot{x}}|^{T'+} + F_1,_{\dot{x}}|^{T'-} + G,_{x(T')})\Delta x(T') = 0$, also ist

$$-F_1,_{\dot{x}}|^{T'+} + F_1,_{\dot{x}}|^{T'-} + G,_{x(T')} \;=\; 0, \tag{22}$$

(22) ist eine Sprungbedingung für λ_1 in T', d.h.

$$\lambda_1 \text{ ist in } [t_0, T] \setminus \{T'\} \text{ stetig;} \tag{23}$$

analog:

$$F_{2,\dot{y}} = -\lambda_2 \text{ in } [t_0', T'] \text{ stetig,} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &F_{1,\dot{z}} = F_{1,u} \ \ in\ [t_0, T] \text{ stetig, also } F_{1,u} = const.\, \forall\, t \in [t_0, T],\\ &F_{2,\dot{w}} = F_{2,v} \ \ in\ [t_0', T'] \text{ stetig, also } F_{2,v} = const.\, \forall\, t \in [t_0', T']. \end{aligned} \tag{25}$$

Transversalitäts- und Innenbedingungen

δt_0 beliebig: Mit $\Delta x(t_0) = \dot{x}(t_0)\delta t_0$ folgt

$$[(F_{1,\dot{x}}|^{t_0} + l_0 g_{01,x(t_0)} + l_1)\dot{x}(t_0) - (F_1 - \dot{x}F_{1,\dot{x}})|^{t_0} + G_{,t_0}]\delta t_0 = 0.$$

Da l_1 nicht eingeschränkt ist, folgt hieraus in t_0 die Transversalitätsbedingung

$$-(F_1 - \dot{x}F_{1,\dot{x}})|^{t_0} + G_{,t_0} = 0 \tag{26}$$

δT beliebig: Analoge Schlüsse führen auf die Transversalitätsbedingung in T:

$$(F_1 - \dot{x}F_{1,\dot{x}})|^T + G_{,T} = 0. \tag{27}$$

$\delta t_0'$ beliebig:

$$(F_1 - \dot{x}F_{1,\dot{x}})|^{t_0'-} \ = \ (F_1 - \dot{x}F_{1,\dot{x}} - \dot{y}F_{2,\dot{y}} - \dot{\varphi}F_{,\dot{\varphi}})|^{t_0'+} \tag{28}$$

$\delta T'$ beliebig:

$$(F_1 - \dot{x}F_{1,\dot{x}} - \dot{y}F_{2,\dot{y}} - \dot{\varphi}F_{,\dot{\varphi}})|^{T'} - (F_1 - \dot{x}F_{1,\dot{x}})|^{T'} + G_{,T'} \ =: 0 \tag{29}$$

(28) ist eine Stetigkeitsbedingung und (29) eine innere Sprungbedingung (s.u.).
δt_β beliebig, $t_\beta \in (t_0, t_0') \cup (T', T)$: Die Auswertung von (16) ergibt

$$(F_1 - \dot{x}F_{1,\dot{x}})(\cdot) \text{ ist in den } t_\beta \text{ stetig} \tag{30}$$

und damit in ganz $(t_0, t_0') \cup (T', T)$.
δt_γ beliebig mit $t_\gamma \in (t_0', T')$:

$$(F - \dot{x}F_{1,\dot{x}} - \dot{y}F_{2,\dot{y}} - \dot{\varphi}F_{,\dot{\varphi}})(\cdot) \text{ ist in } t_\gamma \text{ stetig} \tag{31}$$

und somit in ganz (t_0', T'). Falls man nun die additiven stetigen Anteile in (31) unbeachtet läßt, ergibt sich die Stetigkeitsbedingung

$$(F - \dot{x}F_{1,\dot{x}} - \dot{y}F_{2,\dot{y}} + \rho_h R_0)(\cdot) \text{ ist in } (t_0', T') \text{ stetig} \tag{32}$$

$\Delta z(t_0)$ beliebig. Die Transversalitätsbedingungen $F_{1,\dot{z}}\,|^{t_0} = 0 = F_{1,u}\,|^{t_0}$ und $F_{,u} = const.$ ergeben die Gradientenbedingung

$$F_{1,u} \equiv 0 \text{ auf } [t_0, T]. \tag{33}$$

$\Delta w(t'_0)$ beliebig ergibt auf analoge Weise die Gradientenbedingung

$$F_{2,v} \equiv 0 \text{ auf } [t'_0, T']. \tag{34}$$

$\Delta\varphi(t'_0)$ beliebig führt auf $F_{,\dot{\varphi}}\,|^{t'_0+} = 0$, also auf

$$\begin{aligned} (2\varphi_1\rho_1)|^{t'_0+} &= 0 \\ \rho_2|^{t'_0+} &= 0 \\ &\vdots \\ \rho_h|^{t'_0+} &= 0, \end{aligned} \tag{35}$$

d.h., falls noch $S|^{t'_0} > 0$ erfüllt ist, auf $\rho(t'_0) = 0$.
$\Delta\varphi(T')$ beliebig ergibt $F_{,\dot{\varphi}}\,|^{T'-} + G_{,\varphi(T')} = 0$, also

$$\begin{aligned} \varphi(T')[\rho_1(T') + \tilde{l}_1] &= 0 \\ \rho_2(T') + \tilde{l}_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \rho_h(T') + \tilde{l}_h &= 0, \end{aligned} \tag{36}$$

(Zusammenhang zwischen den Multiplikatoren $\tilde{l}$ und ρ).
$\Delta\varphi(t_\gamma)$ beliebig, $t_\gamma \in (t'_0.T') \setminus [t_1, t_2]$, ergibt die Stetigkeit von $F_{,\dot{\varphi}}$ in den t_γ und damit auf ganz $(t'_0, T') \setminus [t_1, t_2]$. Also sind $S\rho_1, \rho_2, ..., \rho_h$ dort stetig. Da in den Verbindungspunkten t_1 und t_2 die Totalvariation von φ verschwindet, ist dort die Stetigkeit der ρ nicht notwendig.

