

# Spezialisierte adaptive Algorithmen für die Modellprädiktive Regelung von PDEs

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik  
Mathematisches Institut  
Universität Bayreuth

28.02.2018

12. Elgersburg Workshop (26.02. - 01.03.2018)

Lars Grüne, Manuel Schaller und Anton Schiela

# Gliederung

- 1 Einführung
- 2 Sensitivitätsanalyse
- 3 Numerische Ergebnisse

# Inhalt

## 1 Einführung

# Was ist Modellprädiktive Regelung (MPC)?

- Technik zur Konstruktion von Feedback-Controllern
- Optimalsteuerungsproblem auf großem (unendlichem) Zeithorizont  $L$   
↔ viele Optimalsteuerungsprobleme mit (endlichem) kürzerem Horizont  $T$ ,  $T \ll L$

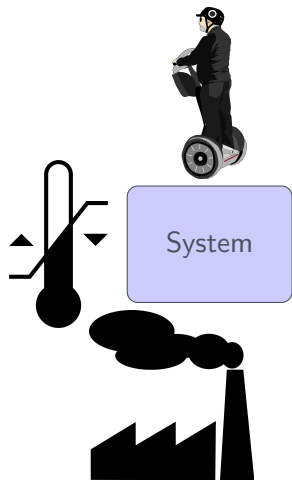
# Was ist Modellprädiktive Regelung (MPC)?

- Technik zur Konstruktion von Feedback-Controllern
- Optimalsteuerungsproblem auf großem (unendlichem) Zeithorizont  $L$   
↔ viele Optimalsteuerungsprobleme mit (endlichem) kürzerem Horizont  $T$ ,  $T \ll L$

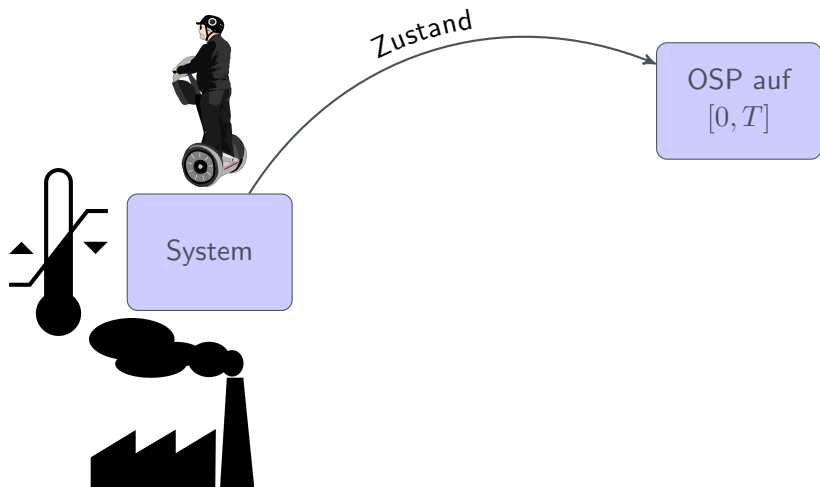
*"One technique for obtaining a feedback controller synthesis from knowledge of open-loop controllers is to **measure** the current control process state and then **compute** very rapidly for the open-loop control function. The **first portion** of this function is then used during a short time interval, after which a **new measurement** of the process state is made and a **new open-loop control** function is computed for this new measurement. The procedure is then repeated."*

