Regelungsinvarianz bei polynomiellen Systemen

Eva Zerz

mit Sebastian Walcher, Christian Schilli,
Viktor Levandovskyy, Niclas Kruff, Melanie Harms (Aachen)

Tsuyoshi Yuno (Kyushu), Toshiyuki Ohtsuka (Kyoto)

Elgersburg 2018

Polynomielle Systeme

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}}$$

mit $f \in R^n$, $g \in R^{n \times m}$, $h \in R^p$
wobei $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Zustandsrückführung: $u(t) = \alpha(x(t))$ mit $\alpha \in R^m$

Ziel: Symbolisches Rechnen im systemtheoretischen Kontext

Invariante Mengen

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}}$$

$S \subseteq \mathbb{K}^n$ ist invariante Menge $\Leftrightarrow$
Aus $x_0 \in S$ folgt $\varphi(t, x_0) \in S$ für alle $t \in \mathbb{I}(x_0)$

$\varphi(t, x_0)$ ... Lösung des AWP zur Zeit t
$\mathbb{I}(x_0)$ ... maximales Existenzintervall

Lie-Ableitung: $$L_F(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} F_i$$

S invariant und durch Gleichungen $p_1(x) = \ldots = p_k(x) = 0$ gegeben $\Rightarrow$ die $L_F(p_i)$ verschwinden auf S

Invariante Varietäten

Varietät: $V = \{x \in \mathbb{K}^n \mid p_1(x) = \ldots = p_k(x) = 0\}$

wobei $p_i \in R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

Ideal von V: $\mathcal{J}(V) = \{p \in R \mid p(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$

Fakten: $\mathcal{J}(V)$ ist endlich erzeugt (HBS)
Komplexer Fall: $\mathcal{J}(V) = \sqrt{\langle p_1, \ldots, p_k \rangle}$ (HNS)
Reeller Fall: $\mathcal{J}(V) = \sqrt[\mathbb{R}]{\langle p_1, \ldots, p_k \rangle}$ ($\mathbb{R}$NS)
Vereinfachende Annahme: $\mathcal{J}(V) = \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$

Satz: Seien $F \in R^n$ und $V \subseteq \mathbb{K}^n$ gegeben. Äquivalent:

- V ist invariant für $\dot{x} = F(x)$
- $L_F(\mathcal{J}(V)) \subseteq \mathcal{J}(V)$
- $L_F(p_i) \in \mathcal{J}(V)$ für alle i

Algorithmischer Test

Gegeben: Varietät $V \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $\mathcal{J}(V) = \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$

V ist F-invariant $\Leftrightarrow L_F(p_i) \in \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$ für alle i

Allgemeiner: Berechnung eines EZS von

$$\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid V \text{ ist } F\text{-invariant}\}$$

Regelungsinvarianz

- V ist regelungsinvariant für $\dot{x} = f(x) + g(x)u \Leftrightarrow$
- $\exists \alpha \in R^m : V$ ist invariant für $\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) \Leftrightarrow$
- $\exists \alpha \in R^m : f + g\alpha \in \mathcal{M} \Leftrightarrow$
- $f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}(g)$

Menge der zulässigen Feedbacks

Gegeben: $f \in R^n$, $g \in R^{n\times m}$, Varietät V

$$\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid V \text{ ist } F\text{-invariant}\}$$

Dann ist

$$\boxed{\mathcal{A} = \{\alpha \in R^m \mid f + g\alpha \in \mathcal{M}\}}$$

entweder leer oder ein affiner Modul

$$\mathcal{A} = \alpha_0 + \mathcal{A}_0$$

- Bestimmung einer partikulären Lösung α_0
- Bestimmung eines EZS von $\mathcal{A}_0 = \{\alpha \mid g\alpha \in \mathcal{M}\}$

Rationale Systeme

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{F(x(t))}{d(x(t))}}$$

mit $F \in R^n$ und $0 \neq d \in R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ auf $U = \mathbb{K}^n \setminus \mathcal{V}(d)$
Varietät $V \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $I = \mathcal{J}(V)$

Trick: Ersetze I durch $(I : d^\infty) = \{p \in R \mid \exists e \in \mathbb{N} : pd^e \in I\}$

$$\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid L_F(I) \subseteq I\}$$

Satz: Äquivalent:

- $U \cap V = V \setminus \mathcal{V}(d)$ invariante Menge für $\dot{x} = \frac{F(x)}{d(x)}$
- $F \in \mathcal{M}$

Rationales Feedback

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$$

mit $f \in R^n$ und $g \in R^{n \times m}$

$$\boxed{u(t) = \frac{\alpha(x(t))}{d(x(t))}}$$

mit $\alpha \in R^m$ und $0 \neq d \in R$

Folgerung: Sei V irreduzibel und $V \not\subseteq \mathcal{V}(d)$. Äquivalent:

- $u = \frac{\alpha}{d}$ macht $V \setminus \mathcal{V}(d)$ invariant für $\dot{x} = f(x) + g(x)u$
- $fd + g\alpha \in \mathcal{M}$

Strategie: Berechne alle $\binom{d}{\alpha}$ mit $(f, g)\binom{d}{\alpha} \in \mathcal{M}$ und suche d mit $V \cap \mathcal{V}(d)$ “klein”

Fazit

Rationales Feedback liefert mehr invariante Varietäten als polynomielles Feedback, ist aber technisch involvierter.

