Beobachtbarkeit des Schaltsignals

bei geschalteten ODEs und DAEs

Ferdinand Küsters

10. Elgersburg Workshop
07.-11.02.2016

Fraunhofer ITWM

ITWM: Systemanalyse, Prognose und Regelung

- Online Zustandsschätzung und Regelung von komplexen vernetzten Systemen
  - Industrie 4.0
  - Smart Grid
  - Maschinen und Antriebe
- Geschaltete ODE-/ DAE-Systeme
  - Modellreduktion
  - Lösbarkeit
  - Regelung

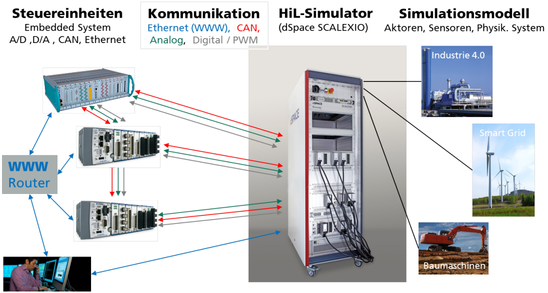


Figure: Fraunhofer ITWM Prüfstand: Hardware in the Loop

Fraunhofer ITWM

Inhalt

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_\sigma x \\
y &= C_\sigma x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\
y &= C_\sigma x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x \\
y &= C_\sigma x
\end{aligned}
$$

Geschaltete ODE

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)} x(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= C_{\sigma(t)} x(t) \end{aligned} \tag{swODE}$$

mit $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, \dots, N\}$ stückweise konstant, lokal endlich viele Unstetigkeitsstellen.

Ziel

Bestimme σ aus $y = y(x_0, \sigma)$ für x_0 unbekannt.

Problem: Für $x_0 = 0$, σ beliebig gilt $y(0, \sigma) = 0$.

Beobachtbarkeitsdefinitionen

σ-Beobachtbarkeit

Für $(x_0, \tilde{x}_0) \neq 0$ gilt:

$$\sigma \neq \tilde{\sigma} \;\Rightarrow\; y(x_0, \sigma) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}).$$

notwendig

hinreichend

t_S-Beobachtbarkeit

Für $x_0, \tilde{x}_0 \neq 0$ und $\sigma, \tilde{\sigma}$ mit

$$\begin{aligned} &\{\ t \mid \sigma \text{ unstetig in } t\ \} \\ \neq &\{\ t \mid \tilde{\sigma} \text{ unstetig in } t\ \} \end{aligned}$$

gilt $y(x_0, \sigma) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma})$.

(x, σ)-Beobachtbarkeit

Für $(x_0, \tilde{x}_0) \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} &(x_0, \sigma) \neq (\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}) \\ \Rightarrow\; &y(x_0, \sigma) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}). \end{aligned}$$

t_S-Beobachtbarkeit

Lemma ([VCSS03])

t_S-Beobachtbarkeit von (swODE) *ist äquivalent zu*

$$\operatorname{rank}(\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j) = n \quad \forall i \neq j.$$

$$\mathcal{O}_i := \begin{bmatrix} C_i^\top & (C_i A_i)^\top & (C_i A_i^2)^\top & \cdots \end{bmatrix}^\top$$

Beweis: Definiere

$$\mathcal{Y}(t) := \begin{bmatrix} y(t)^\top & y'(t)^\top & y^{(2)}(t)^\top & \cdots \end{bmatrix}^\top.$$

Die Schaltung von $\sigma(t_S^-) = i$ zu $\sigma(t_S^+) = j$ wird bemerkt, sofern $\mathcal{Y}(t_S^+) = \mathcal{O}_j x(t_S) \neq \mathcal{O}_i x(t_S) = \mathcal{Y}(t_S^-)$.

