Algebraische Theorie Linearer Differentialgleichungssysteme

Werner M. Seiler

Institut für Mathematik

UNI KASSEL
VERSITÄT

Worum geht's?

Kann man (manche) Fragen, die *Analytiker* zu Systemen linearer Differentialgleichungen haben, mit *algebraischen* Methoden beantworten (oder zumindest so tun als ob)?

- *Formale* Analyse *allgemeiner* Systeme linearer Differentialgleichungen (d.h. inklusive unter- und überbestimmter Systeme) $\rightsquigarrow$ *„lineare (partielle) Algebrodifferentialgleichungen"*
- Heute zwei Themen:
  - Konstruktion *formal korrekt gestellter Anfangswertprobleme*
  - *Index*konzepte auch für *partielle* Differentialgleichungen
- Wesentliches Hilfsmittel
  - *Gröbner-Basen*

Worum geht's?

Kann man (manche) Fragen, die *Analytiker* zu Systemen linearer Differentialgleichungen haben, mit *algebraischen* Methoden beantworten (oder zumindest so tun als ob)?

W.M. Seiler, E. Zerz: *Algebraic Theory of Linear Systems: A Survey*. In: *Surveys in Differential-Algebraic Equations II*, A. Ilchmann, T. Reis (Hrsg.), Differential-Algebraic Equations Forum, Springer-Verlag 2015, S. 287–333

(Homoge) Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- Unterliegende algebraische Strukturen:
  - Lösungsraum **Untervektorraum** des $\mathbb{R}^n$
  - Betrachte *alle* linearen Gleichungen, die von Lösungen von (1) erfüllt werden $\rightsquigarrow$ **Untervektorraum** $\mathcal{U}$ des Dualraums

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j^* \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{U} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_i \mid c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- Rechnerische Behandlung mit **Gauß-Algorithmus**
  - bestimmt *„gutes“* Erzeugendensystem von U
  - erlaubt *qualitative* Aussagen wie Dimension des Lösungsraums ohne dessen explizite Berechnung

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1\dots,x_n) & = & 0 \end{array} \tag{2}$$

mit $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{P} = \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$

- Unterliegende algebraische (und geometrische) Strukturen:
  - Lösungsmenge $\rightsquigarrow$ **Varietät** $\mathcal{V} \subseteq \Bbbk^n$
  - Menge *aller* Polynome, die auf $\mathcal{V}$ verschwinden $\rightsquigarrow$ **Ideal** $\mathcal{I}$ in $\mathcal{P}$

$$\mathcal{I} = \langle f_1,\dots,f_m\rangle_{\mathcal{P}} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} h_i f_i \mid h_i \in \mathcal{P} \right\}$$

Polynomiale Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1\dots,x_n) & = & 0 \end{array} \qquad (2)$$

mit $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{P} = \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$

- Rechnerische Behandlung mit **Gröbner-Basen**
  - erlauben *qualitative* Aussagen wie Dimension der Varietät
  - falls $\mathcal{V}$ endlich, kann $\mathcal{V}$ explizit berechnet werden
  - verallgemeinern Konzept einer *Dreiecksform*

- Einfaches Beispiel (überbestimmtes System)

$$u_{xx} - au - y = 0\,, \quad u_{xy} = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

- Offensichtliche Fragen:
  - System *lösbar*?
  - *Dimension* des Lösungsraums?
  - „Anfangsbedingungen“ für *eindeutige* Lösung

Lineare Differentialgleichungssysteme

- Einfaches Beispiel (überbestimmtes System)

$$u_{xx} - au - y = 0\,, \quad u_{xy} = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

- Problem: Existenz von **Integrabilitätsbedingungen**

$$\partial_x(u_{xy}) - \partial_y(u_{xx} - au - y) = au_y + 1 = 0$$

  - $a = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Gleichung $1 = 0$, also System *unlösbar*
  - $a \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ zusätzliche Gleichung *erster* Ordnung $u_y + 1/a = 0$

  Stört Konstruktion von *Potenzreihenlösungen*:

  - Im Ausgangssystem nicht erkennbar, daß es Bedingung an Koeffizienten *erster* Ordnung gibt
  - Bedingung wird erst sichtbar, wenn in *dritter* Ordnung gearbeitet wird
  - Wann sind *alle* versteckten Bedingungen bekannt?