Diskussion der Eulergleichungen (21):

$$\begin{aligned} 0 = &\; -2\dot{\varphi}_1\rho_1 + (\rho_1 2\varphi_1)^{\cdot} = 2\varphi_1.\dot{\rho}_1 \\ 0 = &\; \rho_1 + \dot{\rho}_2 \\ &\vdots \\ 0 = &\; \rho_{h-1} + \dot{\rho}_h \end{aligned} \tag{37}$$

stückweise in $[t'_0, T') \setminus [t_1, t_2]$ mit stetigem $\rho := (\rho_1, ..., \rho_h)$. Eliminiert man die $\rho_1, ..., \rho_{h-1}$ sukzessiv und verwendet $S = \varphi_1^2$, so folgt die Schlupfbedingung

$$S\rho_h^{(h)} = 0 \text{ auf } [t'_0, T'] \setminus [t_1, t_2], \tag{38}$$

d.h. für $S > 0$ ist $\rho_h^{(h)} = 0$, also $\rho_h(t)$ ein Polynom vom Grad $h-1$. Speziell für $h = 1$ ist ρ_h konstant auf $[t'_0, T'] \setminus [t_1, t_2]$. Für $t_1 \neq t'_0$, also $S > 0$ in $[t'_0, t_1)$, folgt dann nach (35) dort sogar $\rho_h \equiv 0$. In (t_2, T') ist $\rho_h \equiv const.$.

Einige notwendige Bedingungen im Hamiltonkalkül
Nach den Vereinbarungen (11), (13)-(15) ist wegen $F_{1,\dot{x}} = -\lambda_1,\ F_{2,\dot{y}} = -\lambda_2$.

$$\begin{aligned} H_1 &= l_0 f_{01} + \lambda_1 f_1 = F_1 - \dot{x} F_{1,\dot{x}} \\ H_2 &= l_0 f_{02} + \lambda_2 f_2 = F_2 - \dot{y} F_{2,\dot{y}} \end{aligned}$$

und damit $H_{1,x} = F_{1,x}\,,\ H_{2,y} = F_{2,y}\,.$
Diese und ähnliche Strukturen tauchen in den notwendigen Optimalitätsbedingungen beständig auf. Es ist eine klassische Konzeption der Variationrechnung, die notwendigen Optimalitätsbedingungen statt im Lagrangekalkül (mit der Lagrangefunktion F) im Hamiltonkalkül (mit der Hamiltonfunktion $\tilde{H}$) zu formulieren. Auch die verkürzte Hamiltonfunktion H lässt sich dazu (fast) problemlos benutzen. Interessant in diesem Zusammenhang sind insbesondere die Bedingungen (22), (28) und (29).

Zur Sprungbedingung (22):

$$0 = -F_{1,\dot{x}}\,|^{T'+} + F_{1,\dot{x}}\,|^{T'-} + G_{,x(T')} = \lambda_1(T'+) - \lambda_1(T'-) + \sum_{\alpha=1}^{h} \tilde{l}_\alpha S^{(\alpha-1)}{}_{,x}\,|^{T'}$$

oder mit (36)

$$\lambda_1(T'+) = \lambda_1(T'-) + \sum_{\alpha=1}^{h} (\rho_\alpha S^{(\alpha-1)}{}_{,x}\,)|^{T'-}. \tag{39}$$

(39) erweist sich als Sprungbedingung für den Multiplikator λ_1. Eine Transversalitätsbedingung für λ_2 in T' ist nicht zu erwarten, da $y(T')$ fest ist ($\delta y(T') = 0$).

Zur Sprungbedingung (28):

$$H_1|^{t_0'-} = (H_1 + H_2)|^{t_0'-} + (\rho_1 \dot{S} + \rho_2 \ddot{S} + \ldots + \rho_h S^{(h)})|^{t_0'+} = \tilde{H}|^{t_0'+}$$

Falls nun $S|^{t_0'+} > 0$ ist, folgt nach (35) $\rho(t_0'+) = 0$. Im Intervall $[t_0', t_1)$ ist also $\tilde{H} = H = H_1 + H_2$. Die Sprungbedingung erweist sich als Stetigkeitsbedingung für die Gesamthamiltonfunktion H in t_0' : Falls $S(t_0'+) = 0$ ist und t_0' nach Annahme kein Berührungspunkt ist, gibt es ein Intervall $[t_0', t_0' + \epsilon]$ mit $S \equiv 0$ und damit auch $\dot{S} = \ldots = S^{(h)} = 0$. H ist also auch dann in t_0' stetig.

Zur Sprungbedingung (29):
Da nach Voraussetzung $S|^{T'} > 0$ sein soll, kann man (29) unter Verwendung von (36) ($\tilde{l} = -\rho(T')$) in die Form

$$(H_1 + H_2)|^{T'-} + \sum_{\alpha=1}^{h} \left[\rho_\alpha \left(S^{(\alpha)} - S^{(\alpha-1)}{}_{,t}\right)\right]\Big|^{T'-} := H_1|^{T'+}$$

bringen (i.a. Sprungbedingung für die Hamiltonfunktion).
(Im späteren Anwendungfall ist $S_{,t} = 0,\ h = 1$. Dann ist die Sprungbedingung eine Stetigkeitsbedingung für H in T' : $(H_1 + H_2)|^{T'-} + \rho_1(T) R_0|^{T'-} = H_1|^{T'+}$].