- Foundations of optimal control theory, Lee and Markus, 1967

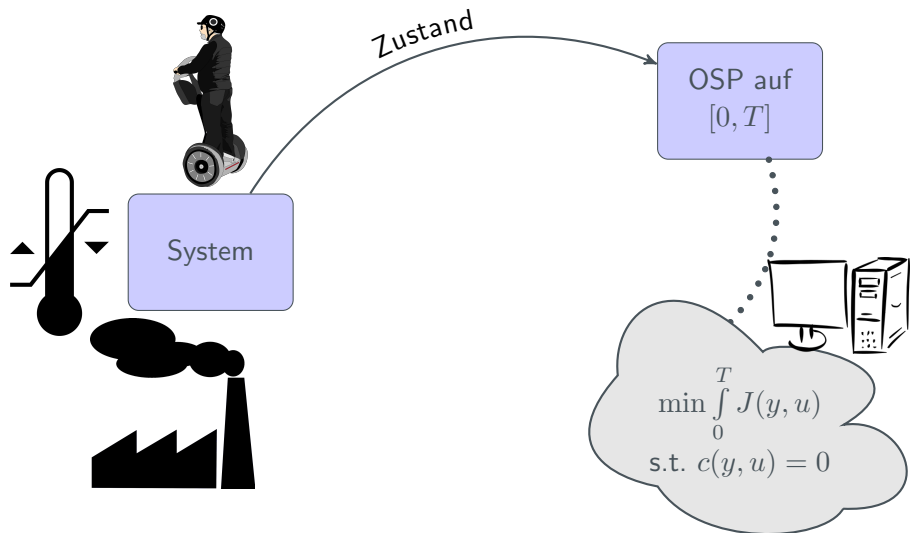
# Der MPC-Algorithmus



# Der MPC-Algorithmus

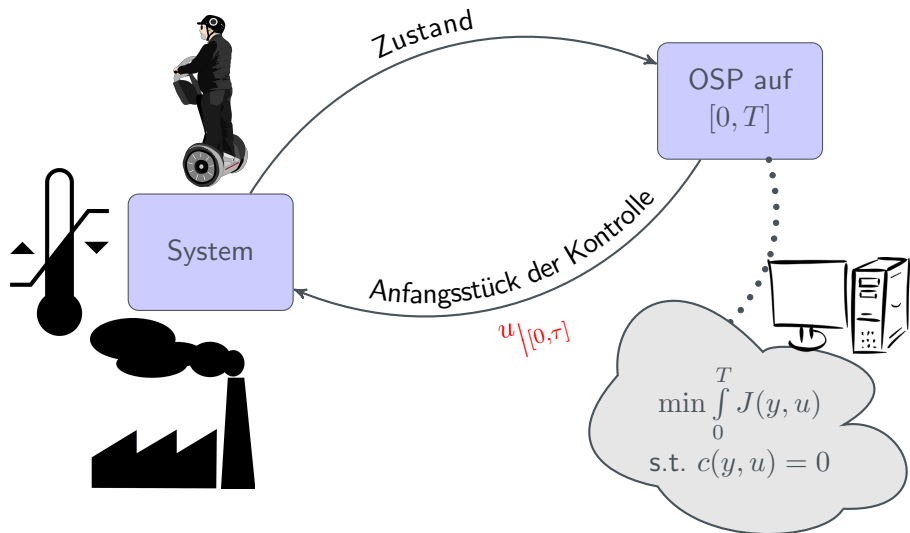


# Der MPC-Algorithmus



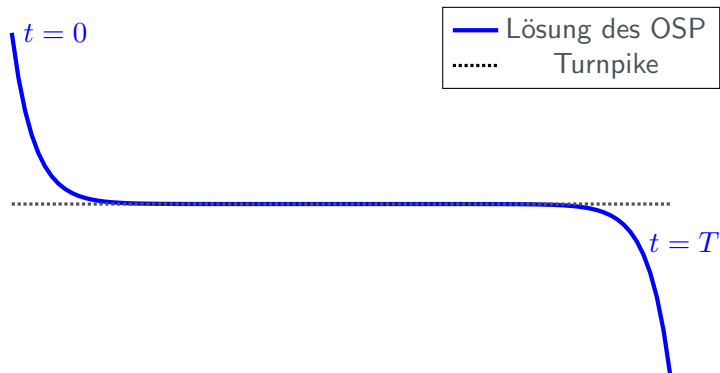


# Der MPC-Algorithmus

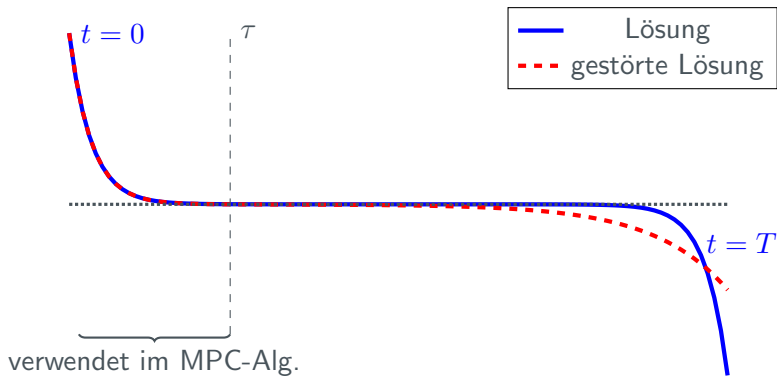


# Die exponentielle Turnpike Eigenschaft

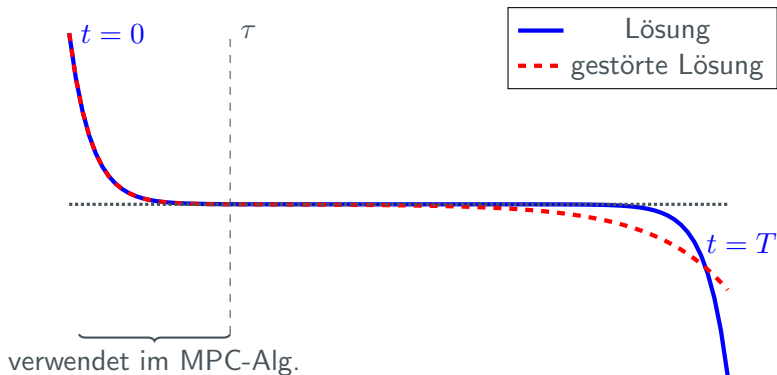
- Bestimmtes Verhalten von Lösungen zeitabhängiger Optimalsteuerungsprobleme
- Aktuelle Resultate von Porretta und Zuazua (2013,2016), Trélat und Zuazua (2015) und Trélat et al.(2016)