Algebraische Formulierung

Schreibe homogenen Anteil als **lineare Differentialoperatoren**

$$L_1 u = (\partial_x^2 - a)u = y\,, \quad L_2 u = \partial_x \partial_y u = 0$$

L_1, L_2 Elemente eines (evtl. nicht-kommutativen) **Polynomrings** $\mathcal{D} = \Bbbk[\partial_x, \partial_y]$ mit $\Bbbk = \mathbb{R}$ für *konstante* Koeffizienten und (z.B.) $\Bbbk = \mathbb{R}(x, y)$ für *variable* Koeffizienten

Hier: ausschließlich $\Bbbk = \mathbb{R}$ — Methoden können aber unverändert für beliebige Funktionenkörper angewandt werden

Analog zu den anderen Typen von Gleichungen:

- betrachte **Ideal** $\mathcal{I} = \langle L_1, L_2 \rangle_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{D}$
  (**Untermodul** $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}^m$ im Fall mehrerer unbekannter Funktionen)
- suche „gutes" Erzeugendensystem $\rightsquigarrow$ **Gröbner-Basen**

Was ist „gut“?

- **Problem:** gegeben polynomiales Ideal $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq \mathcal{P}$, finde „besseres“ Erzeugendensystem von $\mathcal{I}$:
  - entscheidet *Idealmitgliedschaft*: liegt weiteres Polynom $h \in \mathcal{P}$ in $\mathcal{I}$?
  - erlaubt effektive Arithmetik in *Faktorring* $\mathcal{P}/\mathcal{I}$
  - liefert *Syzygien*: $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{P}$ so daß $\sum_{i=1}^{m} h_i f_i = 0$ (erlaubt Lösen von LGS über dem *Ring* $\mathcal{P}$)

Was ist „gut“?

- **Problem:** gegeben polynomiales Ideal $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq \mathcal{P}$, finde „besseres“ Erzeugendensystem von $\mathcal{I}$:
  - entscheidet *Idealmitgliedschaft*: liegt weiteres Polynom $h \in \mathcal{P}$ in $\mathcal{I}$?
  - erlaubt effektive Arithmetik in *Faktorring* $\mathcal{P}/\mathcal{I}$
  - liefert *Syzygien*: $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{P}$ so daß $\sum_{i=1}^{m} h_i f_i = 0$ (erlaubt Lösen von LGS über dem *Ring* $\mathcal{P}$)

- **Erinnerung:** Polynomdivision in $\Bbbk[x]$
  - Zu gegebenen Polynomen $f, g \in \Bbbk[x] \setminus \{0\}$ existieren eindeutige Polynome $q, r \in \Bbbk[x]$ so daß $f = qg + r$ und $\deg r < \deg g$
  - Für Berechnung müssen Terme in f und g nach Grad geordnet seien!

Was ist „gut“?

- **Problem:** gegeben polynomiales Ideal $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq \mathcal{P}$, finde „besseres“ Erzeugendensystem von $\mathcal{I}$:
  - entscheidet *Idealmitgliedschaft*: liegt weiteres Polynom $h \in \mathcal{P}$ in $\mathcal{I}$?
  - erlaubt effektive Arithmetik in *Faktorring* $\mathcal{P}/\mathcal{I}$
  - liefert *Syzygien*: $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{P}$ so daß $\sum_{i=1}^{m} h_i f_i = 0$ (erlaubt Lösen von LGS über dem *Ring* $\mathcal{P}$)

- **Erinnerung:** Polynomdivision in $\mathbb{k}[x]$
  - Zu gegebenen Polynomen $f, g \in \mathbb{k}[x] \setminus \{0\}$ existieren eindeutige Polynome $q, r \in \mathbb{k}[x]$ so daß $f = qg + r$ und $\deg r < \deg g$
  - Für Berechnung müssen Terme in f und g nach Grad geordnet seien!