Zum Energiesatz:
Aus der Lagrangefunktion des Variationsproblems für das Intervall $[t_0', T']$

$$F = l_0 f_0 + \lambda_1(f_1 - \dot{x}) + \lambda_2(f_2 - \dot{y}) + \rho_1(\varphi_2 - 2\varphi_1\dot{\varphi}_1) + ... + \rho_h(R_0 - \dot{\varphi}_h)$$

erhält man mit Hilfe einer modifizierten Legendretransformation eine formale Hamiltonfunktion

$$\tilde{H} := F - \dot{x}F_{,\dot{x}} - \dot{y}F_{,\dot{y}} - \dot{z}F_{,\dot{z}} - \dot{w}F_{,\dot{w}} - \dot{\varphi}F_{,\dot{\varphi}}\,.$$

Die kanonischen Variablen sind im Wesentlichen die Multiplikatoren λ und ρ. Längs der extremalen Elemente reduziert sich $\tilde{H}$ auf

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= l_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + 2\rho_1\varphi_1\dot{\varphi}_1 + \rho_2\dot{\varphi}_2 + ... + \rho_h\dot{\varphi}_h \\ &= l_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \rho_1\varphi_2 + \rho_2\varphi_3 + ... + \rho_h R_0 \\ &= H + \rho_1\varphi_2 + \rho_2\varphi_3 + ... + \rho_{h-1}\varphi_h\end{aligned}$$

Für dieses $\tilde{H}$ gilt: $\tilde{H} \in D^1$ längs der extremalen Elemente und

$$\dot{\tilde{H}} = \tilde{H}_{,t}\,,$$

der klassische Energiesatz (siehe z. B. Hestenes [He 1966], s. 72ff). Dieser Energiesatz wird nun für die verkürzte Hamitonfunktion H interpretiert. Mit $\tilde{H}_{,t} = H_{,t}$ und

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{H}} &= \dot{H} + \dot{\rho}_1\varphi_2 + \rho_1\dot{\varphi}_2 + ... + \dot{\rho}_{h-1}\varphi_h + \rho_{h-1}\dot{\varphi}_h \\ &= \dot{H} + \dot{\rho}_1\dot{S} + \rho_{h-1}R_0 \\ &= \dot{H} + (-1)^h\rho_h^{(h)}\dot{S} - \dot{\rho}_h R_0\end{aligned}$$

bei Verwendung der Eulergleichungen (38) und den Nebenbedingungen (6). Auf $[t_0', T'] \setminus [t_1, t_2]$ ist $\rho_h^{(h)} = 0$; auf $[t_1, t_2]$ sind $\dot{S} = 0$ und $S^{(h)} = R_0 = 0$. Also bleibt:

$$\dot{H} - \dot{\rho}_h R_0 = H_{,t}$$

auf $[t_0', T']$ bzw $[t_0', T] \setminus [t_1, t_2]$. Für Probleme mit $h = 1$ ist $\dot{\rho}_1 = 0$ auf $[t_0', T] \setminus [t_1, t_2.]$, also gilt dann ein Energiesatz $\dot{H} = H_{,t}$. Für $h > 1$ ist im autonomen Fall ($H_{,t} = 0$) nicht mehr $H = const.$.

4.4 Notwendige Bedingungen für das Optimalsteuerproblem

Annahmen

1. Es gibt nicht mehr als zwei Verbindungsstellen t_1 und t_2 in $[t_0', T']$, d.h. $S = 0$ in $[t_1, t_2]$.
2. t_0' ist kein Berührungspunkt.
3. Die Ordnung des Problems sei $h \geq 1$.

Satz 4.1 Unter den Annahmen 1. - 3. gilt:
Falls (x, u) in $[t_0, T]$ und (y, v) *in* $[t'_0, T']$ das vorgelegte Problem lösen, folgt:
Es gibt Multiplikatoren $(l_0, \lambda_1, \lambda_2, \rho_h)$, $l_0 \geq 0$, $\lambda_1 \in D^1_n([t_0, T] \setminus \{T'\})$, $\lambda_2 \in D^1_n[t'_,T']$,
$\rho \in C^h$ auf $[t'_0, T'] \setminus [t_1, t_2]$,
$(l_0, \lambda_1) \neq 0$ auf $[t_0, t'_0] \cup [T', T]$, $(l_0, \lambda_1, \lambda_2, \rho_h, \dot{\rho}_h, ..., \rho_h^{(h-1)}) \neq 0$ auf $[t'_0, T'] \setminus [t_1, t_2]$,
$(l_0, \lambda_1, \lambda_2, \rho_h) \neq 0$ auf $[t_1, t_2]$, so daß mit H nach (15) gilt:

(i)	$H(\cdot) \in D^1([t_0, T] \setminus \{T'\})$ (Knickbedingung)
(ii)	$\dot{\lambda}_1 = -H_{,x}$, stückweise auf $[t_0, T]$ $\dot{\lambda}_2 = -H_{,y}$, stückweise auf $[t'_0, T']$ (Eulergleichungen)
(iii)	$H_1(\cdots, \bar{u}) \geq H_1(\cdots, u)$, $\forall$ zulässigen $\bar{u}$ auf $[t_0, t'_0] \cup [T', T]$ $H(\cdots, \bar{u}, \bar{v}) \geq H(\cdots, u, v)$, $\forall$ zulässigen $(\bar{u}, \bar{v})$ auf $[t'_0, T']$ (Maximumprinzip)
(iv)	$0 = H_{,u}$, auf $[t_0, T]$ $0 = H_{,v}$ auf $[t'_0, T']$ (Gradientenbedingung)
(v)	$\dot{H} = H_{,t}$, auf $[t_0, t'_0] \cup [T', T]$ $\dot{H} - \dot{\rho}_h R_0 = H_{,t}$, auf $[t'_0, T']$ (Energiesatz)
(vi)	$S\rho_h^{(h)} = 0$, auf $[t'_0, T'] \setminus [t_1, t_2]$ (Schlupfbedingung)
(vii)	$H_1(t_0) = l_0 g_{01,t_0}$ $H_1(T) = -l_0 g_{02,T}$ (Transversalitätsbedingung)
$(viii)$	$(S\rho_1)\vert^{t'_0} = 0$, $\rho_2(t'_0) = 0, ..., \rho_h(t'_0) = 0$, wobei $\dot{\rho}_2 = -\rho_1, \dot{\rho}_3 = -\rho_2, ..., \dot{\rho}_h = -\rho_{h-1}$ auf $[t'_0, T'] \setminus [t_1, t_2]$
(ix)	$\lambda_1(T'+) = \lambda_1(T'-) + \sum_{\alpha=1}^h \rho_\alpha(T'-)(S^{(\alpha-1)}{}_{,x})\vert^{T'-}$ (Sprungbedingung)
(x)	$(H_1 + H_2\vert^{T'-} + \sum_{\alpha=1}^h \left[\rho_\alpha \left(S^{(\alpha)} - S^{(\alpha-1)}{}_{,t}\right)\right]\Big\vert^{T'-} = H_1\vert^{T'+}$ (Sprungbedingung)
(xi)	*Bei* $l_0 = 1$ *ist* $(-1)^h \rho_h^{(h-1)}$ auf $[t'_0, T']$ nicht wachsend. (Monotoniebedingung)