(x, σ)-Beobachtbarkeit

Lemma ([VCSS03])

(x, σ)-*Beobachtbarkeit von* (swODE) *ist äquivalent zu*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j\end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j.$$

Bemerkung

(x, σ)-Beobachtbarkeit $\Rightarrow$ klassische Beobachtbarkeit jeder Mode.

Erweitertes System

Für $i \neq j$ definiere das System $\Sigma_{i,j}$ durch

$$A_{i,j} := \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j \end{bmatrix}, \; B_{i,j} := \begin{bmatrix} B_i \\ B_j \end{bmatrix}, \; C_{i,j} := \begin{bmatrix} C_i & -C_j \end{bmatrix}. \tag{$\Sigma_{i,j}$}$$

Es gilt

$$\text{(swODE) } (x, \sigma)\text{-beobachtbar} \;\Leftrightarrow\; \Sigma_{i,j} \text{ beobachtbar } \forall i \neq j.$$

σ-Beobachtbarkeit

Lemma (vgl. [EPV09])

σ-Beobachtbarkeit $\Leftrightarrow$ (x,σ)-Beobachtbarkeit.

$$
\begin{tikzcd}
\sigma\text{-Beob.} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (x,\sigma)\text{-Beob.} \arrow[d, Rightarrow] \\
t_S\text{-Beob.} & \begin{array}{l}\text{klass. Beob.} \\ \text{jeder Mode}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

(x, σ_1)-Beobachtbarkeit

Definition ((x, σ_1)-Beobachtbarkeit)

Für σ, $\tilde{\sigma}$ **nicht konstant** und $(x_0, \tilde{x}_0) \neq 0$ gilt

$$(x_0, \sigma) \neq (\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}) \;\Rightarrow\; y(x_0, \sigma) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}).$$

Lemma

Ein System ist (x, σ_1)-beobachtbar genau dann, wenn

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p \\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q \end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j,\; p \neq q,\; (i, j) \neq (p, q).$$

Beispiel: Mode 1: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x,$ Mode 2: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x.$

Fraunhofer ITWM

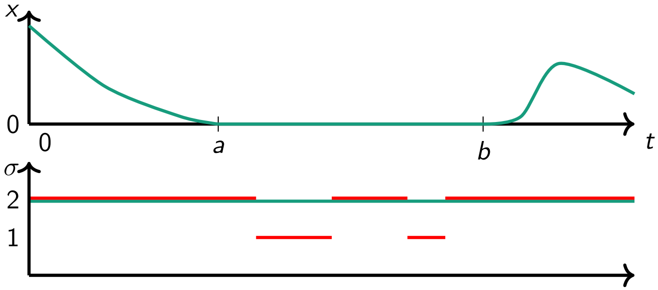
Inhomogene geschaltete ODEs

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) \end{aligned} \qquad \text{(inh. swODE)}$$

Verallgemeinerung der Beobachtbarkeitsdefinitionen:

- Schwache Form: "$\exists u$".
- Starke Form: "$\forall u$".

Äquivalenz von Schaltsignalen



Definition ([Kaba14])

Zwei Schaltsignale σ, $\tilde{\sigma}$ sind äquivalent für x_0 und u ($\sigma \overset{x_0,u}{\sim} \tilde{\sigma}$), falls

- $y(t, x_0, \sigma, u) = y(t, x_0, \tilde{\sigma}, u)$,
- $x(t, x_0, \sigma, u) = x(t, x_0, \tilde{\sigma}, u)$ und
- $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(t)$ außer auf Intervallen I mit $x_I = 0$.