- **Idee:** benutze multivariate Verallgemeinerung

Definition

Termordnung $\rightsquigarrow$ Totalordnung $\prec$ auf Menge $\mathbb{T}$ der Terme x^μ mit

(i) $\forall\, r, s, t \in \mathbb{T} \,:\, s \prec t \Rightarrow rs \prec rt$

(ii) $\forall\, t \in \mathbb{T} \,:\, 1 \preceq t$

$\prec$ **Totalgradordnung** $\rightsquigarrow$ zusätzlich

(iii) $\forall\, s, t \in \mathbb{T} \,:\, \deg s < \deg t \Rightarrow s \prec t$

Definition

Termordnung $\rightsquigarrow$ Totalordnung $\prec$ auf Menge $\mathbb{T}$ der Terme x^μ mit

(i) $\forall\, r, s, t \in \mathbb{T} : s \prec t \Rightarrow rs \prec rt$

(ii) $\forall\, t \in \mathbb{T} : 1 \preceq t$

$\prec$ **Totalgradordnung** $\rightsquigarrow$ zusätzlich

(iii) $\forall\, s, t \in \mathbb{T} : \deg s < \deg t \Rightarrow s \prec t$

Beispiele

- $n = 1$ $\rightsquigarrow$ ordne nach Grad (einzige Möglichkeit)
- **Lexikographische Ordnung**: $x^\mu \prec_{\text{lex}} x^\nu \iff$ erster von Null verschiedener Eintrag in $\mu - \nu$ negativ
- **Lexikographische Totalgradordnung**: $x^\mu \prec_{\text{deglex}} x^\nu \iff$ $\deg x^\mu < \deg x^\nu$ oder $(\deg x^\mu = \deg x^\nu$ und $x^\mu \prec_{\text{lex}} x^\nu)$

Definition

Termordnung $\rightsquigarrow$ Totalordnung $\prec$ auf Menge $\mathbb{T}$ der Terme x^μ mit

(i) $\forall\, r, s, t \in \mathbb{T} \,:\, s \prec t \Rightarrow rs \prec rt$

(ii) $\forall\, t \in \mathbb{T} \,:\, 1 \preceq t$

$\prec$ **Totalgradordnung** $\rightsquigarrow$ zusätzlich

(iii) $\forall\, s, t \in \mathbb{T} \,:\, \deg s < \deg t \Rightarrow s \prec t$

Definition

Gegeben Polynom $0 \neq f = \sum_{t \in \mathbb{T}} c_t t$ mit $c_t \in \Bbbk$ und Termordnung $\prec$

- **Leitterm** $\operatorname{lt} f = \max_\prec \{t \in \mathbb{T} \mid c_t \neq 0\}$
- **Leitkoeffizient** $\operatorname{lc} f = c_{\operatorname{lt} f}$

Gegeben Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$

- **Leitideal** $\operatorname{lt} \mathcal{I} = \langle \operatorname{lt} f \mid f \in \mathcal{I} \setminus \{0\} \rangle$

Multivariate Division mit Rest

Satz

Zu gegebenen Polynomen $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ und einer beliebigen Termordnung $\prec$ existieren immer Polynome $q_1, \dots, q_m, r \in \mathcal{P}$ so daß $f = \sum_{j=1}^{m} q_j g_j + r$ mit $\operatorname{lt}(q_j g_j) \preceq \operatorname{lt} f$ und $\operatorname{lt} r \preceq \operatorname{lt} f$.