# Motivation für die Sensitivitätsanalyse



# Motivation für die Sensitivitätsanalyse



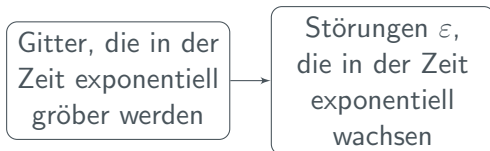
↪ Wie modelliert man **Diskretisierungsfehler** als **Störungen**?  
Für gew. Dgl, vgl. Gear (1971):

$$\dot{x} = f(x(t), t) \quad \hookrightarrow \quad \dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}(t), t) + \varepsilon(t) \quad \varepsilon(t) \sim \text{Gittergrobheit}$$

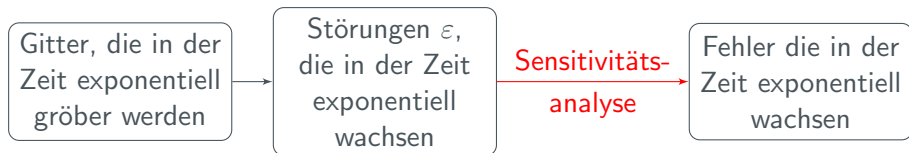
# Einordnung und Überblick

Gitter, die in der  
Zeit exponentiell  
größer werden

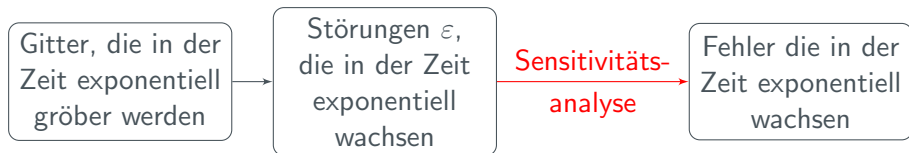
# Einordnung und Überblick



# Einordnung und Überblick



# Einordnung und Überblick



Konsequenzen im MPC-Kontext:

- Verwendete Kontrolle  $u|_{[0,\tau]}$  ist sehr genau
- Effiziente Lösung der zugrundeliegenden Optimalsteuerungsprobleme durch spezielle Gitter



## Lineare parabolische partielle Differentialgleichungen

- Bochnerraum  $L_2(0, T; V)$ , Gelfand-Dreier  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$
- Schwache Zeitableitung

$$D : W([0, T]) \rightarrow L_2(0, T; V)^* \times H^*,$$

$$(Dw)(v, v_0) := \int_0^T w'(t)(v(t)) dt + \langle w(0), v_0 \rangle_H.$$

- Schwache Ortsableitung, Transportterme...

$$\Lambda : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V)^*$$

- Kontrolleinfluss  $B : L_2(0, T; L_2(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; H)^*$ .

## Lineare parabolische partielle Differentialgleichungen

- Bochnerraum  $L_2(0, T; V)$ , Gelfand-Dreier  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$
- Schwache Zeitableitung

$$D : W([0, T]) \rightarrow L_2(0, T; V)^* \times H^*,$$

$$(Dw)(v, v_0) := \int_0^T w'(t)(v(t)) dt + \langle w(0), v_0 \rangle_H.$$

- Schwache Ortsableitung, Transportterme...

$$\Lambda : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V)^*$$

- Kontrolleinfluss  $B : L_2(0, T; L_2(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; H)^*$ .

$\hookrightarrow$  lineare part. Dgl (vgl. Schiela (2013))

$$Dy - \Lambda y - Bu = \langle y_0, \cdot \rangle$$

# Optimalsteuerungsprobleme

Wir behandeln das Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{y,u} \quad & \frac{1}{2} \|C(y - y_d)\|_{L_2([0,T] \times \Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|R(u - u_d)\|_{L_2([0,T] \times \Omega)}^2 \\ \text{s.t.} \quad & Dy - \Lambda y - Bu = \langle y_0, \cdot \rangle \end{aligned}$$

$C$  linear beschränkt,  $R$  linear, beschränkt und invertierbar.

# Optimalsteuerungsprobleme

Wir behandeln das Optimalsteuerungsproblem

$$\min_{y,u} \frac{1}{2} \|C(y-y_d)\|_{L_2([0,T] \times \Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|R(u - u_d)\|_{L_2([0,T] \times \Omega)}^2$$

s.t.  $Dy - \Lambda y - Bu = \langle y_0, \cdot \rangle$

$C$  linear beschränkt,  $R$  linear, beschränkt und invertierbar.

↪ **Optimalitätsbedingungen:**

$$\begin{pmatrix} C^* M_y C & 0 & (D - \Lambda)^* \\ 0 & \alpha R^* M_u R & -B^* \\ (D - \Lambda) & -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \alpha R^* M_u R u_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle \end{pmatrix}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} C^* M_y C & (D - \Lambda)^* \\ (D - \Lambda) & -BQ^{-1}B^* \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle + B u_d \end{pmatrix},$$

wobei  $Q := \alpha R^* M_u R$  und  $u = Q^{-1} B^* \lambda + u_d$ . (Elimination der Kontrolle)

# Inhalt

## 2 Sensitivitätsanalyse

# Eine Gleichung für den absoluten Fehler

## Exakte Lösung

$$M \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle + B u_d \end{pmatrix}$$

## Eine Gleichung für den absoluten Fehler

Exakte Lösung

$$M \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle + B u_d \end{pmatrix}$$