Folgerungen und Bemerkungen

1. In den Verbindungspunkten t_1 und t_2 folgt aus der Stetigkeit der Gesamthamiltonfunktion H

$$\begin{aligned} (H_1 + H_2 + \rho_h R_0)\vert^{t_1-} &= (H_1 + H_2)\vert^{t_1+} \\ (H_1 + H_2)\vert^{t_2-} &= (H_1 + H_2 + \rho_h R_0)\vert^{t_2+} \end{aligned}$$

2. Die analytischen Eigenschaften von ρ_h in $[t_1, t_2]$ müssen anhand der Gleichungen $S = 0,\ H_{,u} = 0,\ H_{,v} = 0$ erschlossen werden.
3. Die D^1-Eigenschaft von H ergibt sich aus der D^1-Eigenschaft der Hamiltonfunktion $\tilde{H}$ durch Weglassen der differenzierbaren additiven Anteile.
4. Das Maximumprinzip spielt bei offenen Steuerbereichen nur eine sekundäre Rolle. Näheres kann man z. B. in [AS 2005] nachlesen.
5. Zur Nichttrivialitätsaussage für die Multiplikatoren auf $[t_0', T'] \setminus [t_2, t_2]$: Die Annahme, daß es ein $\bar{t}$ mit $(l_0, \lambda_1, \lambda_2, \rho_h, ...\rho_h^{(h-1)})|^{\bar{t}} = 0$ gibt, führt dort auf $(l_0, \lambda_1, \lambda_2, \rho) = 0$, im Widerspruch zur Nichttrivialitätsaussage im unterliegenden Variationsproblem.
6. zu (xi): Für $h = 1$-Probleme ist eine Monotonieaussage für das optimale ρ_h auf $[t_0', T']$ notwendig: ρ darf nicht fallen ([AS 2005]). Die Bedingung (xi) für $h > 1$ wird im Anschluß bewiesen, da sie beweistechnisch etwas aus dem Rahmen des bisher Aufgeschriebenen fällt.

Beweis der Aussage (xi) des Satzes
Vorher

Satz 4.2 Sei $N : [a, b] \to \mathbb{R}^1,\ N \in D^s[a, b]$. Dann gilt:

$L(k) := \int_a^b N(t)k^{(s)}(t)\,dt \geq 0,\ \forall k \in C^s,\ k \geq 0$ mit
$k(a) = k(b) = 0, ..., k^{(s-1)}(a) = k^{(s-1)}(b) = 0$
$\Leftrightarrow (-1)^s N^{(s)}(t) \geq 0$ stückweise
$\Leftrightarrow (-1)^s N^{(s-1)}$ nicht fallend

Beweis: Unter Einbeziehung der Randbedingungen für k läßt sich $L(k)$ umformen.

$$L(k) = -\int_a^b N' k^{(s-1)}\,dt + (N k^{(s-1)})|_a^b = ... = (-1)^{s-1} \int_a^b N^{(s-1)} k'\,dt$$

Für die Situation um $L(k)$ in der neuen Form ist eine Abwandlung des Fundamentallemmas für Funktionen mit Vorzeichenbeschränkung passend:
$L(k) \geq 0\ \forall\, k \geq 0,$ mit $k(a) = k(b) = 0, ..., k^{(s-1)}(a) = k^{(s-1)}(b) = 0 \ \Rightarrow\ (-1)^{s-1} N^{(s-1)}$ ist auf $[a, b]$ nicht wachsend bzw. $(-1)^{s-1} N^{(s)} \leq 0$ stückweise auf $[a, b]$, q.e.d.,
(Aussage und Beweis analog Satz 4.2 in [AS 2005] mit leicht modifizierter zulässiger „Testfunktion“ $k_\epsilon(t)$)

Untersuche das Standardproblem mit beschränktem Zustand

$\int_a^b f_0(t, x, u)\,dt \Rightarrow \min,\ \dot{x} = f(t, x, u),\ x(a) = x_a, x(b) = x_b,\ S(t, x) \geq 0,$
$f_0 : \mathbb{R}^{1+n+m} \to \mathbb{R}^1\,;\, f : \mathbb{R}^{1+n+m} \to \mathbb{R}^n\,;\, S : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^1\,;$
$S(\cdot, \cdot),\ f(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^h,\ f_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2$

Die Ordnung des Problems sei h; das Problem sei normal ($l_0 = 1$). Die Restriktion $S(t, x) \geq 0$ wird wieder in ein äquivalentes Sytem von Differentialgleichungen und Randbedingungen überführt ((5)-(7)). Da $S(t, x) = \varphi_1^2(t)$ ist, bestimmen sich zulässige Variationen nach $S_{,x}\,\delta x = 2\varphi_1 \delta\varphi_1$. Zulässigkeit von $x + \epsilon\delta x$ erfordert