Achtung Fallen:

- Weder r noch $q_1, \dots, q_m$ *eindeutig* bestimmt:
  - hängen von Details der Berechnung haben
  - Rest r kann *nicht* als Normalform verwendet werden
- $\mathcal{I} = \langle g_1, \dots, g_m \rangle \quad \not\Rightarrow \quad \operatorname{lt} \mathcal{I} = \langle \operatorname{lt} g_1, \dots, \operatorname{lt} g_m \rangle$

Definition

Gröbner-Basis von $\mathcal{I}$ für Termordnung $\prec$ $\rightsquigarrow$
endliche Menge $\mathcal{G} \subset \mathcal{I}$ mit $\operatorname{lt} \mathcal{I} = \langle \operatorname{lt} g \mid g \in \mathcal{G} \rangle$

Definition

Gröbner-Basis von $\mathcal{I}$ für Termordnung $\prec$ $\rightsquigarrow$
endliche Menge $\mathcal{G} \subset \mathcal{I}$ mit $\operatorname{lt} \mathcal{I} = \langle \operatorname{lt} g \mid g \in \mathcal{G} \rangle$

Theorem

Für ein Ideal $\mathcal{I}$ und eine Termordnung $\prec$ sind äquivalent

- $\mathcal{G}$ ist eine Gröbner-Basis von $\mathcal{I}$ für $\prec$.
- Der Rest bei einer Division durch $\mathcal{G}$ ist eindeutig.
- Jedes Idealelement $f \in \mathcal{I}$ liefert bei Division durch $\mathcal{G}$ den Rest $h = 0$.
- Jedes Idealelement $f \in \mathcal{I}$ besitzt *Standarddarstellung*: $f = \sum_{g \in \mathcal{G}} h_g g$ mit $\operatorname{lt}(h_g g) \preceq \operatorname{lt} f$.

Definition

Gröbner-Basis von $\mathcal{I}$ für Termordnung $\prec$ $\rightsquigarrow$
endliche Menge $\mathcal{G} \subset \mathcal{I}$ mit $\operatorname{lt} \mathcal{I} = \langle \operatorname{lt} g \mid g \in \mathcal{G} \rangle$

- Gröbner-Basis *existiert* für jede Termordnung
- Gröbner-Basis *berechenbar* mit **Buchberger-Algorithmus**
  - reduziert für *lineare* Polynome zu Gauß-Algorithmus
  - reduziert für *univariate* Polynome zu Euklidischem Algorithmus
- *Komplexität* potentiell sehr hoch (doppelt exponentiell!)
- Reduzierte Gröbner-Basen *eindeutig*
- Fundamentales Werkzeug für alle Arten polynomialer Berechnungen in Kommutativer Algebra und Algebraischer Geometrie

Korrekt Gestellte Probleme

„Definition" (Hadamard)

Differentialgleichungsproblem **korrekt gestellt** $\rightsquigarrow$

(i) Lösung *existiert* für *beliebige* Daten

(ii) Lösung *eindeutig*

(iii) Lösung hängt *stetig* von Daten ab

- Keine strenge Definition $\rightsquigarrow$
  erfordert Angabe von Funktionenräume und Topologien
- (iii) schwierigster Punkt
- Für *elliptische* Systeme *Anfangs*wertprobleme **nicht** korrekt gestellt
- Für *hyperbolische* Systeme *Rand*wertprobleme **nicht** korrekt gestellt

Definition

Problem **formal korrekt gestellt** $\rightsquigarrow$ *eindeutige* formale Potenzreihenlösung *existiert* für *beliebige* formale Potenzreihen als Daten

Ziel: *algorithmische* Konstruktion formal korrekt gestellter Probleme

Algebraische Formulierung:

- „Polynomring" $\mathcal{D} = \Bbbk[D] = \Bbbk[\partial_1, \dots, \partial_n]$
  ($\Bbbk$ eventuell Funktionenkörper)
- „Terme" $\mathbb{D} = \{\partial^\mu \mid \mu \in \mathbb{N}_0^n\}$
- Lineares Differentialgleichungssystem für *eine* unbekannte Funktion
  $\rightsquigarrow$ Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$
- Termordnung $\rightsquigarrow$ *disjunkte Zerlegung*: $\mathbb{D} = \operatorname{lt} \mathcal{I} \uplus \Pi(\mathcal{I})$