Gestörte Lösung

$$M \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle + B u_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

## Eine Gleichung für den absoluten Fehler

Exakte Lösung

$$M \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle + B u_d \end{pmatrix}$$

Gestörte Lösung

$$M \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle + B u_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$M \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{y} - y \\ \tilde{\lambda} - \lambda \end{pmatrix}}_{=:(\delta y, \delta \lambda)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{Absoluter Fehler}$$



## Eine Gleichung für den absoluten Fehler

Exakte Lösung

$$M \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle + B u_d \end{pmatrix}$$

Gestörte Lösung

$$M \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^* M_y C y_d \\ \langle y_0, \cdot \rangle + B u_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$M \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{y} - y \\ \tilde{\lambda} - \lambda \end{pmatrix}}_{=:(\delta y, \delta \lambda)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{Absoluter Fehler}$$

Wie beeinflusst das zeitliche Verhalten von  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  das zeitliche Verhalten des absoluten Fehlers  $(\delta y, \delta \lambda)$ ?

# Einfluss von Störungen wird exponentiell gedämpft

Theorem (Grüne, S., Schiela, 2018)

Angenommen  $(\delta y, \delta \lambda) \in W([0, T])^2$  löst (1). Sei

- $X := L_2(0, T; H)$
- $0 \leq \mu < \frac{1}{\|M^{-1}\|_{(X^*)^2 \rightarrow X^2}}$

$$\|e^{-\mu t} \varepsilon_1(t)\|_{X^*} + \|e^{-\mu t} \varepsilon_2(t)\|_{X^*} \leq \rho, \quad \rho \geq 0$$

Dann existiert eine Konstante  $c_1 \geq 0$  sodass

$$\|e^{-\mu t} \delta y\|_X + \|e^{-\mu t} \delta u\|_U + \|e^{-\mu t} \delta \lambda\|_X \leq c_1 \|M^{-1}\|_{(X^*)^2 \rightarrow X^2} \rho,$$

# Einfluss von Störungen wird exponentiell gedämpft

Theorem (Grüne, S., Schiela, 2018)

Angenommen  $(\delta y, \delta \lambda) \in W([0, T])^2$  löst (1). Sei

- $X := L_2(0, T; H)$
- $0 \leq \mu < \frac{1}{\|M^{-1}\|_{(X^*)^2 \rightarrow X^2}}$

$$\|e^{-\mu t} \varepsilon_1(t)\|_{X^*} + \|e^{-\mu t} \varepsilon_2(t)\|_{X^*} \leq \rho, \quad \rho \geq 0$$

Dann existiert eine Konstante  $c_1 \geq 0$  sodass

$$\|e^{-\mu t} \delta y\|_X + \|e^{-\mu t} \delta u\|_U + \|e^{-\mu t} \delta \lambda\|_X \leq c_1 \|M^{-1}\|_{(X^*)^2 \rightarrow X^2} \rho,$$

Interpretation:

$$\|\varepsilon(t)\|_{H^*} \stackrel{L_2}{\sim} \rho e^{\mu t} \quad \Rightarrow \quad \|\delta y(t)\|_H \stackrel{L_2}{\sim} \rho \quad \text{wenn } t \text{ klein}$$

## Neue Fragestellung

↪ Inwiefern hängt  $\|M^{-1}\|_{(L_2(0,T;H))^* \rightarrow L_2(0,T;H)^2}$  von  $T$  ab?

# Stabilität von part. Differentialgleichungen

## Definition

Ein linearer Operator  $S$  heißt **exponentiell stabil**, wenn es eine Lösung  $y \in W[0, T]$  von

$$(Dy)(v, v_0) - Syv = \langle y_0, v_0 \rangle \quad \forall (v, v_0) \in L_2(0, T; V) \times H$$

gibt, für die

$$\|y(t)\|_H \leq Me^{-kt} \|y_0\|_H \quad \forall t \in [0, T]$$

gilt, wobei  $M, k > 0$ .