$S(t,x+\epsilon\delta x) = S(t,x) + S_{,x}(t,x)\epsilon\,\delta x + o(\epsilon) \geq 0\ \forall\epsilon \in U(0)$, also $S_{,x}\,\delta x \geq 0\ \forall\epsilon \geq 0$. Variiert man das System der Differentialgleichungen (6), ergibt sich ein System von Differentialgleichungen für zulässige Variationen $\delta\varphi$.

$$\begin{aligned} (2\varphi_1\delta\varphi_1)^{\cdot} &= \delta\varphi_2, \\ \delta\dot{\varphi}_2 &= \delta\varphi_3, \\ &\vdots \\ \delta\dot{\varphi}_h &= R_{0,x}\,\delta x + R_{0,u}\,\delta u = \delta\ddot{\varphi_{h-1}} = \ldots = (2\varphi_1\delta\varphi_1)^{(h)} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $rg(R_{0,u}) = 1 = max$. Sei o.E.d.A. R_{0,u_1} regulär. Dann läßt sich die letzte Variationsgleichung (lokal) nach δu_1 auflösen,

$$\delta u_1 = {R_{0,u_1}}^{-1}(-R_{0,\bar{u}}\,\delta\bar{u} - R_{0,x}\,\delta x + (2\varphi_1\delta\varphi_1)^{(h)}),$$

d.h., die Variation δu_1 ist abhängig.
Variation des Zielfunktionals und der Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} \delta J &= \textstyle\int_a^b (f_{0,x}\,\delta x + f_{0,u}\,\delta u)\,dt, \quad \delta\dot{x} = f_{,x}\,\delta x + f_{,u}\,\delta u \\ \delta J &= \textstyle\int_a^b ((f_{0,x} + \lambda f_{,x})\delta x - \lambda\delta\dot{x} + (f_{0,u} + \lambda f_{,u})\delta u)\,dt. \end{aligned}$$

Notwendige Optimalitätsbedingung:

(x,u) minimiert J bezüglich zulässiger Vergleichselemente $x+\epsilon\delta x, u+\epsilon\delta u, \varphi+\epsilon\delta\varphi$, $\epsilon \geq 0$. Dann folgt

$$J_\epsilon - J_0 \geq 0\ \forall\epsilon \geq 0,\ \text{also}\ \delta J \geq 0.$$

Unter Einbeziehung von $\bar{H} := f_0 + \lambda f$ erhält man

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_a^b (\bar{H}_{,x}\,\delta x - \lambda\delta\dot{x} + \bar{H}_{,u}\,\delta u)\,dt = \\ &\textstyle\int_a^b (\bar{H}_{,x}\,\delta x - \lambda\delta\dot{x} + \bar{H}_{,u_1}\,{R_{0,u_1}}^{-1}(-R_{0,\bar{u}}\,\delta\bar{u} - R_{0,x}\,\delta x + (2\varphi_1\delta\varphi_1)^{(h)}) + \bar{H}_{,\bar{u}}\,\delta\bar{u})\,dt \geq 0 \\ &\forall\delta x, \delta\bar{u}\ \text{und}\ 2\varphi_1\delta\varphi_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Setze $\rho_h := -\bar{H}_{,u_1}\,R_{0,u_1}^{-1}$ also $\bar{H}_{,u_1} + \rho_h R_{0,u_1} = 0$, $H_{,u_1} = 0$ mit $H := \bar{H} + \rho_h R_0$. Es bleibt

$$\int_a^b (H_{,x} + \dot{\lambda})\delta x + H_{,\bar{u}}\,\delta\bar{u} - \rho_h(2\varphi_1\delta\varphi_1)^{(h)})\,dt \geq 0\ \forall\delta x, \delta\bar{u}, 2\varphi_1\delta\varphi_{\geq}0$$

Das Fundamentallemma der Variationrechnung liefert dann Eulergleichungen und Gradientenbedingung $\dot{\lambda} = -H_{,x}$ und $H_{,\bar{u}} = 0$ und die Ungleichung

$$\int_a^b -\rho_h(2\varphi_1\delta\varphi_1)^{(h)})\,dt \geq 0 \quad \forall\delta\varphi_1,\ \text{mit}\ 2\varphi_1\delta\varphi_1 \geq 0.$$

Nach Satz(4.2) folgt die gewünschte Aussage: $(-1)^h(-\rho_h)^{(h-1)}$ ist nicht fallend; $(-1)^h\rho_h^{(h-1)}$ ist nicht wachsend. q.e.d.

Bemerkungen

1. $\rho_h^{(h-1)}(t)$ ist $\forall\, h$ und $\forall\, t \in [t_0', t_1] \cup [t_2, T']$ stückweise konstant.
2. Für $h = 1$ muß also ρ_h nicht fallend und für $h = 2$ muß $\dot{\rho}_h$ nicht wachsend sein.

Bezug zum Ausgangsproblem: Die eben bewiesene Aussage muß auf das Teilintervall $[t_0', T']$ sinngemäß angewendet werden. Da aber dort kein Festrandproblem vorliegt, ist noch ein Hinweis angebracht: Wenn $\bar{x}$ ein Variationsproblem mit nichtfesten Rändern löst, dann ist es auch Lösung eines Problems mit festen Rändern $x(a) = \bar{x}(a), x(b) = \bar{x}(b)$. Notwendige Bedingungen für dieses Problem sind natürlich auch notwendige Bedingungen für das Ausgangsproblem mit nichtfesten Rändern.

