

Funnel-Regler und Funnel-Beobachter

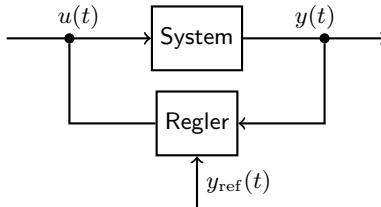
Thomas Berger

Lê Huy Hoang, Timo Reis

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

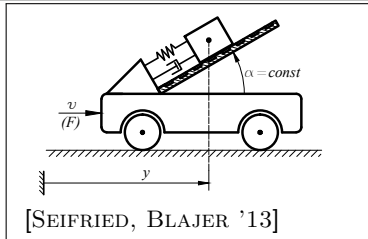
Elgersburg, 23. Februar 2017

Regelungssysteme



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & x(0) &= x^0 \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

- **Ziel:** Reglerentwurf so dass „ $y(t)$ verfolgt $y_{\text{ref}}(t)$ “
- keine Kenntnis der Systemparameter, nur „strukturelle“ Annahmen an das Modell



Winkel: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer Kennlinie: $K(z)$, $D(\dot{z})$

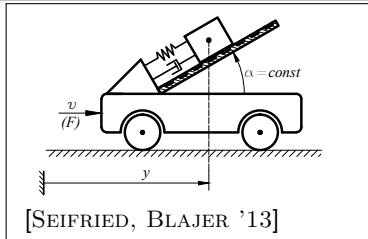
$$u(t) = F$$

$$y(t) = q(t) + z(t) \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos \alpha \\ m_2 \cos \alpha & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -K(z) - D(\dot{z}) + m_2 g \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y} = -c_1 (K(z) + D(\dot{z}) - m_2 g \sin \alpha) + \underbrace{c_2}_{\neq 0} u$$

Relativgrad = 2



Winkel: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer Kennlinie: $K(z)$, $D(\dot{z})$

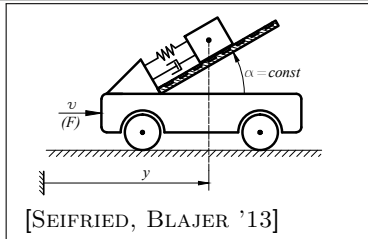
$$u(t) = F$$

$$y(t) = q(t) + z(t) \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos \alpha \\ m_2 \cos \alpha & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -K(z) - D(\dot{z}) + m_2 g \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y} = -c_1 (K(z) + D(\dot{z}) - m_2 g \sin \alpha) + \underbrace{c_2}_{\neq 0} u$$

Relativgrad = 2



Winkel: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer Kennlinie: $K(z)$, $D(\dot{z})$

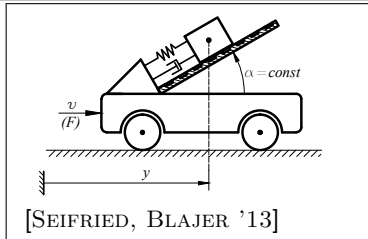
$$u(t) = F$$

$$y(t) = q(t) + z(t) \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos \alpha \\ m_2 \cos \alpha & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -K(z) - D(\dot{z}) + m_2 g \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y} = -c_1 (K(z) + D(\dot{z}) - m_2 g \sin \alpha) + \underbrace{c_2}_{\neq 0} u$$

Relativgrad = 2



Winkel: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer Kennlinie: $K(z)$, $D(\dot{z})$

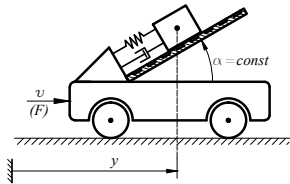
$$u(t) = F$$

$$y(t) = q(t) + z(t) \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos \alpha \\ m_2 \cos \alpha & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -K(z) - D(\dot{z}) + m_2 g \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y} = -c_1 (K(z) + D(\dot{z}) - m_2 g \sin \alpha) + \underbrace{c_2}_{\neq 0} u$$

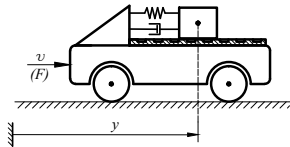
Relativgrad = 2



Winkel: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$

Eingang: Geschwindigkeit

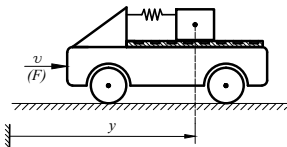
Relativgrad = 1



Winkel: $\alpha = 0^\circ$

Eingang: Kraft

Relativgrad = 3

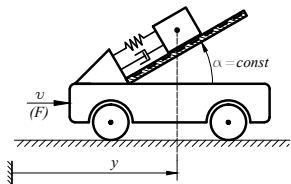


Winkel: $\alpha = 0^\circ$

Eingang: Kraft

keine Dämpfung: $D(\dot{z}) = 0$

Relativgrad = 4



Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

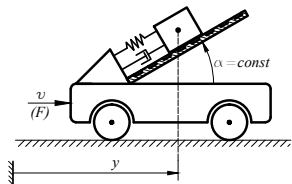
Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + V_{\text{pot}}(z), \quad \frac{d}{dz} V_{\text{pot}}(z) = K(z) - g, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} V_{\text{pot}}(z) = \infty$$

$$\dot{V} = \dot{z}\ddot{z} + K(z)\dot{z} - g\dot{z} = \underbrace{-D(\dot{z})}_{\geq 0} \dot{z} \leq 0$$

\implies jede Subniveaumenge von V ist positiv invariant und kompakt

$$\implies z, \dot{z} \in L^\infty \quad (\text{stabile interne Dynamik})$$



Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left(\frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left(\frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$

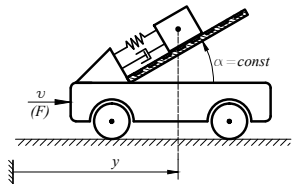
Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + V_{\text{pot}}(z), \quad \frac{d}{dz} V_{\text{pot}}(z) = K(z) - g, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} V_{\text{pot}}(z) = \infty$$

$$\dot{V} = \dot{z}\ddot{z} + \underbrace{K(z)\dot{z} - g\dot{z}}_{\geq 0} = -D(\dot{z})\dot{z} \leq 0$$