# Abschätzung der Operatornorm $\|M^{-1}\|$

$$\min_{y,u} \frac{1}{2} \|C(y-y_d)\|_{L_2([0,T] \times \Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|R(u - u_d)\|_{L_2([0,T] \times \Omega)}^2$$

s.t.  $Dy - \Lambda y - Bu = \langle y_0, \cdot \rangle$

## Definition

- $(\Lambda, B)$  **exp. stabilisierbar**, wenn es einen Feedback-Operator  $K_B$  gibt, sodass  $\Lambda + BK_B$  exp. stabil ist.
- $(\Lambda, C)$  **exp. entdeckbar**, wenn  $(\Lambda^*, C^*)$  exp. stabilisierbar.

## Theorem (Grüne, S., Schiela, 2018)

Sei  $(\Lambda, B)$  **exp. stabilisierbar**,  $(\Lambda, C)$  **exp. entdeckbar**, dann

$$\|M^{-1}\|_{L_2(0,T;H^*)^2 \rightarrow L_2(0,T;H)^2} \leq c, \quad c \text{ **unabhängig** von } T$$

# Inhalt

## 3 Numerische Ergebnisse

# Ein Modellproblem

## Beispiel

$$\min_{(y,u)} \frac{1}{2} \| (y - y_d) \|_{L_2([0,30] \times [0,1]^2)}^2 + \frac{\alpha}{2} \| u \|_{L_2([0,30] \times [0,1]^2)}^2$$

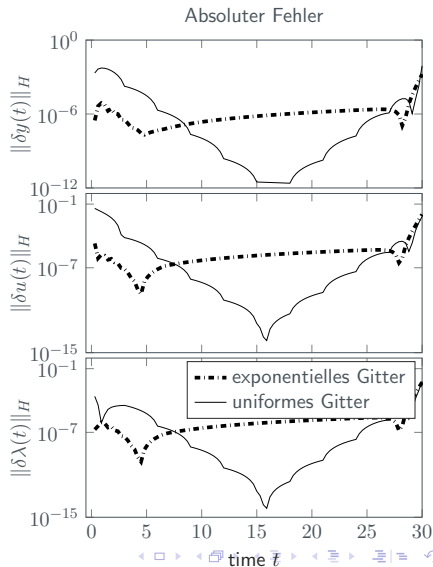
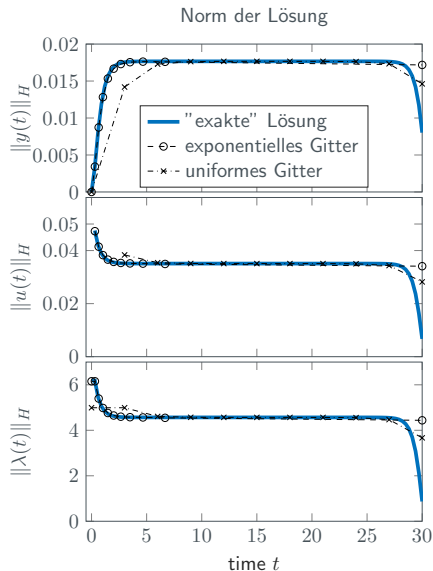
$$\text{s.t. } (Dy)(v, v_0) + \int_0^{30} \int_{[0,1]^2} d\nabla y \nabla v \, d\omega dt - \int_0^{30} \int_{[0,1]^2} uv \, d\omega dt = 0 \quad \forall (v, v_0)$$