Für Probleme mit dem Relativgrad (Ordnung des Problems) $h = 1$ gibt es eine hinreichende Stetigkeitsbedingung für den Multiplikator ρ_h in der Eintrittsstelle t_1 bzw. Austrittsstelle t_2. In (t_0', t_1) bzw. in (t_2, T_0') ist ρ_h stückweise konstant; die Stetigkeit von ρ_h in (t_1, t_2) hängt insbesondere von den analytischen Eigenschaften von S ab.

Satz 4.3 Der Multiplikator ρ_h ist in den Verbindungsstellen t_1 bzw. t_2 stetig, falls dort $R_0(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ unstetig ist, wobei $R_0(t, x, u) := \dot{S}(t, x) = S_t + S_x f$ ist.

Beweis:
(nach einer Beweisidee von Hestenes [He 1966])
Betrachte $H(..., u, \rho) = l_0(f_{01} + f_{02}) + \lambda f + \rho R_0$ in $[t_0', T']$. Es wird z. B. wieder benutzt: $u^-(t_i) := u(t_i - 0),\ i = 1, 2$. Setze

$$\begin{aligned} H_1 &:= H(..., u^-, \rho^-) \\ H_2 &:= H(..., u^-, \rho^+) \\ H_3 &:= H(..., u^+, \rho^-) \\ H_4 &:= H(..., u^+, \rho^-) \end{aligned}$$

in t_i. Dann folgt aus dem Minimumprinzip $(H(..., u) \leq H(..., \bar{u})\ \forall$ zulässigen $\bar{u},\ \forall t)$ $H_1 \leq H_3$ und $H_4 \leq H_2$, also

$$H_1 - H_3 + H_4 - H_2 \leq 0. \tag{40}$$

Wegen

$$\begin{aligned} H_2 &= H_1 + (\rho^+ - \rho^-) R_0^- \text{ und} \\ H_3 &= H_4 - (\rho^+ - \rho^-) R_0^+ \end{aligned}$$

erhält man nach (40)

$$(\rho^+ - \rho^-)(R_0^+ - R_0^-) \leq 0 \text{ in den } t_i. \tag{41}$$

Für $h = 1$ hat man in t_1: $S(t_1 - \epsilon) \geq S(t_1) = 0$ und in t_2: $S(t_2 + \epsilon) \geq S(t_2) = 0$, woraus $\dot{S}(t_1 - 0) \leq 0 = \dot{S}(t_1 + 0)$ und $\dot{S}(t_2 - 0) = 0 \leq \dot{S}(t_2 + 0)$, also

$$R_0^- \leq R_0^+$$

in t_1 und t_2 folgt. Da ρ nicht fallend ist, muß

$$\rho^+ - \rho^- \geq 0$$

sein. Eine Auswertung der Ungleichung (41) ergibt dann

$$(\rho^+ - \rho^-)(R_0^+ - R_0^-) = 0.$$

Falls also $R_0^+ \neq R_0^-$ in t_1 oder t_2 ist, muß dort $\rho^- = \rho^+$ sein. q.e.d.

Bemerkung: Für Probleme mit $h > 1$ lässt sich diese Beweistechnik naturgemäß nicht ohne Weiteres übernehmen.

5 Beispiele

Beispiel 1
Illustration zu den notwendigen Bedingungen (v) (Energiesatz) und (xi) (Monotonieeigenschaft von ρ_h)
Problem:

$$J = \int_0^1 \frac{u^2}{2}\, dt \rightarrow \min$$
$$\ddot{x} = u \text{ bzw. } \dot{x} = v,\ \dot{v} = u, \quad x(0) = 0,\ x(1) = -1,\ v(0) = 1,\ v(1) = -1$$
$$S(x) = l - x \geq 0,\ l \in \mathbb{R}^1$$
$$(x, v) \in D^1[0, 1],\ u \in D^0[0, 1]$$

Dies ist ein einfaches Modell für die Bewegung einer Laufkatze auf einer festen Schiene endlicher Länge l. Für verschiedene Werte von l ist die Ungleichung $l - x \geq 0$ entweder durchweg inaktiv, oder es gibt genau einen Berührungspunkt, oder es gibt ein ganzes Intervall $[t_1, t_2]$ mit $l - x = 0$. Das Beispiel wird seit seiner Erwähnung bei Bryson und Ho in der Literatur - eventuell auch mit Abwandlungen - häufig für die Illustration gewisser Phänomene bei Optimalsteuerproblemen mit Zustandsbeschränkungen benutzt. Für die Arbeit wurde es ausgewählt, weil es ein $(h = 2)$-Problem ist; außerdem ist es normal:

$$S = l - x,\ \dot{S} = -\dot{x} = -v,\ \ddot{S} = -\dot{v} = -u = R_0(u),\ h = 2,\ rg(R_{0,u}) = 1$$

Es läßt sich zeigen, daß für jedes $l : l < \frac{1}{6}$ ein nichttriviales Intervall $[t_1, t_2]$ existiert mit $x(t) \equiv l$. Wähle $l = \frac{1}{9}$. Dann ergibt sich (nach einiger Rechnung) durch Auswertung der notwendigen Optimalitätsbedingungen $t_1 = \frac{1}{3},\ t_2 = \frac{2}{3},\ x = l$ in $[t_1, t_2]$ und

$$\begin{aligned}
\left[0, \tfrac{1}{3}\right] :\quad & x = 3t^3 - 3t^2 + t,\ v = \dot{x} \\
& \dot{v} = u = 18t - 6 \\
& \rho = 0 \\
\left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right] :\quad & x = \tfrac{1}{9},\ v = 0,\ u = \dot{v} = 0 \\
& \rho = \lambda_2 = -18t + 6 \\
\left[\tfrac{2}{3}, 1\right] :\quad & x = -3t^3 + 6t^2 - 4t + 1,\ v = \dot{x} \\
& u = -18t + 12 \\
& \rho = -36t + 18 \\
& \lambda_2 = -18t + 6.
\end{aligned}$$

