Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

FAKULTÄT
FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

FRÉDÉRIC ENRICO HALLER

Linear-quadratische Optimalsteuerung zeitvarianter DAEs

LINEARE ZEITVARIANTE DAES

DAES MIT PROPERLY STATED LEADING TERM

$(E_1, E_2, A) \in C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times l}) \times C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{l\times n}) \times C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times n})$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ komp. Interval.

$$E_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(E_2(t)x(t)) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{I},$$

mit

$$\ker E_1(t) \oplus \operatorname{im} E_2(t) = \mathbb{R}^l, \quad \forall t \in \mathbb{I},$$

und für die projektorwertige Funktion $P : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^{l\times l}$ definiert durch

$$\operatorname{im} P(t) = \operatorname{im} E_2(t),\ \ker P(t) = \ker E_1(t), \quad \forall t \in \mathbb{I},$$

gelte $P \in C^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{l\times l})$.
Wir sagen $[E_1, E_2, A]$ hat *properly stated leading term* (März 90er).

LINEARE ZEITVARIANTE DAES

DEFINITION (LÖSUNG, SYSTEMRAUM-ABBILDUNG)

$x \in L^2(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ heißt *Lösung* von $[E_1, E_2, A]$, wenn

$$E_2 x \in W^{1,2}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^l) \text{ und } E_1 \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(E_2 x) = Ax.$$

Eine Abbildung $\mathcal{V}^{\mathrm{sys}} : \mathbb{I} \to \{V \subset \mathbb{R}^n | V \text{ ist ein Unterraum von } \mathbb{R}^n\}$ heißt *Systemraum-Abbildung* von $[E_1, E_2, A]$, wenn

(i) Für alle Lösungen x gilt $x(t) \in \mathcal{V}^{\mathrm{sys}}(t)$ f.f.a $t \in \mathbb{I}$.

(ii) $\hat{\mathcal{V}}$ erfüllt (i) $\Rightarrow \mathcal{V}^{\mathrm{sys}}(t) \subset \hat{\mathcal{V}}(t)$ f.f.a. $t \in \mathbb{I}$.

MOTIVATION: OPTIMALWERTFUNKTION BESTIMMEN

OPTIMALSTEUERUNG MIT QUADRATISCHER KOSTENFUNKTION

Seien $Q = Q^\top \in C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F = F^\top \in \mathbb{R}^{l\times l}$ und $[E_1, E_2, A]$ mit properly stated leading term. Die *Kostenfunktion* V wird definiert als

$$V : \{x \in L^2(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n) | x \text{ ist Lösung von } [E_1, E_2, A]\} \to \mathbb{R},$$

$$V(x) = \int_{\mathbb{I}} x(t)^\top Q(t)x(t)\,\mathrm{d}t + (E_2x)(t_f)^\top F(E_2x)(t_f).$$

Optimalwertfunktion:

$$V^+(x_0) = \inf_{\substack{x \text{ Lsg. von } [E_1,E_2,A] \\ (E_2x)(t_0)=E_2(t_0)x_0}} V(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

IDEE

- Vereinfache die DAE mittels Normalformen und Differentiation.
- Wende Resultate über ODEs an und führe diese auf die ursprüngliche DAE zurück.

LINEARE ZEITVARIANTE DAES

DEFINITION (GLOBAL ÄQUIVALENT)

$(E_1, E_2, A), (E_1', E_2', A') \in C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times l}) \times C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{l\times n}) \times C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times n})$ heißen *global äquivalent*, wenn

$$\exists S \in C(\mathbb{I}, \mathbf{Gl}_m(\mathbb{R})),\ T \in C^1(\mathbb{I}, \mathbf{Gl}_l(\mathbb{R})),\ Q \in C(\mathbb{I}, \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})),$$

sodass

$$E_1' = SE_1T^{-1}, \quad E_2' = TE_2Q, \quad A' = SAQ + SE_1T^{-1}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}TE_2Q.$$

Wir schreiben $(E_1', E_2', A') \overset{S,T,Q}{\sim} (E_1, E_2, A)$.

STRANGENESSINDEX

DEFINITION (GLOBALE CHARAKTERISTISCHE WERTE)

Sei $[E_1, E_2, A]$ mit properly stated leading term. Betrachte folgende (zeitvariante) Matrizen und Größen:

$$\begin{aligned}
R(t) &\quad \textit{Basis von } \ker E_2(t),\\
Z(t) &\quad \textit{Basis von } \ker E_1(t)^\top,\\
R'(t) &\quad \textit{Basis von } \operatorname{im} E_2(t)^\top,\\
V(t) &\quad \textit{Basis von } \ker(R(t)^\top A(t)^\top Z(t)),
\end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{I}$ und ...