\Rightarrow jede Subniveaumenge von V ist positiv invariant und kompakt

$$\Rightarrow z, \dot{z} \in L^\infty \quad (\text{stabile interne Dynamik})$$



Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1 : \quad \ddot{z} = -K(z) - D(\dot{z}) + g$$

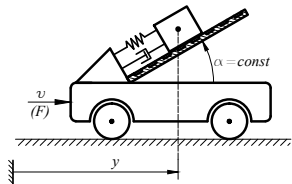
Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + V_{\text{pot}}(z), \quad \frac{d}{dz} V_{\text{pot}}(z) = K(z) - g, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} V_{\text{pot}}(z) = \infty$$

$$\dot{V} = \dot{z}\ddot{z} + K(z)\dot{z} - g\dot{z} = \underbrace{-D(\dot{z})}_{\geq 0} \dot{z} \leq 0$$

\implies jede Subniveaumenge von V ist positiv invariant und kompakt

$$\implies z, \dot{z} \in L^\infty \quad (\text{stabile interne Dynamik})$$



Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1 : \quad \ddot{z} = -K(z) - D(\dot{z}) + g$$

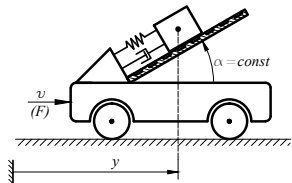
Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + V_{\text{pot}}(z), \quad \frac{d}{dz} V_{\text{pot}}(z) = K(z) - g, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} V_{\text{pot}}(z) = \infty$$

$$\dot{V} = \dot{z}\ddot{z} + K(z)\dot{z} - g\dot{z} = \underbrace{-D(\dot{z})}_{\geq 0} \dot{z} \leq 0$$

\implies jede Subniveaumenge von V ist positiv invariant und kompakt

$$\implies z, \dot{z} \in L^\infty \quad (\text{stabile interne Dynamik})$$



Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1 : \quad \ddot{z} = -K(z) - D(\dot{z}) + g$$

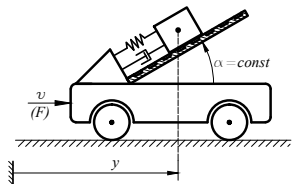
Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + V_{\text{pot}}(z), \quad \frac{d}{dz} V_{\text{pot}}(z) = K(z) - g, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} V_{\text{pot}}(z) = \infty$$

$$\dot{V} = \dot{z}\ddot{z} + K(z)\dot{z} - g\dot{z} = \underbrace{-D(\dot{z})}_{\geq 0} \dot{z} \leq 0$$

\implies jede Subniveaumenge von V ist positiv invariant und kompakt

$$\implies z, \dot{z} \in L^\infty \quad (\text{stabile interne Dynamik})$$



Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1 : \quad \ddot{z} = -K(z) - D(\dot{z}) + g$$

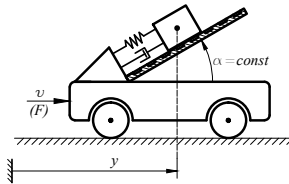
Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + V_{\text{pot}}(z), \quad \frac{d}{dz} V_{\text{pot}}(z) = K(z) - g, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} V_{\text{pot}}(z) = \infty$$

$$\dot{V} = \dot{z}\ddot{z} + K(z)\dot{z} - g\dot{z} = \underbrace{-D(\dot{z})}_{\geq 0} \dot{z} \leq 0$$

\implies jede Subniveaumenge von V ist positiv invariant und kompakt

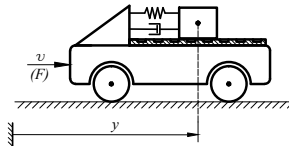
$$\implies z, \dot{z} \in L^\infty \quad \text{(stabile interne Dynamik)}$$



Winkel: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$

Eingang: Geschwindigkeit

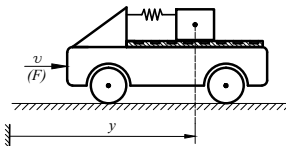
stabile interne Dynamik



Winkel: $\alpha = 0^\circ$

Eingang: Kraft

stabile interne Dynamik

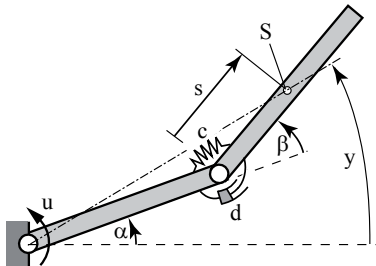


Winkel: $\alpha = 0^\circ$

Eingang: Kraft

keine Dämpfung: $D(\dot{z}) = 0$

keine interne Dynamik



[SEIFRIED, BLAJER '13]

Rotatorischer Arm

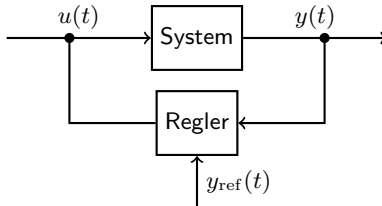
Eingang: Winkelgeschwindigkeit
des angetriebenen Arms

Ausgang: Lage von S beschrie-
ben durch Winkel y

Relativgrad = 1

instabile interne Dynamik

Erinnerung



$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & x(0) &= x^0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

- **Ziel:** Reglerentwurf so dass „ $y(t)$ verfolgt $y_{\text{ref}}(t)$ “
- keine Kenntnis der Systemparameter, nur: **Kenntnis des Relativgrads** und Annahme von **stabiler interner Dynamik**

Hochverstärkungsbasierte adaptive Regelung

Annahme: Relativgrad = 1, stabile interne Dynamik

klassischer (nicht-adaptiver) Hochverstärkungsregler

$$u(t) = -ky(t), \quad k > 0 \text{ hinr. groß} \implies y(t) \rightarrow 0$$

Nachteile: k evtl. unnötig groß; auf lineare Systeme beschränkt

adaptiver Hochverstärkungsregler (ab ca. 1983)

$$u(t) = -k(t)y(t), \quad \dot{k}(t) = \|y(t)\|^2$$

[BYRNES, ILCHMANN, LOGEMANN, MAREELS, MÅRTENSSON,
 MORSE, NUSSBAUM, OWENS, PRÄTZEL-WOLTERS, WILLEMS, ...]