Formal Korrekt Gestellte Probleme

Definition

Problem **formal korrekt gestellt** $\rightsquigarrow$ *eindeutige* formale Potenzreihenlösung *existiert* für *beliebige* formale Potenzreihen als Daten

Ziel: *algorithmische* Konstruktion formal korrekt gestellter Probleme

Interpretation:

- Ableitungen $\leftrightsquigarrow$ Taylor-Koeffizienten
- Termordnung bestimmt für jede (prolongierte) Gleichung, nach welcher Ableitung sie *aufgelöst* wird
- ∂^μ *Hauptableitung* $\Leftrightarrow$ $\partial^\mu \in \operatorname{lt} \mathcal{I}$, sonst *parametrische Ableitung*
- *Divisionsalgorithmus* ermöglicht, jede Hauptableitung als Funktion der parametrischen Ableitungen auszudrücken
- Daten müssen parametrische Koeffizienten eindeutig bestimmen

Definition

Komplementäre Zerlegung von $\mathcal{I}$ $\rightsquigarrow$

$$\langle \Pi(\mathcal{I}) \rangle_{\Bbbk} = \bigoplus_{t \in T} \Bbbk[D_t] \cdot t$$

$T \subset \mathbb{D}$ endlich, $D_t \subseteq D$ *multiplikative Ableitungen* zu t

- gehen zurück auf Riquier (1910) und Janet (1920)
- *existieren* immer, sind aber *nicht* eindeutig
- algorithmisch berechenbar $\rightsquigarrow$ *involutive Basen*
- *Rees-Zerlegung* $\rightsquigarrow$ alle Mengen D_t von der Form $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{\ell_t}\}$ (ℓ_t *Klasse* von t)

Zugehöriges Anfangswertproblem

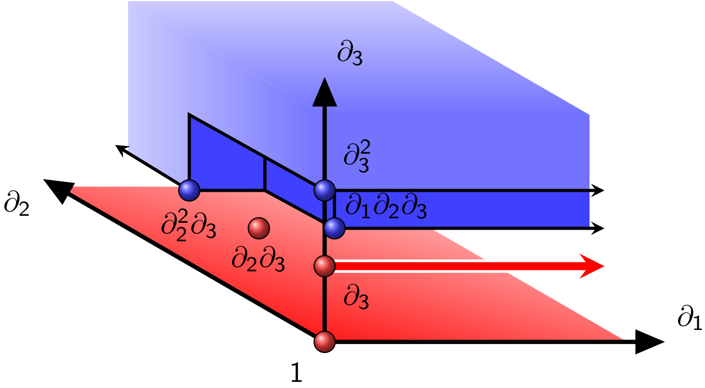
- Wähle *Entwicklungspunkt* $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$
- Betrachte jeden einzelnen *Kegel* $(t, D_t) = \bigl(\partial^\mu, \{\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}\}\bigr)$ in beliebiger komplementärer Zerlegung von $\Pi(\mathcal{I})$:
  - $I_t = \{i_1, \dots, i_k\}, \quad \bar{I}_t = \{1, \dots, n\} \setminus I_t$
  - Koordinatenraum $H_t = \{\forall\, i \in \bar{I}_t : x_i = \hat{x}_i\}$
  - *Anfangsbedingung* mit beliebiger Funktion g_t

$$\partial^\mu u|_{H_t} = g_t(x_i \mid i \in I_t)$$

Satz

Konstruktion liefert formal korrekt gestelltes Anfangswertproblem.