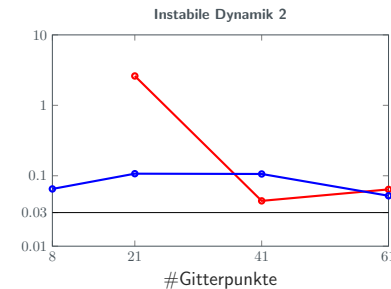
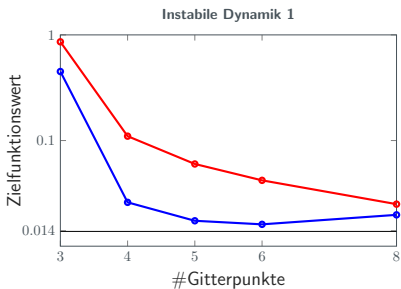
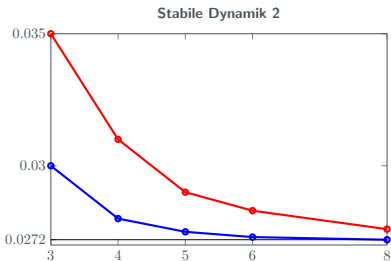
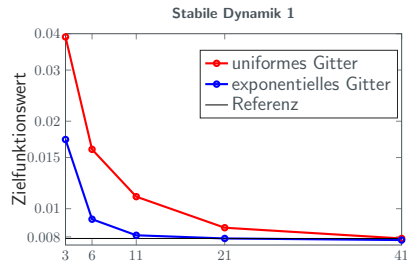
$$(\dot{y} - d\Delta y = u, \quad y(0) = 0 \quad (\text{starke Formulierung}))$$





## Open-loop Fehler



Closed-loop Kosten: **uniformes** vs. **exponentielles** Gitter

# Offene Fragen und Ausblick

- Abschätzung in  $L_2(0, T; H)$ -Norm ( $\Leftrightarrow$  Stabilität in  $V$ -Sinn?)
- Erweiterung für Randkontrolle
- Nichtlineare Optimalsteuerungsprobleme
- Konstruktion von Algorithmen

# Offene Fragen und Ausblick

- Abschätzung in  $L_2(0, T; H)$ -Norm ( $\Leftrightarrow$  Stabilität in  $V$ -Sinn?)
- Erweiterung für Randkontrolle
- Nichtlineare Optimalsteuerungsprobleme
- Konstruktion von Algorithmen

**Danke für die Aufmerksamkeit!**

# Eine exponentielle Turnpike Eigenschaft

↔ Statisches Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\bar{y}, \bar{u}} \quad & \frac{1}{2} \|C(\bar{y} - y_d)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|R(\bar{u} - u_d)\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ \text{s.t.} \quad & \underline{\Lambda}\bar{y} - \underline{B}\bar{u} = 0. \end{aligned}$$

↔ Optimalitätsbedingungen

$$\begin{pmatrix} C^* M_y C & (D - \Lambda)^* \\ (D - \Lambda) & -BQ^{-1}B^* \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} y - \bar{y} \\ \lambda - \bar{\lambda} \end{pmatrix}}_{(\delta y, \delta \lambda)^T} = \begin{pmatrix} -\langle \bar{\lambda}, \cdot \rangle \\ \langle y_0 - \bar{y}, \cdot \rangle \end{pmatrix} \quad (2)$$

# Eine exponentielle Turnpike Eigenschaft

## Theorem

Angenommen  $(\delta y, \delta \lambda)$  löst (2). Dann gibt es  $0 \leq \mu \leq \frac{1}{\|M^{-1}\|_{(X^* \times H)^2 \rightarrow X^2}}$  sodass

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{e^{-\mu t} + e^{-\mu(T-t)}} \delta y \right\|_X + \left\| \frac{1}{e^{-\mu t} + e^{-\mu(T-t)}} \delta u \right\|_U + \left\| \frac{1}{e^{-\mu t} + e^{-\mu(T-t)}} \delta \lambda \right\|_X \\ & \leq c_2 \|M^{-1}\|_{(X^* \times H)^2 \rightarrow X^2} (\|y_0 - \bar{y}\|_H + \|\bar{\lambda}\|_H) \end{aligned}$$