Nachteile: $k(t)$ mon. wachsend; auf lineare Systeme beschränkt

Hochverstärkungsbasierte adaptive Regelung

Annahme: Relativgrad = 1, stabile interne Dynamik

klassischer (nicht-adaptiver) Hochverstärkungsregler

$$u(t) = -ky(t), \quad k > 0 \text{ hinr. groß} \implies y(t) \rightarrow 0$$

Nachteile: k evtl. unnötig groß; auf lineare Systeme beschränkt

adaptiver Hochverstärkungsregler (ab ca. 1983)

$$u(t) = -k(t)y(t), \quad \dot{k}(t) = \|y(t)\|^2$$

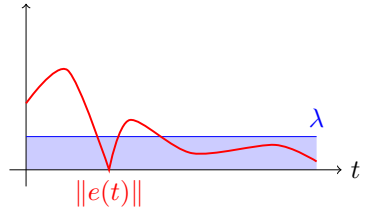
[BYRNES, ILCHMANN, LOGEMANN, MAREELS, MÅRTENSSON,
 MORSE, NUSSBAUM, OWENS, PRÄTZEL-WOLTERS, WILLEMS, ...]

Nachteile: $k(t)$ mon. wachsend; auf lineare Systeme beschränkt

adaptiver λ -tracker (ab ca. 1994)

$$u(t) = -k(t) \underbrace{(y(t) - y_{\text{ref}}(t))}_{=: e(t)},$$

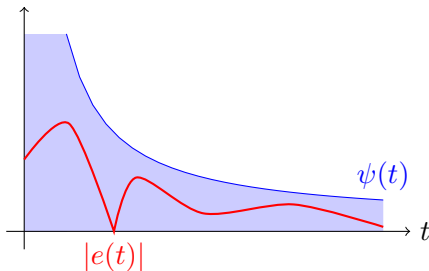
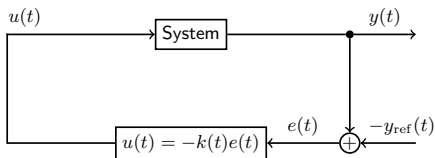
$$\dot{k}(t) = \begin{cases} \frac{\max\{\|e(t)\| - \lambda, 0\}}{\|e(t)\|}, & e(t) \neq 0, \\ 0, & e(t) = 0 \end{cases}$$



[ALLGÖWER, ASHMAN, BULLINGER, ILCHMANN, LOGEMANN, RYAN, SANGWIN, ...]

Nachteile: $k(t)$ mon. wachsend; kein transientes Verhalten

Funnel-Regelung



[ILCHMANN, RYAN, SANGWIN '02]:
 Funktioniert, wenn

- Relativgrad = 1
- stabile interne Dynamik

$$k(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(t) - |e(t)|}$$

Problem: höherer Relativgrad

Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

Relativgrad 2:

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{nicht as. stabil}$$

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -k_1y(t) - k_2\dot{y}(t) \implies \text{as. stabil für } k_1, k_2 \gg 0$$

Problem: höherer Relativgrad

Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

Relativgrad 2:

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{nicht as. stabil}$$

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -k_1y(t) - k_2\dot{y}(t) \implies \text{as. stabil für } k_1, k_2 \gg 0$$

Problem: höherer Relativgrad

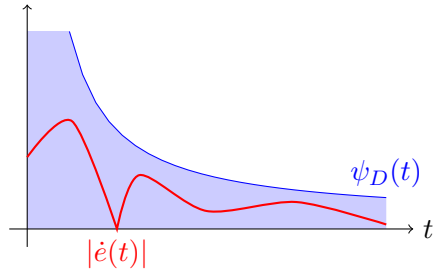
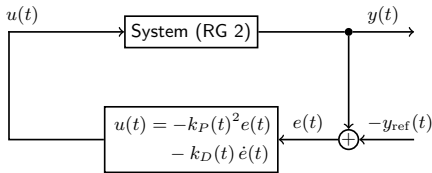
Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

Relativgrad 2:

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{nicht as. stabil}$$

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -k_1y(t) - k_2\dot{y}(t) \implies \text{as. stabil für } k_1, k_2 \gg 0$$



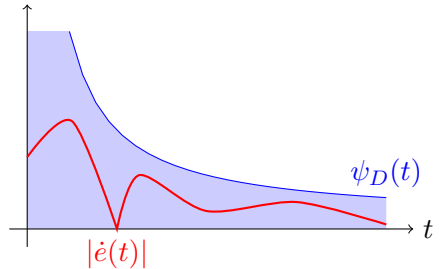
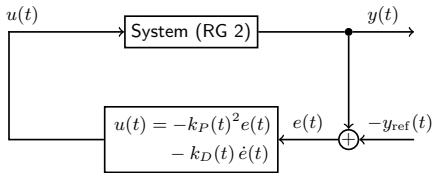
$$k_P(t) = \frac{\psi_P(t)}{\psi_P(t) - |e(t)|},$$

$$k_D(t) = \frac{\psi_D(t)}{\psi_D(t) - |\dot{e}(t)|},$$

$$0 < \delta \leq \frac{d}{dt} \psi_P(t) + \psi_D(t)$$

[HACKL, HOPFE, ILCHMANN,
MÜLLER, TRENN '13]:
Funktioniert...

Aber: keine Verallgemeinerung auf höheren Relativgrad!



$$k_P(t) = \frac{\psi_P(t)}{\psi_P(t) - |e(t)|},$$

$$k_D(t) = \frac{\psi_D(t)}{\psi_D(t) - |\dot{e}(t)|},$$

$$0 < \delta \leq \frac{d}{dt} \psi_P(t) + \psi_D(t)$$

[HACKL, HOPFE, ILCHMANN,
MÜLLER, TRENN '13]:
Funktioniert...

Aber: keine Verallgemeinerung auf höheren Relativgrad!