$\mathcal{I} = \langle \partial_3^2 + \cdots, \ \partial_2^2\partial_3 + \cdots, \ \partial_1\partial_2\partial_3 + \cdots \rangle$ (Gröbner-Basis!)



$$u(x_1, x_2, \hat{x}_3) = g_1(x_1, x_2), \ \partial_3 u(x_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = g_2(x_1), \ \partial_2\partial_3 u(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = g_3$$

Bemerkungen

- **Satz von Riquier:** alle Anfangsdaten g_t *analytisch* $\Longrightarrow$ eindeutige formale Potenzreihenlösung *analytisch* (starke Verallgemeinerung des Satzes von Cauchy-Kovalevskaya)
- *"Klassisches"* Anfangswertproblem nur für Rees-Zerlegung
- Verallgemeinerung des **Eindeutigkeitssatzes von Holmgren** für C^1-Lösungen für allgemeine lineare Systeme möglich
- Für *monomiale* Systeme kann Lösung explizit in Integralform angegeben werden

- Grundlegender Begriff in Theorie und Numerik von (gewöhnlichen) Algebrodifferentialgleichungen
- Maß für „Schwierigkeiten“, die bei der numerischen Integration zu erwarten sind
- Viele ähnliche, aber inäquivalente Definitionen
- *Differentiationsindizes:* Anzahl der benötigten Prolongationen bis System gewisse Eigenschaft zeigt
- *Störungsindex:* höchste Ordnung der Ableitungen der Störung, die in Abschätzungen der Differenz zwischen Lösungen des Ausgangssystems und einer gestörten Form auftreten

Erweiterung auf partielle Differentialgleichungen

- Alle numerischen Zugänge basieren auf *Reduktion* auf gewöhnlichen Fall: Integraltransformationen, Semidiskretisierungen etc $\rightsquigarrow$ Resultate abhängig von Reduktionsmethode, nicht intrinsisch für Ausgangssystem
- Le Vey (1994), Tuomela (1993) verknüpften Indexbegriffe mit formaler Theorie *gewöhnlicher* Differentialgleichungen $\rightsquigarrow$ WMS (1999) intrinsische Erweiterung auf beliebige nichtlineare Systeme *partieller* Differentialgleichungen
- Hier: einfache *algorithmische Realisierung* dieser Ideen für *lineare* Systeme via Gröbner-Basen

- Homogenes System $L\mathbf{u} = 0$
  führe für jede *Gleichung* neue Hilfsunbekannte δ_i ein $\rightsquigarrow$
  *in*homogenes System $L\mathbf{u} = \boldsymbol{\delta}$
- Natürliche Termordnung: TOP-Lift einer Totalgradordnung
  berechne *Gröbner-Basis* des *Zeilenmoduls* von L $\rightsquigarrow$

$$\tilde{L}\mathbf{u} = F\boldsymbol{\delta}\,, \quad 0 = G\boldsymbol{\delta}$$

  - F „führt Buch" über zur Konstruktion von $\tilde{L}$ benötigte Operationen
  - G liefert Erzeugendensystem des *Syzygienmoduls* von L
    (G wichtig für *Existenz*- und *Regularitäts*theorie,
    beschreibt *Drift* in Numerik)

- Homogenes System $L\mathbf{u} = 0$
  führe für jede *Gleichung* neue Hilfsunbekannte δ_i ein $\rightsquigarrow$
  *in*homogenes System $L\mathbf{u} = \boldsymbol{\delta}$
- Natürliche Termordnung: TOP-Lift einer Totalgradordnung
  berechne *Gröbner-Basis* des *Zeilenmoduls* von L $\rightsquigarrow$

$$\tilde{L}\mathbf{u} = F\boldsymbol{\delta}\,, \quad 0 = G\boldsymbol{\delta}$$

Definition

Erster Gröbner-Index γ_1	$\rightsquigarrow$	$\deg F$
Zweiter Gröbner-Index γ_2	$\rightsquigarrow$	$\deg G$

Achtung: für partielle Differentialgleichungen hängen Werte von gewählter Termordnung ab $\rightsquigarrow$ Interpretation nicht so offensichtlich

Definition

$\mathbf{v}(x)$ Lösung von $L\mathbf{u} = 0$, $\hat{\mathbf{v}}(x)$ von $L\mathbf{u} = \boldsymbol{\delta}$, beide definiert auf $[0, M]$