STRANGENESSINDEX

DEFINITION (GLOBALE CHARAKTERISTISCHE WERTE)

Sei $[E_1, E_2, A]$ mit properly stated leading term.

$$\begin{aligned}
r(t) &= \mathrm{rk} E_1(t) = \mathrm{rk} E_2(t), && \textit{(Rang)}\\
a(t) &= \mathrm{rk}(Z^\top(t)A(t)R(t)), && \textit{(algebraischer Anteil)}\\
s(t) &= \mathrm{rk}(V(t)^\top Z(t)^\top A(t)R'(t)), && \textit{(Strangenessanteil)}\\
d(t) &= r(t) - s(t), && \textit{(Differentialanteil)}\\
u(t) &= n - r(t) - a(t), && \textit{(unterbestimmte Variablen)}\\
v(t) &= m - r(t) - a(t) - s(t). && \textit{(überbestimmte Variablen)}
\end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{I}$. (r, a, s) sind die *(globalen) charakteristischen Werte*.

STRANGENESSINDEX

THEOREM (GLOBALE KANONISCHE FORM, VGL. KUNKEL, MEHRMANN)

Sei $(E_1, E_2, A) \in C^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times l}) \times C^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{l\times n}) \times C^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times n})$ *mit konstanten globalen charakteristischen Werten* (r, a, s) *und* $[E_1, E_2, A]$ *mit psld. Dann*

$$(E_1, E_2, A) \overset{S,T,Q}{\sim} \left(\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & I_a & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} s \\ d \\ a \\ s \\ v \end{matrix}$$

mit gewissen $A_{12} \in C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{s\times d}),\ A_{14} \in C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{s\times u})$ *und* $A_{24} \in C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{d\times u})$.

STRANGENESSINDEX

EINSETZEN DER ABLEITUNG

Einsetzen von

$$0\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(0) = I_s x_s \quad \text{in} \quad I_s \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(I_s x_s) = A_{12} x_d + A_{14} x_u$$

ergibt

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & I_a & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} s \\ d \\ a. \\ s \\ v \end{matrix}$$

STRANGENESSINDEX

STRANGENESSFREIES SYSTEM

$$(E_{1,\mu}, E_{2,\mu}, A_\mu) = \left(\begin{bmatrix} I_{r_\mu} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{r_\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{24} \\ 0 & I_{a_\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

für ein $A_{24} \in C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{r_\mu \times u_\mu})$.

STRANGENESSINDEX

THEOREM (VGL. KUNKEL, MEHRMANN 2000ER)

Sei $(E_1, E_2, A) \in C^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times l}) \times C^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{l\times n}) \times C^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times n})$ *und* $[E_1, E_2, A]$ *mit properly stated leading term und wohldefiniertem Strangenessindex* μ *hat. Dann*

$$(E_1, E_2, A) \overset{S,T,Q}{\sim} \left(\begin{bmatrix} I_{d_\mu} & 0 & * \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{d_\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{a_\mu} \end{bmatrix} \right),$$

mit gewissen

$$F = \begin{bmatrix} F_{\mu-1} & & * \\ \ddots & \ddots & \\ & \ddots & F_1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_{\mu-1} & & * \\ \ddots & \ddots & \\ & \ddots & G_1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_{\mu-1} & & \\ & \ddots & \\ & & H_0 \end{bmatrix}.$$

ZURÜCK ZUR OPTIMALSTEUERUNG

DEFINITION (ZULÄSSIG)

Das Optimalsteuerungsproblem heißt *zulässig*, wenn

$$-\infty < \inf_{\substack{x \text{ Lsg von } [E_1, E_2, A] \\ (E_2 x)(t_0) = x_0}} V(x) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

DAS LEBESGUE-STIELTJES-INTEGRAL

Sei $(p_{i,j}) = P \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m \times m})$ mit $x \in C(\mathbb{I}, \mathbb{R}^m)$. Betrachte das Lebesgue-Stieltjes-Integral

$$\int_{\mathbb{I}} x(t)^\top dP(t)x(t) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{I}} x_i(t)x_j(t)dp_{i,j}(t).$$

NOTATION ($dM(P) \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} 0$, VGL. CLEMENTS, ANDERSON 1978)