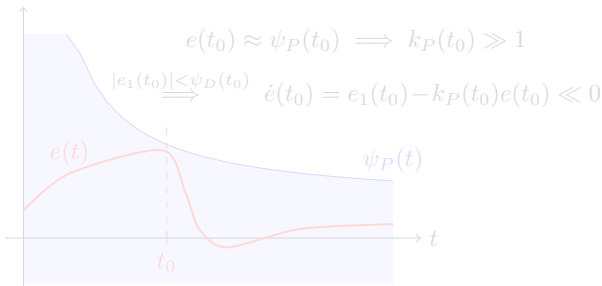
Ansatz [HACKL ET AL. '13]

$$e(t_0) \approx \psi_P(t_0) \implies \ddot{e}(t) < 0 \text{ auf } [t_0, t_1) \wedge \dot{e}(t) < \dot{\psi}_P(t) \text{ auf } [t_1, t_2)$$

Alternativer Ansatz [B., HOANG, REIS '16]

$$e(t_0) \approx \psi_P(t_0) \implies \text{zwinge } \dot{e}(t_0) \ll 0$$

$$\text{erreicht durch } \underbrace{|\dot{e}(t) + \text{„etwas Großes“}|}_{=\dot{e}(t) + k_P(t)e(t) =: e_1(t)} < \psi_D(t)$$



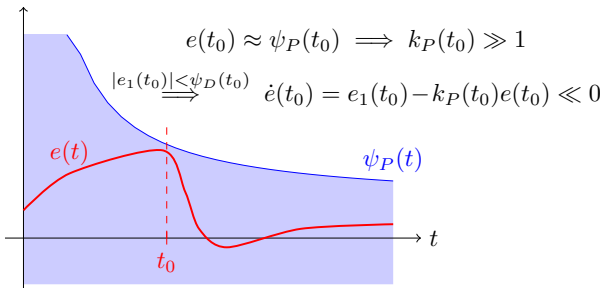
Ansatz [HACKL ET AL. '13]

$$e(t_0) \approx \psi_P(t_0) \implies \ddot{e}(t) < 0 \text{ auf } [t_0, t_1) \wedge \dot{e}(t) < \dot{\psi}_P(t) \text{ auf } [t_1, t_2)$$

Alternativer Ansatz [B., HOANG, REIS '16]

$$e(t_0) \approx \psi_P(t_0) \implies \text{zwinge } \dot{e}(t_0) \ll 0$$

$$\text{erreicht durch } \underbrace{|\dot{e}(t) + \text{„etwas Großes“}|}_{=\dot{e}(t) + k_P(t)e(t) =: e_1(t)} < \psi_D(t)$$



Funnel-Regler für Systeme mit bekanntem Relativgrad $r \in \mathbb{N}$

[B., HOANG, REIS '16]

$$\begin{aligned}
 e_0(t) &= e(t) &= y(t) - y_{\text{ref}}(t), \\
 e_1(t) &= \dot{e}_0(t) &+ k_0(t)e_0(t), \\
 e_2(t) &= \dot{e}_1(t) &+ k_1(t)e_1(t), \\
 &\vdots \\
 e_{r-1}(t) &= \dot{e}_{r-2}(t) &+ k_{r-2}(t)e_{r-2}(t), \\
 u(t) &= -k_{r-1}(t)e_{r-1}(t) \\
 k_i(t) &= \frac{\psi_i(t)}{\psi_i(t) - \|e_i(t)\|}, \quad i = 0, \dots, r-1
 \end{aligned}$$

Alternative: Bang-Bang Funnel-Regler

[LIBERZON & TRENN '13] (SISO, Kompatibilitätsbedingungen)

Funnel-Regler für Systeme mit bekanntem Relativgrad $r \in \mathbb{N}$

[B., HOANG, REIS '16]

$$\begin{aligned}
 e_0(t) &= e(t) &= y(t) - y_{\text{ref}}(t), \\
 e_1(t) &= \dot{e}_0(t) &+ k_0(t)e_0(t), \\
 e_2(t) &= \dot{e}_1(t) &+ k_1(t)e_1(t), \\
 &\vdots \\
 e_{r-1}(t) &= \dot{e}_{r-2}(t) &+ k_{r-2}(t)e_{r-2}(t), \\
 u(t) &= -k_{r-1}(t)e_{r-1}(t) \\
 k_i(t) &= \frac{\psi_i(t)}{\psi_i(t) - \|e_i(t)\|}, \quad i = 0, \dots, r-1
 \end{aligned}$$

Alternative: Bang-Bang Funnel-Regler

[LIBERZON & TRENN '13] (SISO, Kompatibilitätsbedingungen)

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{loc}}^{\infty}$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

Beispiel:

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{loc}}^{\infty}$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

Beispiel:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \text{ mit}$$

$$(A1) \quad \text{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \text{Re } \lambda \geq 0;$$

$$(A2) \quad CB = CAB = \dots = CA^{r-2}B = 0 \text{ und } CA^{r-1}B > 0$$

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{loc}}^{\infty}$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

Beispiel:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ mit

(A1) $\text{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } \lambda \geq 0$;

(A2) $CB = CAB = \dots = CA^{r-2}B = 0$ und $CA^{r-1}B > 0$

Ist äquivalent zu $\dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t)$, $y(t) = \hat{C}z(t)$ mit

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_m & 0 \\ R_1 & R_2 & \dots & R_r & S \\ P & 0 & \dots & 0 & Q \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ CA^{r-1}B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [I_m \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}_{loc}^\infty$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

Beispiel:

$$\dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t), \quad y(t) = \hat{C}z(t) \quad \text{mit}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_m & 0 \\ R_1 & R_2 & \dots & R_r & S \\ P & 0 & \dots & 0 & Q \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ CA^{r-1}B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [I_m \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]$$

$$y^{(r)}(t) = R_1 y(t) + \dots + R_r y^{(r-1)}(t) + Se^{Qt} \eta(0) + \int_0^t Se^{Q(t-\tau)} P y(\tau) d\tau + CA^{r-1} B u(t).$$

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{loc}}^{\infty}$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