Die Funktionen u und ρ sind also in $[0,1]$ stetig.

$$\dot{\rho} = \begin{cases} 0, & [0, \frac{1}{3}] \\ -18, & [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ -36, & [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

ist nicht wachsend ($h = 2$, Bedingung (xi)).
Zum Energiesatz: Mit $R_0 = -u$ und $H = \frac{u^2}{2} + \lambda_1 v + \lambda_2 u - \rho u$ läßt sich unter Verwendung der Nebenbedingungen und notwendigen Bedingungen ($\dot{\lambda}_1 = 0,\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1,\ u + \lambda_2 - \rho = 0,\ \ddot{\rho} S = 0$) stückweise $\dot{H}$ berechnen:

$$\dot{H} = \dot{\rho} R_0 \text{ also } \dot{H} - \dot{\rho} R_0 = H_{,t} = 0\ \forall t \in [0,1].$$

Beispiel 2
Beispielklasse [AS 2009]

$$J \ = \int_{-\xi_2}^{\xi_2} f_{02}(y_2, u_2)\, dx \ + \int_{-\xi_1}^{\xi_1} f_{01}(y_1, u_1)\, dx \ + \ g_{01}(-\xi_1) \ \rightarrow \ \min$$

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_2 = \tan u_2,\ \dot{w}_2 = \tfrac{1}{\cos u_2}, \quad [-\xi_2, \xi_2,] \\
&\dot{y}_1 \ = \ \tan u_1,\ \dot{w}_1 = \tfrac{1}{\cos u_1}, \quad [-\xi_1, \xi_1,] \\
&y_2(-\xi_2) = y_2(\xi_2) = r_2,\ y_1(-\xi_1) = y_1(\xi_1) = r_1,\ r_1, r_2\ fest,\ \xi_1, \xi_2\ frei,\ r_2 \geq r_1, \\
&w_1(-\xi_1) = 0,\ w_1(\xi_1) \ = 1,\ w_2(-\xi_2) = 0,\ w_2(\xi_2) = l > 1, \\
&Ungleichung \quad y_2(x) \ \geq \ y_1(x)\ \forall x \in [-\xi_1, \xi_1] \subset [-\xi_2, \xi_2]
\end{aligned}$$

Funktionenklassen: $y_2 \in D^1[-\xi_2, \xi_2]$, $u_2 \in D^0[-\xi_2, \xi_2]$, $y_1 \in D^1[-\xi_1, \xi_1]$, $u_1 \in D^0[-\xi_1, \xi_1]$
Dieses Problem war ursprünglich ein Variationsproblem mit isoperimetrischer Nebenbedingung und einer Zustandsbeschränkung auf dem Teilintervall $[-\xi_1, \xi_1]$ und ging für konkrete f_{01}, f_{02}, g_{01} aus einer aus der Mechanik kommenden Aufgabenstellung hervor [SA 2009].
Angenehm ist die Symmetrie von y und u bezüglivh einer Vertikalachse in $x = 0$.
Die Ordnung des Problems ist $h = 1$:

$$S = y_2 - y_1 \geq 0,\ \dot{S} = \dot{y}_1 - \dot{y}_1 = \tan u_2 - \tan u_1 := R_0(u_1, u_2)$$

Die Rangbedingung $rg(R_{0,u}) = 1$ ist erfüllt. Sei $[-\xi_0, \xi_0]$ das Intervall, in dem die Ungleichung $S \geq 0$ aktiv ist.
Zur Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}
H_2 \ &= l_0 f_{02} + \lambda_2 \tan u_2 + \lambda_4 \tfrac{1}{\cos u_2}, && [-\xi_2, -\xi_1] \cup [\xi_1, \xi_2] \\
H_1 \ &= l_0 f_{01} + \lambda_1 \tan u_1 + \lambda_3 \tfrac{1}{\cos u_1}, && [-\xi_1, \xi_1] \\
H \ &= \begin{cases} H_2, & [-\xi_2, -\xi_1] \cup [\xi_1, \xi_2] \\ H_1 + H_2 + \rho R_0, & [-\xi_1, \xi_1] \end{cases}
\end{aligned}$$

notwendige Optimalitätsbedingung nach Satz (4.1)

Satz 5.1 Es gibt Multiplikatoren $(l_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \rho)$ *mit* $\lambda_2 \in D^1([-\xi_2, \xi_2] \setminus \{\xi_1\})$, $\lambda_4 \in D^1[-\xi_2, \xi_2,]$, $\lambda_1, \lambda_3 \in D^1[-\xi_1, \xi_1]$, $\rho \in C^1([-\xi_1, \xi_1] \setminus [-\xi_0, \xi_0])$, *so daß*

(i)	$H(\cdot y_1(\cdot), ..., \rho(\cdot)) \in D^1([-\xi_2, \xi_2] \setminus \{\xi_1\})$	
(ii)	$\dot{\lambda}_2 = -H_{,y_2}$,	stückweise in $[-\xi_2, \xi_2]$,
	$\dot{\lambda}_4 = -H_{,w_2} = 0$,	stückweise in $[-\xi_2, \xi_2]$,
	$\dot{\lambda}_1 = -H_{,y_1}$,	stückweise in $[-\xi_1, \xi_1]$,
	$\dot{\lambda}_3 = -H_{,w_1} = 0$,	stückweise in $[-\xi_1, \xi_1]$,
(iv)	$0 = H_{,u_2}$,	in $[-\xi_2, \xi_2]$
	$0 = H_{,u_1}$,	in $[-\xi_1, \xi_1]$
(vi)	$S\dot{\rho} = 0$	in $[-\xi_1, \xi_1] \setminus [-\xi_0, \xi_0]$
(v)	$\dot{\rho} = 0$ in $[-\xi_1, \xi_1] \setminus [-\xi_0, \xi_0]$	
(x)	$h = 1,\ S_{,x} = 0,\ (H_1 + H_2 + \rho R_0)\|^{\xi_1 -} = H_2\|^{\xi_1 +}$,	
	$H \in D^1[-\xi_2, \xi_2] \Rightarrow H = const.\ in\ [-\xi_2, \xi_2]$	
$(vi), (vii)$	$S\|^{-\xi_1} > 0$	
	$\Rightarrow \rho = 0$ in $[-\xi_1, -\xi_0]$, $\rho = const.\ in\ [\xi_0, \xi_1], ;$	
	ρ nicht fallend in $[-\xi_1, \xi_1]$, falls $l_0 = 1$	
(ix)	$\lambda_2(\xi_1 +) = \lambda_2(\xi_1 -) + \rho(\xi_1)$	