Sei $[E_1, E_2, A]$ mit properly stated leading term.

$$dM(P) \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} 0$$

auf $\mathbb{I}$ für $P \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times m})$ mit $E_1^\top P E_1 \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{l\times l})$, wenn für alle $x \in L^2(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ mit $E_2 x \in W^{1,2}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{l\times l})$ und $x(t) \in \mathcal{V}_{\mathrm{sys}}(t)$ f.f.a. $t \in \mathbb{I}$ gilt

$$\int_{\mathbb{I}} x^\top (E_2^\top d(E_1^\top P E_1) E_2 + (E_2^\top E_1^\top P A + A^\top P E_1 E_2 + Q)\,\mathrm{dt}) x \geq 0.$$

DIE LEBESGUE-STIELTJES-UNGLEICHUNG

DEFINITION (DIE LEBESGUE-STIELTJES-UNGLEICHUNG, VGL. CLEMENTS, ANDERSON 1978)

Sei $[E_1, E_2, A]$ mit properly stated leading term.
Die *Lebesgue-Stieltjes-Ungleichung* ist für $[E_1, E_2, A]$ auf $\mathbb{I} = [t_0, t_f]$ erfüllt, wenn

$$\exists P = P^\top \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m\times m}) :$$
$$dM(P) \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}_{[E_1,E_2,A]}} 0 \ \wedge \ F \geq_{(E_2 \mathcal{V}^{\mathrm{sys}}_{[E_1,E_2,A]})(t_f)} E_1(t_f)^\top P(t_f) E_1(t_f).$$

DIE LEBESGUE-STIELTJES-UNGLEICHUNG IMPLIZIERT ZULÄSSIGKEIT

THEOREM (VGL. CLEMENTS, ANDERSON 1978)

Sei $[E_1, E_2, A]$ *mit properly stated leading term.*
Ist die Lebesgue-Stieltjes-Ungleichung für $[E_1, E_2, A]$ *auf* $\mathbb{I}$ *erfüllt, so gilt*

$$\inf_{\substack{x \text{ Lsg. von } [E_1, E_2, A] \\ (E_2 x)(t_0) = x_0}} V(x) > -\infty \text{ für alle } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

ZULÄSSIGKEIT UND EIN STRANGENESSINDEX IMPLIZIEREN DIE LEBESGUE-STIELTJES-UNGLEICHUNG

THEOREM

Sei $[E_1, E_2, A]$ mit properly stated leading term und wohldefiniertem Strangenessindex μ. Ist

$$\inf_{\substack{x \text{ Lsg. von } [E_1,E_2,A] \\ (E_2x)(t_0)=E_2(t_0)x_0}} V(x) > -\infty \text{ für alle } E_2(t_0)x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

so wird die Lebesgue-Stieltjes Ungleichung für $[E_1, E_2, A]$ auf $\mathbb{I}$ erfüllt.

BEMERKUNG

Die Optimalwertfunktion V^+ erfüllt die Lebesgue-Stieltjes-Ungleichung.

BEISPIEL: DAE MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

Betrachte

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix},\quad t\in[0,1].$$

Die Systemraum-Abbildung $\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}$ ist konstant mit

$$\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\,x_2=x_3\right\}.$$

BEISPIEL: DAE MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

Betrachte die Kostenfunktion $\int_0^1 x_1(\tau)^2 + x_2(\tau)^2 + x_3(\tau)^2 \mathrm{d}\tau$.

Schreibe $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$. Die Lebesgue-Stieltjes-Ungleichung

$$\int_{\mathbb{I}} x^\top (E_2^\top d(E_1^\top P E_1) E_2 + (E_2^\top E_1^\top P A + A^\top P E_1 E_2 + Q)\,\mathrm{dt}) x \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} 0$$

ergibt

$$\int_{[0,1]} x_1(t)^2 \mathrm{d}p_{11}(t) + \int_{[0,1]} 2x_1(t)p_{11}(t)x_3(t) + x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2 \mathrm{d}t \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} 0.$$

BEISPIEL: DAE MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

Mit $Q = I$ invertierbar führt

$$\int_{[0,1]} x_1(t)^2 \mathrm{d}p_{11}(t) + \int_{[0,1]} 2x_1(t)p_{11}(t)x_3(t) + x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2 \mathrm{d}t \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} 0$$

auf die Riccati-Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_{11} = -2p_{11} - \frac{p_{11}^2}{2} - 1.$$

Löse diese mittels Separation der Variablen.