Beispiel:

$$y^{(r)}(t) = T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t) + \Gamma u(t)$$

mit $\Gamma = CA^{r-1}B$ und

$$\begin{aligned} T(y, \dots, y^{(r-1)})(t) \\ = R_1 y(t) + \dots R_r y^{(r-1)}(t) + Se^{Qt}\eta(0) + \int_0^t Se^{Q(t-\tau)} P y(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

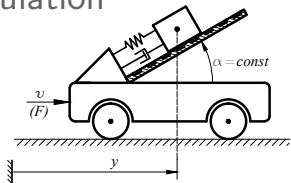
$$\begin{aligned}
 e_0(t) &= e(t) &= y(t) - y_{\text{ref}}(t), \\
 e_1(t) &= \dot{e}_0(t) &+ k_0(t)e_0(t), \\
 e_2(t) &= \dot{e}_1(t) &+ k_1(t)e_1(t), \\
 &\vdots \\
 e_{r-1}(t) &= \dot{e}_{r-2}(t) &+ k_{r-2}(t)e_{r-2}(t), \\
 u(t) &= -k_{r-1}(t)e_{r-1}(t) \\
 k_i(t) &= \frac{\psi_i(t)}{\psi_i(t) - \|e_i(t)\|}, \quad i = 0, \dots, r-1
 \end{aligned}$$

Theorem [B., HOANG, REIS '16]

$y_{\text{ref}} \in \mathcal{W}^{r, \infty} \wedge \|e_i(0)\| < \psi_i(0) \implies u, k_i, y^{(i)} \in L^\infty$ und

$$\|e_i(t)\| \leq \psi_i(t) - \varepsilon_i$$

Simulation

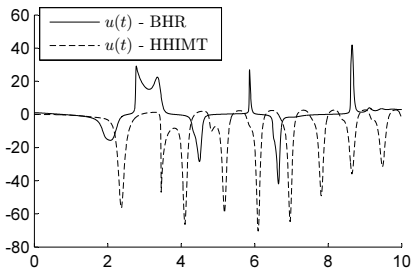
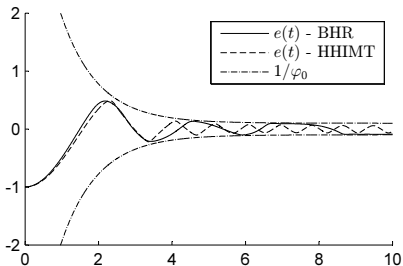


Winkel: $\alpha = 45^\circ$

$m_1 = 4, m_2 = 1, g = 0$

$K(z) = 2z, D(z) = z$

$y_{\text{ref}}(t) = \cos t, \quad \psi_P(t) = 5e^{-t} + 0.1, \quad \psi_D(t) = 5e^{-t} + 0.5$



Funnel-Regler ohne Ausgangs-Ableitungen – Backstepping

[ILCHMANN, RYAN, TOWNSEND '06, '07]

$$\text{Filter: } \begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= -\xi_i(t) + \xi_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, r-2, \\ \dot{\xi}_{r-1}(t) &= -\xi_{r-1}(t) + u(t) \end{aligned}$$

$$r = 2: \quad u = -ke - (\|e\|^2 + k^2) \cdot k^4(1 + \|\xi\|^2)(\xi + ke)$$

$$\begin{aligned} r = 3: \quad u = & -ke - k^4(e^2 + k^2)(1 + \xi_1^2)(\xi_1 + ke) - \left\{ [+e + (1 + \xi_1^2) \right. \\ & \cdot [2k^5(\xi_1 + ke) + 4k^3(e^2 + k^2)(\xi_1 + ke) + k^4(e^2 + k^2)e]]^2 \\ & + [+k + k^4(1 + \xi_1^2)[2e(\xi_1 + ke) + k(e^2 + k^2)]]^2 \\ & \left. + [k^4(e^2 + k^2)[2\xi_1(\xi_1 + ke) + (1 + \xi_1^2)]]^2 \right\} k^4(1 + \xi_1^2 + \xi_2^2) \\ & \cdot [\xi_2 + ke + k^4(e^2 + k^2)(1 + \xi_1^2)(\xi_1 + ke)] \end{aligned}$$

In Anwendungen nicht relevant, vgl. [HACKL '12]

Funnel-Regler ohne Ausgangs-Ableitungen – Backstepping [ILCHMANN, RYAN, TOWNSEND '06, '07]

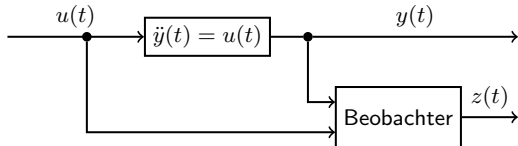
$$\text{Filter: } \begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= -\xi_i(t) + \xi_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, r-2, \\ \dot{\xi}_{r-1}(t) &= -\xi_{r-1}(t) + u(t) \end{aligned}$$

$$r = 2: \quad u = -ke - (\|e\|^2 + k^2) \cdot k^4(1 + \|\xi\|^2)(\xi + ke)$$

$$\begin{aligned} r = 3: \quad u = & -ke - k^4(e^2 + k^2)(1 + \xi_1^2)(\xi_1 + ke) - \left\{ [+e + (1 + \xi_1^2) \right. \\ & \cdot [2k^5(\xi_1 + ke) + 4k^3(e^2 + k^2)(\xi_1 + ke) + k^4(e^2 + k^2)e]]^2 \\ & + [+k + k^4(1 + \xi_1^2)[2e(\xi_1 + ke) + k(e^2 + k^2)]]^2 \\ & \left. + [k^4(e^2 + k^2)[2\xi_1(\xi_1 + ke) + (1 + \xi_1^2)]]^2 \right\} k^4(1 + \xi_1^2 + \xi_2^2) \\ & \cdot [\xi_2 + ke + k^4(e^2 + k^2)(1 + \xi_1^2)(\xi_1 + ke)] \end{aligned}$$

In Anwendungen nicht relevant, vgl. [HACKL '12]

Hochverstärkungsbeobachter [ATASSI, ESFANDIARI, KHALIL, SABERI, SANNUTI, TORNAMBÈ, ...]