System hat *Störungsindex* ν entlang $\mathbf{v}(x)$ $\rightsquigarrow$ ν kleinste Zahl, für die für jedes $x \in [0, M]$ Abschätzung existiert der Form

$$\|\mathbf{v}(x) - \hat{\mathbf{v}}(x)\| \leq C\Big(\|\mathbf{v}(0) - \hat{\mathbf{v}}(0)\| + \|\boldsymbol{\delta}\|_{\nu-1}\Big)$$

(wann immer rechte Seite hinreichend klein)

$\|f\|_k$ $\rightsquigarrow$ Sobolev-Norm $\sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|$ zu unterliegender Norm

- Störungsindex zählt Ordnung der *Ableitungen der Störung* in Abschätzung
- verschiedene Werte für *verschiedene Lösungen* $\mathbf{v}(x)$ möglich
- $\nu > 1$ $\rightsquigarrow$ *numerische* Integration problematisch

Satz

Für jede Lösung $\mathbf{v}(x)$ von $\boldsymbol{L}\mathbf{u} = 0$ gilt: $\nu \leq \gamma_1 + 1$

Beweis.

- Schreibe um als System erster Ordnung
- Schreibe um als Integralgleichung
- Wende *Gronwall-Lemma* an
- Integration „erschlägt“ eine Ableitung
- “+1” wegen eventuell vorhandener algebraische Gleichungen, die einmal abgeleitet werden müssen □

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet (mit $\bar{\Omega}$ kompakt)
  $\Omega' \subset \Omega$ Gebiet (niedrigerer Dimension)
  Anfangs/Randbedingungen: $(K\mathbf{u})|_{\Omega'} = 0$
  mit K linearen Differentialoperatoren vom Grad k
- $\|\cdot\|_\ell \quad \rightsquigarrow \quad$ Sobolev-Norm über Ω
  $\|\cdot\|'_\ell \quad \rightsquigarrow \quad$ Sobolev-Norm über Ω'

Definition

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ Lösung von $L\mathbf{u} = 0$, $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ von $L\mathbf{u} = \boldsymbol{\delta}$, beide definiert auf Ω

System hat *Störungsindex* ν entlang $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ $\rightsquigarrow$ ν kleinste Zahl, für die für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ Abschätzung existiert der Form

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\| \leq C\Big(\|\mathbf{v}|_{\Omega'} - \hat{\mathbf{v}}|_{\Omega'}\|'_k + \|\boldsymbol{\delta}\|_{\nu-1}\Big)$$

(wann immer rechte Seite hinreichend klein)

- Keine *allgemeine* Behandlung sinnvoll/möglich
- Strukturelle **Annahmen** für *eine* behandelbare Situation:
  - System mit *evolutionärem* Charakter $\rightsquigarrow$ Variablen $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, t)$
  - *Anfangsbedingungen* gegeben auf (Teilmenge von) $t = 0$
  - Hyperebene $t = 0$ *nicht charakteristisch*
  - System nicht *unterbestimmt*
- Wähle *Termordnung*, die t Vorrang über den anderen Variablen gibt; schreibe wieder Gröbner-Basis $\tilde{L}\mathbf{u} = F\boldsymbol{\delta}$ als System erster Ordnung
- (Eventuell nur nach Prolongation der algebraischen Gleichungen) Teilsystem $\partial_t \mathbf{u} - M\mathbf{u} = \hat{F}\boldsymbol{\delta}$ wobei Operator M nur von $\partial_{\mathbf{y}}$ abhängt

  $\rightsquigarrow$ *unterliegende Gleichung* in Cauchy-Kovalevskaya-Form
  - M erzeuge *stark stetige Halbgruppe*

Satz

Für jede Lösung $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ von $L\mathbf{u} = 0$ gilt: $\nu \leq \gamma_1 + 2$

Beweis.

- Analog zum ODE-Fall (mit Halbgruppentheorie)
- "+2", da Integration nicht mehr unbedingt eine Differentiation „erschlägt“
- Wieder "+1", falls System *keine* algebraischen Gleichungen enthält □

(Korrektheit des Beweises nur für *Pommaret-Basen* garantiert!)