Im Rest des Vortrags: Polynomieller Fall

Überblick

- Bedingte Regelungsinvarianz
- Gleichungen und Nichtgleichungen
- Zeitvarianter Fall
- Natürliche Regelungsinvarianz
- Mehrdimensionale Systeme
- Hyperflächen

Bedingte Regelungsinvarianz

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}}$$

Ausgangsrückführung: $u(t) = \beta(y(t))$
V ... Varietät, $\mathcal{A}$ ... Menge der zulässigen (State-) Feedbacks

- V ist bedingt regelungsinvariant für $\dot{x} = f(x) + g(x)u \Leftrightarrow$
- $\exists \beta \in \mathbb{K}[\underline{y}]^m : V$ ist invariant für $\dot{x} = f(x) + g(x)\beta(h(x)) \Leftrightarrow$
- $\exists \beta \in \mathbb{K}[\underline{y}]^m$: $\beta \circ h \in \mathcal{A} \Leftrightarrow$
- $\mathcal{A} \cap \mathbb{K}[\underline{h}]^m \neq \emptyset$

wobei $\mathbb{K}[\underline{y}] = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_p]$ und $\mathbb{K}[\underline{h}] = \mathbb{K}[h_1, \ldots, h_p]$
... die von den $h_i \in R$ erzeugte Unteralgebra von $R = \mathbb{K}[\underline{x}]$

Menge der zulässigen Output-Feedbacks

$$\boxed{\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathbb{K}[\underline{h}]^m}$$

$\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq R^m$ ... Menge der zulässigen State-Feedbacks
$\mathbb{K}[\underline{h}] = \mathbb{K}[h_1, \ldots, h_p]$ ... von den h_i erzeugte Unteralgebra von R

Affine Struktur: $\mathcal{A} = \alpha_0 + \mathcal{A}_0$

$\mathcal{A}_0 \subseteq R^m$ ... Untermodul

$$\mathcal{B} = \alpha_1 + (\mathcal{A}_0 \cap \mathbb{K}[\underline{h}]^m)$$

- Schnitt von Untermodul in R^m und (Unteralgebra von R)^m
- Partikuläre Lösung $\alpha_1 = \beta_1 \circ h$ mit $\beta_1 \in \mathbb{K}[\underline{y}]^m$

To be or not to be ... equal

$$\boxed{S = V \setminus \mathcal{V}(q) = \{x \in V \mid q(x) \neq 0\}}$$

V ... Varietät, $q \in R$, $I = \mathcal{J}(V)$

Trick: Übergang von I zu $\bar{I} = (I : q^\infty) \supseteq I$

$$S = \mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(\bar{I}) \setminus \mathcal{V}(q)$$

$$\mathcal{J}(S) = \bar{I} = \mathcal{J}\mathcal{V}(\bar{I})$$

Satz: Äquivalent:

- S ist invariante Menge von $\dot{x} = F(x)$
- $\mathcal{V}(\bar{I})$ und $\mathcal{V}(\bar{I}) \cap \mathcal{V}(q)$ sind invariante Mengen von $\dot{x} = F(x)$

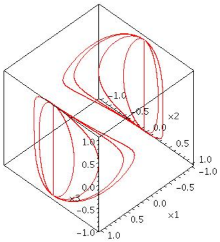
Beweiszutat: Zariski-Abschlüsse invarianter Mengen sind invariant

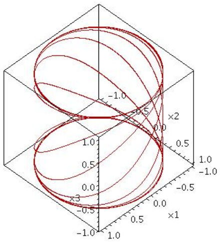
Beispiel $\quad S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 \neq 1\}$

Betrachte $\dot{x} = F_i(x)$ mit

$$F_1 = \begin{bmatrix} (1 - x_1^2)x_3 \\ -x_1 x_2 x_3 \\ x_1(1 - x_3^2) \end{bmatrix} \qquad F_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \end{bmatrix}$$

Dann ist S invariante Menge von $\dot{x} = F_i(x)$





Zeitvarianter Fall

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(x(t), t)\\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}}$$

$F \in R[t]^n$ mit $R = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$
$p_i \in R[t]$

$$V = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_1(x, t) = \ldots = p_k(x, t) = 0\}$$

$$V(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x, t) = \ldots = p_k(x, t) = 0\}$$

$V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist invariante Menge $\Leftrightarrow$
Aus $x_0 \in V(t_0)$ folgt $x(t) \in V(t)$ für alle $t \in \mathbb{I}$
$x(t)$ ... Lösung des AWP zur Zeit t, $\mathbb{I}$ ... max. Existenzintervall

$$L_F(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} F_i + \frac{\partial p}{\partial t}$$

Satz: Seien $F \in R[t]^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben. Äquivalent:

- V ist invariant für $\dot{x} = F(x, t)$
- $L_F(\mathcal{J}(V)) \subseteq \mathcal{J}(V)$

$\mathcal{M} = \{F \in R[t]^n \mid V \text{ ist } F\text{-invariant}\}$ nur affin linear

Beispiel:

$$V(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y, t) = t(x^2 + y^2) - 1 = 0\}$$

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} \right\rangle$$

Natürliche Regelungsinvarianz

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)}$$

Gegeben: $g \in R^{n \times m}$, $p_i \in R$

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n \mid p_1(x) = \ldots = p_k(x) = 0\}$$

V natürlich regelungsinvariant für $g \Leftrightarrow$
$\forall f \in R^n \;\; \exists \alpha \in R^m : \;\; V$ invariant für $\dot{x} = (f + g\alpha)(x) \Leftrightarrow$
$\mathcal{M} + \mathrm{im}(g) = R^n$

$$\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid V \text{ ist } F\text{-invariant}\}$$

Beispiel: $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ ist natürlich regelungsinvariant für $g = [x_1, \ldots, x_n]^T$

Satz: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V irreduzibel und glatt. Äquivalent:

1. V ist natürlich regelungsinvariant für g
2. $T_x V + \mathrm{im}(g(x)) = \mathbb{K}^n$ für alle $x \in V$
3. $\mathrm{Rang}(J(x)g(x)) = \mathrm{Rang}(J(x))$ für alle $x \in V$

$T_x V$ ... Tangentialraum von V in x
$J \in R^{k \times n}$ ... Jacobi-Matrix von p_i mit $\mathcal{J}(V) = \langle p_1, \dots, p_k \rangle$

Satz: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und V irreduzibel und glatt.
Dann gilt: $1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$

- Gilt Bedingung 2 (oder 3) in der Komplexifizierung, dann ist V natürlich regelungsinvariant (mit reellen Feedbacks)
- Gilt Bedingung 2 (oder 3) nur reell, dann ist V natürlich regelungsinvariant mit rationalen reellen Feedbacks (mit nullstellenfreien Nennern)

Natürliche Regelungsinvarianz: Fixiere g, variiere f

- "unnatürlich" aus kontrolltheoretischer Sicht
- "schöne" geometrische Transversalitätsbedingung
- Umkehrproblem (Wahl von g aus Menge realisierbarer Aktuatormatrizen) mit bekannten Methoden lösbar
- Robustheit gegen Drift
- Berechnung von nat.-regelungsinvarianten Varietäten zu g oft "leichter" als von regelungsinvarianten Varietäten zu f, g

Roesser-Modelle

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} &= F_1(x(t_1,t_2))\\ \frac{\partial x_2}{\partial t_2} &= F_2(x(t_1,t_2))\end{aligned}}$$

$V_i \subseteq \mathbb{K}^{n_i}$ ... Varietäten, $V = V_1 \times V_2$, $x = (x_1, x_2)$

V invariante Menge $\Leftrightarrow$
Aus $x_1(0,t_2) \in V_1$ und $x_2(t_1,0) \in V_2$ für alle t_1, t_2
folgt $x(t_1,t_2) \in V$ für alle t_1, t_2

Satz: Äquivalent:

- V ist invariant
- $L_{F_1}(\mathcal{J}(V_1)) \subseteq \mathcal{J}(V)$ und $L_{F_2}(\mathcal{J}(V_2)) \subseteq \mathcal{J}(V)$

Hyperflächen $\qquad V = \{x \in \mathbb{K}^n \mid p(x) = 0\}$
$p \in R \setminus \mathbb{K}$ mit $J = [\partial_1 p, \dots, \partial_n p]$

$$\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid V \text{ ist } F\text{-invariant}\}$$

Satz: Es gilt $\quad \mathcal{M} \supseteq \ker(J) + \langle p e_i \mid i = 1, \dots, n\rangle$
mit Gleichheit, wenn V über $\mathbb{C}$ glatt ist

Beispiel: $V = \{x \in \mathbb{C}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$ ist singulär in $(0, 0, 0)$
und die Inklusion ist strikt, etwa $F = [x_1, x_2, x_3]^T$

Idee: Wähle $F = F_0 - J^T p$ mit $F_0 \in \ker(J)$
Dann mit $y(t) := p(x(t))$, wobei $\dot{x} = F(x)$

$$\dot{y}(t) = J(x(t))F(x(t)) = -\|J(x(t))\|^2 y(t)$$

Regelungsinvarianz: Wähle α so, dass $f + g\alpha = F = F_0 - J^T p$
bzw. teste ob $f + J^T p \in \ker(J) + \operatorname{im}(g)$

Ansatz $F = F_0 - (\nabla p)p$ führt für $y(t) = p(x(t))$ mit $\dot{x} = F(x)$ auf

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t), \qquad a(t) = -\|(\nabla p)(x(t))\|^2$$

... skalare lineare zeitvariante Dgl.

Ziel: Asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$, Stabilitätsaussagen ...
$\rightsquigarrow$ attrahierende invariante Varietät

Danke für die Aufmerksamkeit!