$$\dot{z}_1 = z_2 + p_1 k (y - z_1),$$

$$\dot{z}_2 = u + p_2 k^2 (y - z_1),$$

$$p_1, p_2 > 0$$

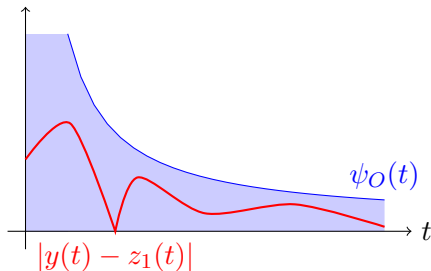
$$k > 0 \text{ hinr. groß} \implies z_1 \approx y \wedge z_2 \approx \dot{y}$$

Funnel-Beobachter

$$\dot{z}_1 = z_2 + (q_1 + p_1 k_O(t))(y - z_1),$$

$$\dot{z}_2 = \tilde{\Gamma}u + (q_2 + p_2 k_O(t))(y - z_1),$$

$$k_O(t) = \frac{\psi_O(t)}{\psi_O(t) - |y(t) - z_1(t)|}$$



$$A := \begin{bmatrix} -q_1 & 1 \\ -q_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{s.d.} \quad \boxed{A^\top P + PA = -I}$$

$$p_1 = 1, \quad p_2 = -\frac{p_{12}}{p_{22}}$$

Theorem [B., REIS '16]

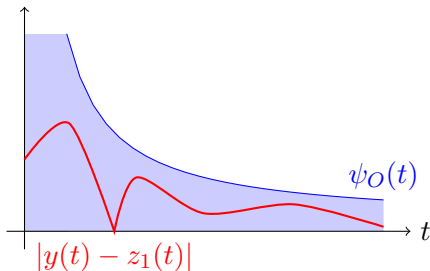
$$\dot{y} \in L^\infty \implies z_1, z_2, k_O \in L^\infty \wedge |y(t) - z_1(t)| < \psi_O(t) - \varepsilon$$

Funnel-Beobachter

$$\dot{z}_1 = z_2 + (q_1 + p_1 k_O(t))(y - z_1),$$

$$\dot{z}_2 = \tilde{\Gamma}u + (q_2 + p_2 k_O(t))(y - z_1),$$

$$k_O(t) = \frac{\psi_O(t)}{\psi_O(t) - |y(t) - z_1(t)|}$$



$$A := \begin{bmatrix} -q_1 & 1 \\ -q_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{s.d.} \quad \boxed{A^\top P + PA = -I}$$

$$p_1 = 1, \quad p_2 = -\frac{p_{12}}{p_{22}}$$

Theorem [B., REIS '16]

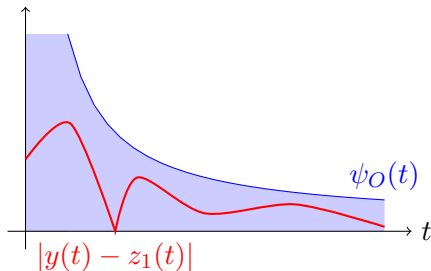
$$\dot{y} \in L^\infty \implies z_1, z_2, k_O \in L^\infty \wedge |y(t) - z_1(t)| < \psi_O(t) - \varepsilon$$

Funnel-Beobachter

$$\dot{z}_1 = z_2 + (q_1 + p_1 k_O(t))(y - z_1),$$

$$\dot{z}_2 = \tilde{\Gamma}u + (q_2 + p_2 k_O(t))(y - z_1),$$

$$k_O(t) = \frac{\psi_O(t)}{\psi_O(t) - |y(t) - z_1(t)|}$$

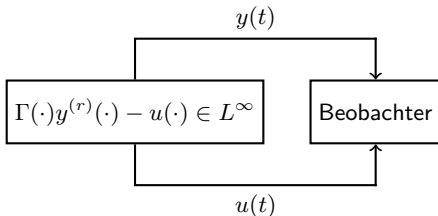


$$A := \begin{bmatrix} -q_1 & 1 \\ -q_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{s.d.} \quad \boxed{A^\top P + PA = -I}$$

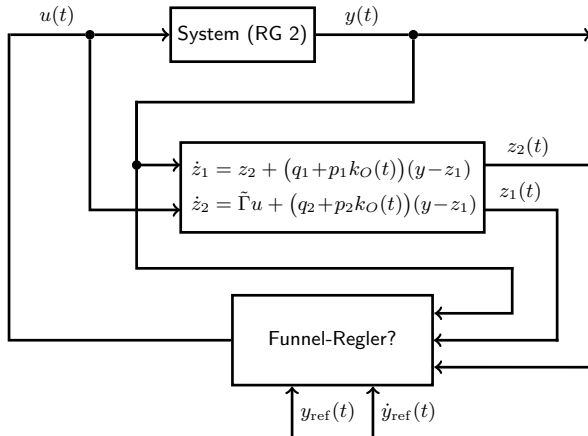
$$p_1 = 1, \quad p_2 = -\frac{p_{12}}{p_{22}}$$

Theorem [B., REIS '16]

$$\dot{y} \in L^\infty \implies z_1, z_2, k_O \in L^\infty \wedge |y(t) - z_1(t)| < \psi_O(t) - \varepsilon$$



$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) + (q_1 + p_1 k_O(t))(y(t) - z_1(t)), \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) + (q_2 + p_2 k_O(t))(y(t) - z_1(t)), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1}(t) &= z_r(t) + (q_{r-1} + p_{r-1} k_O(t))(y(t) - z_1(t)), \\ \dot{z}_r(t) &= \tilde{\Gamma}u(t) + (q_r + p_r k_O(t))(y(t) - z_1(t)), \\ k_O(t) &= \frac{\psi_O(t)}{\psi_O(t) - |y(t) - z_1(t)|} \end{aligned}$$



- für geg. $\psi(t)$ wollen wir $|y(t) - y_{\text{ref}}(t)| < \psi(t)$ für alle $t > 0$
- der Regler soll nur y, z_1, z_2 benötigen

Bisheriger Regler:

$$u(t) = -k_D(t)(\dot{y}(t) - \dot{y}_{\text{ref}}(t) + k_P(t)(y(t) - y_{\text{ref}}(t)))$$

Neuer Ansatz: Wir stecken $z_1 - y_{\text{ref}}$ in den Funnel!