Folgerung
Nach (v) in den Sätzen (4.1) und (4.3) folgt: $\dot{H} = H_{,t}\ in\ [-\xi_2, \xi_2]$

6 Nachbetrachtung

Die Untersuchung von Optimalsteuerproblemen mit Zustandsbeschränkungen begann in den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts mit Arbeiten von Gamkrelidse ([Ga 1960]) und Berkovitz ([Be 1962]). Beide ersetzten die Restriktion $S(x) \geq 0$ durch Restriktionen der ersten Lie-Ableitung von S und zusätzliche Randbedingungen (indirekte Methode, Ordnung des Problems $h = 1$). Gamkrelidse benutzt bei der Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen das Maximumprinzip; Berkovitz verwendet klassische Variationsmethoden. Inzwischen gibt es eine größere Zahl von verschiedenen Herangehensweisen. Im Wesentlichen lassen sich zwei Typen unterscheiden: die direkte und die indirekte Methode (z. B. nach Feichtinger [Fe 1986]). Bei der direkten Methode wird die Funktion S direkt in eine Lagrangefunktion L eingebunden. Der der Differentialgleichung zugeordnete Multiplikator λ muß nicht unbedingt stetig sein; die Schlupfbedingung ist einfach. Die indirekte Methode benutzt höhere Lie-Ableitungen von S - in Abhängigkeit von der Ordnung h des Problems - bei der Bildung der passenden Lagrangefunktion. Dann kann man stetige Multiplikatoren λ erzwingen (siehe auch [AS 2005]). Die Stetigkeit der Multiplikatoren λ hängt u. a.q davon ab, wo man bei der Ersetzung der Restriktion $S \geq 0$ die Randbedingungen für $S, \dot{S}, ..., S^{(h-1)}$ fordert. Müssen sie am Auf- bzw. am Absprungpunkt gelten, ergeben sich für die λ dort Sprungbedingungen, werden sie am Intervallende T gefordert,

folgen dort Transversalitätsbedingungen und die λ sind im Innern stetig. Dies war z. B. in [AS 2005] der Fall. In der vorliegenden Arbeit werden die angesprochenen Randbedingungen am Ende des Intervalls $[t_0', T']$ in T', also im Innern von $[t_0, T]$, gefordert. Deshalb waren für λ_2 und H Knickbedingungen zu erwarten.
Interessante Zusammenstellungen über den Stand der Forschung zum Objekt im Jahre 1971 findet man in Jacobson und Lele [JL 1971] und bis 1995 in Hartl u. a. [HSV 1995]. Insbesondere kann man hieran verfolgen, daß für den oben erwähnten Fall der stetigen λ notwendige Bedingungen in Analogie zum klassischen Energiesatz, sowie Monotonieaussagen für den Multiplikator ρ für $h > 1$ häufig fehlen.

Literatur

[Ab 1975] Abeßer, H. [1975], *Zur Theorie quasiregulärer Variationsprobleme und ihre Anwendung auf optimale Prozesse*, Dissertation, TH Ilmenau.

[AS 2005] Abeßer H., Steigenberger J. [2005], *Optimalsteuerprobleme unter Zustandsrestriktionen*, Technische Universität Ilmenau (Germany), Institut für Mathematik, Preprint No. M11/05
(http://www.tu-ilmenau.de/fakmn/Preprints.528.0.html)

[Be 1962] Berkovitz L. D. [1962], *On control problems with bounded state variables*, J. Math. Anal. Appl. 5, 488-498

[Bl 1946] Bliss, G. A. [1946], *Lectures on the Calculus of Variations*, The University of Chicago Press, Chicago, Illinois

[Fe 1986] Feichtinger, G., Hartl, R. F. [1986], *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*, Verlag de Gruyter, Berlin

[Ga 1960] Gamkrelidse, R. V. [1960], *Optimal processes with bounded phase coordinates*, Isv.Akad.Nauk. USSR Sec Mat. 24, 315-356

[HSV 1995] Hartl, R. F. Sethi, S.P., Vickson, R. G. [1995], *A Survey Of The Maximum-Principles Optimal Control Problems With State Constraints*, SIAM Review, Vol.37. No 2, 181-218

[He 1966] Hestenes M. R. [1966], *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley New York, London, Sydney

[JL 1971] Jacobson, D. H., Lele, M. M. [1971], *New Necessary Conditions of Optimality for Control Problems with State-Variable Inequality Constraints*, J. of Math. Analysis and Applications 35, 255-284

[SA 2006] Steigenberger J., Abeßer H. [SA 2006], *Quasistatic inflation processes within rigid tubes*, Technische Universität Ilmenau (Germany), Institut für Mathematik,
- Preprint No. M09/06
(http://www.tu-ilmenau.de/fakmn/Preprints.528.0.html)
- ZAMM 88, No.7, 556-572 (2008)

[SA 2009] Steigenberger J., Abeßer H. [SA 2009], *Quasistatic inflation processes within compliant tubes*, Technische Universität Ilmenau (Germany), Institut für Mathematik, Preprint No. 29/09
(http://www.tu-ilmenau.de/fakmn/Preprints.528.0.html)