- $\dot{z}_1 = z_2 + (q_1 + p_1 k_O(t))(y - z_1)$
- $|y(t) - y_{\text{ref}}(t)| \leq |y(t) - z_1(t)| + |z_1(t) - y_{\text{ref}}(t)| < \psi_O(t) + \psi_P(t)$

Für geg. $\psi(t)$ sei $\psi_P(t) = \psi_O(t) = \frac{1}{2}\psi(t)$

Problem: $r > 2 \implies \ddot{z}_1$ nicht bekannt!

Bisheriger Regler:

$$u(t) = -k_D(t)(\dot{y}(t) - \dot{y}_{\text{ref}}(t) + k_P(t)(y(t) - y_{\text{ref}}(t)))$$

Neuer Ansatz: Wir stecken $z_1 - y_{\text{ref}}$ in den Funnel!

- $\dot{z}_1 = z_2 + (q_1 + p_1 k_O(t))(y - z_1)$
- $|y(t) - y_{\text{ref}}(t)| \leq |y(t) - z_1(t)| + |z_1(t) - y_{\text{ref}}(t)| < \psi_O(t) + \psi_P(t)$

Für geg. $\psi(t)$ sei $\psi_P(t) = \psi_O(t) = \frac{1}{2}\psi(t)$

Problem: $r > 2 \implies \ddot{z}_1$ nicht bekannt!

Bisheriger Regler:

$$u(t) = -k_D(t)(\dot{y}(t) - \dot{y}_{\text{ref}}(t) + k_P(t)(y(t) - y_{\text{ref}}(t)))$$

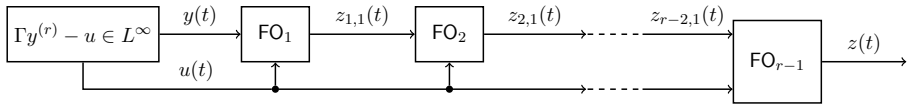
Neuer Ansatz: Wir stecken $z_1 - y_{\text{ref}}$ in den Funnel!

- $\dot{z}_1 = z_2 + (q_1 + p_1 k_O(t))(y - z_1)$
- $|y(t) - y_{\text{ref}}(t)| \leq |y(t) - z_1(t)| + |z_1(t) - y_{\text{ref}}(t)| < \psi_O(t) + \psi_P(t)$

Für geg. $\psi(t)$ sei $\psi_P(t) = \psi_O(t) = \frac{1}{2}\psi(t)$

Problem: $r > 2 \implies \ddot{z}_1$ nicht bekannt!

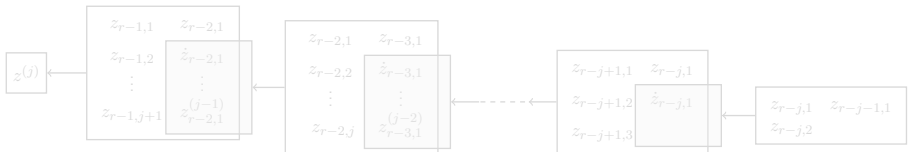
Kaskade von Funnel-Beobachtern



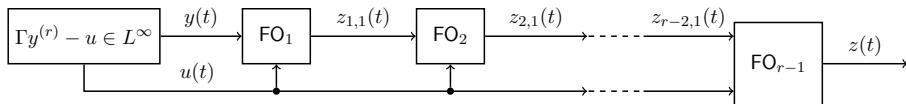
Theorem [B., REIS '16]

$y^{(r-1)}, \dot{\Gamma}, \Gamma y^{(r)} - u \in L^\infty \implies z_{i,j}, k_{O,i} \in L^\infty$ und

- $\|y(t) - z(t)\| < \sum_{i=1}^{r-1} \psi_{O,i}(t) - \varepsilon$
- $z, \dot{z}, \dots, z^{(r-1)}$ explizit bekannt



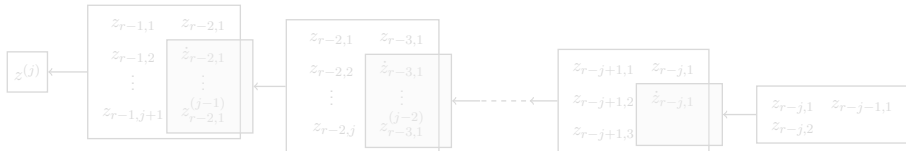
Kaskade von Funnel-Beobachtern



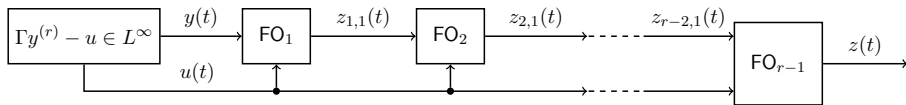
Theorem [B., REIS '16]

$$y^{(r-1)}, \dot{\Gamma}, \Gamma y^{(r)} - u \in L^\infty \implies z_{i,j}, k_{O,i} \in L^\infty \text{ und}$$

- $\|y(t) - z(t)\| < \sum_{i=1}^{r-1} \psi_{O,i}(t) - \varepsilon$
- $z, \dot{z}, \dots, z^{(r-1)}$ explizit bekannt



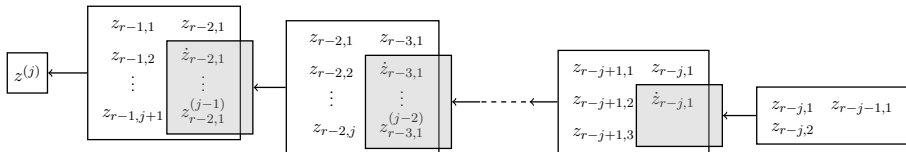
Kaskade von Funnel-Beobachtern



Theorem [B., REIS '16]

$$y^{(r-1)}, \dot{\Gamma}, \Gamma y^{(r)} - u \in L^\infty \implies z_{i,j}, k_{O,i} \in L^\infty \text{ und}$$

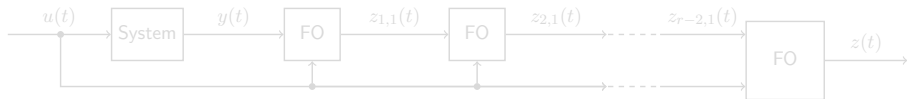
- $\|y(t) - z(t)\| < \sum_{i=1}^{r-1} \psi_{O,i}(t) - \varepsilon$
- $z, \dot{z}, \dots, z^{(r-1)}$ explizit bekannt



Erhaltung stabiler interner Dynamik

$$y^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^r R_i y^{(i-1)}(t) + f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma u(t)$$

$$\Gamma > 0, \quad y \in L^\infty \Rightarrow T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}) \in L^\infty$$



Theorem [B., REIS '16]

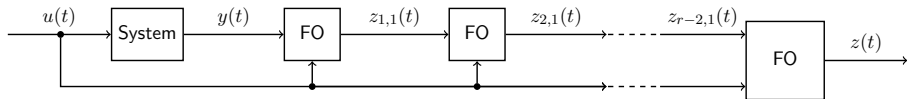
$r \in \{2, 3\}$, $\tilde{\Gamma} > 0$ und (falls $r = 3$) $I - \Gamma \tilde{\Gamma}^{-1} > 0 \implies$ Kopplung von System und Beobachter-Kaskade ist äquivalent zu

$$z^{(r)}(t) = F(\tilde{d}(t), \tilde{T}(z, \dot{z}, \dots, z^{(r-1)})(t)) + \tilde{\Gamma} u(t)$$

Erhaltung stabiler interner Dynamik

$$y^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^r R_i y^{(i-1)}(t) + f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma u(t)$$

$$\Gamma > 0, \quad y \in L^\infty \Rightarrow T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}) \in L^\infty$$



Theorem [B., REIS '16]

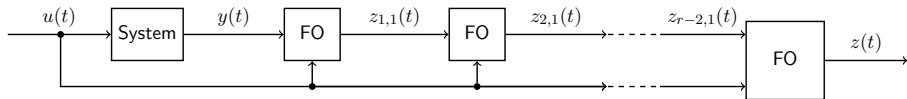
$r \in \{2, 3\}$, $\tilde{\Gamma} > 0$ und (falls $r = 3$) $I - \Gamma \tilde{\Gamma}^{-1} > 0 \implies$ Kopplung von System und Beobachter-Kaskade ist äquivalent zu

$$z^{(r)}(t) = F(\tilde{d}(t), \tilde{T}(z, \dot{z}, \dots, z^{(r-1)})(t)) + \tilde{\Gamma} u(t)$$

Erhaltung stabiler interner Dynamik

$$y^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^r R_i y^{(i-1)}(t) + f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma u(t)$$

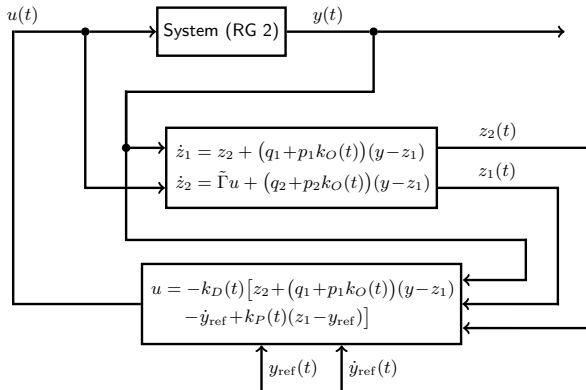
$$\Gamma > 0, \quad y \in L^\infty \Rightarrow T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t) \in L^\infty$$



Theorem [B., REIS '16]

$r \in \{2, 3\}$, $\tilde{\Gamma} > 0$ und (falls $r = 3$) $I - \Gamma \tilde{\Gamma}^{-1} > 0 \implies$ Kopplung von System und Beobachter-Kaskade ist äquivalent zu

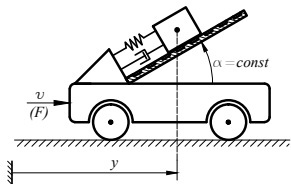
$$z^{(r)}(t) = F(\tilde{d}(t), \tilde{T}(z, \dot{z}, \dots, z^{(r-1)})(t)) + \tilde{\Gamma} u(t)$$



Theorem [B., REIS '16]

$$\begin{aligned}
 |y(t) - z_1(t)| &< \psi_O(t), & |z_1(t) - y_{\text{ref}}(t)| &< \psi_P(t), \\
 |\dot{z}_1(t) - \dot{y}_{\text{ref}}(t)| &< \psi_D(t), & |y(t) - y_{\text{ref}}(t)| &< \psi_P(t) + \psi_O(t)
 \end{aligned}$$

Simulation



Winkel: $\alpha = 45^\circ$

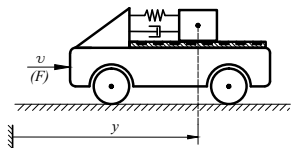
$$m_1 = 4, \quad m_2 = 1, \quad g = 0$$

$$K(z) = 2z, \quad D(\dot{z}) = \dot{z}$$

$$y_{\text{ref}}(t) = \cos t$$

$$\psi_P(t) = \psi_O(t) = \frac{1}{2} (5e^{-t} + 0.1), \quad \psi_D(t) = 2e^{-t} + 0.1$$

Simulation



Winkel: $\alpha = 0^\circ$ (RG 3)

$$m_1 = 4, m_2 = 1$$

$$K(z) = 2z, D(\dot{z}) = \dot{z}$$

$$y_{\text{ref}}(t) = \cos t$$

$$\psi_P(t) = \psi_{O,1}(t) = \psi_{O,2}(t) = \frac{1}{3} (5e^{-2t} + 0.3)$$

$$\psi_D(t) = \psi_{DD}(t) = 2e^{-2t} + 0.5$$

Ausblick

- Kaskade von Beobachtern bei Relativgrad ≥ 4 ?
- instabile interne Dynamik \rightarrow Vorsteuerung
- optimale Wahl der Entwurfparameter
- Experimente