(x, σ)-Beobachtbarkeit

Ein **homogenes** System ist (x, σ)-beobachtbar, genau dann wenn

$$\forall \sigma, \tilde{\sigma}, x_0, \tilde{x}_0 : \quad \neg \left(x_0 = \tilde{x}_0 \ \wedge \ \sigma \overset{x_0, 0}{\sim} \tilde{\sigma} \right) \ \Rightarrow \ y(x_0, \sigma) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}).$$

Definition (Starke (x, σ)-Beobachtbarkeit)

Für alle σ, $\tilde{\sigma}$ und $x_0, \tilde{x}_0$ und alle u gilt:

$$\neg \left(x_0 = \tilde{x}_0 \ \wedge \ \sigma \overset{x_0, u}{\sim} \tilde{\sigma} \right) \ \Rightarrow \ y(x_0, \sigma, u) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}, u).$$

t_S-Beobachtbarkeit

Ein **homogenes** System ist t_S-beobachtbar, genau dann wenn für σ, $\tilde{\sigma}$, x_0, $\tilde{x}_0$ mit

$$\bigcup_{\hat{\sigma} \overset{x_0,0}{\sim} \sigma} \{\ t \mid \hat{\sigma} \text{ unstetig in } t\ \} \neq \bigcup_{\hat{\sigma} \overset{\tilde{x}_0,0}{\sim} \tilde{\sigma}} \{\ t \mid \hat{\sigma} \text{ unstetig in } t\ \}$$

gilt $y(x_0, \sigma) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma})$.

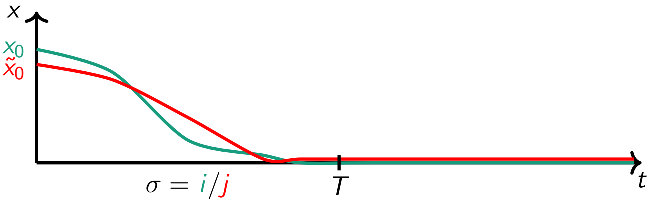
Definition (Starke t_S-Beobachtbarkeit)

Für σ, $\tilde{\sigma}$, x_0, $\tilde{x}_0$ und alle u mit

$$\bigcup_{\hat{\sigma} \overset{x_0,u}{\sim} \sigma} \{\ t \mid \hat{\sigma} \text{ unstetig in } t\ \} \neq \bigcup_{\hat{\sigma} \overset{\tilde{x}_0,u}{\sim} \tilde{\sigma}} \{\ t \mid \hat{\sigma} \text{ unstetig in } t\ \}$$

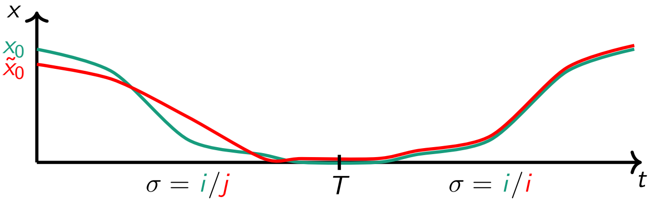
gilt $y(x_0, \sigma, u) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}, u)$.

Problematik mit $x = 0$



$$y(x_0, i, u) = y(\tilde{x}_0, j, u),$$
$$x(T, x_0, i, u) = x(T, \tilde{x}_0, j, u) = 0.$$

Problematik mit $x = 0$



Es gilt $y(x_0, \sigma, \hat{u}) = y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}, \hat{u})$ für

$$\sigma(t) := i,$$

$$\tilde{\sigma}(t) := \begin{cases} j, & t < T, \\ i & t \geq T, \end{cases} \qquad \hat{u}(t) := \begin{cases} u(t), & t < T, \\ u(T - t), & t \geq T. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Das System ist nicht t_S-beobachtbar.

Kontrollierte schwache Unbeobachtbarkeit

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{Σ}$$

Definition ([TSH02])

Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *kontrolliert schwach unbeobachtbar* für Σ, falls

$$\exists T > 0,\ u : \quad y(x_0, u) = 0 \ \text{ and } \ x(T, x_0, u) = 0.$$

$$\mathcal{R}(\Sigma) := \{\ x_0 \mid x_0 \text{ kontrolliert schwach unbeobachtbar } \}.$$

Problem von letzer Folie entspricht $\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) \neq \{0\}$.

Charakterisierung

Theorem (vgl. [EPV09])

Das System (inh. swODE) *ist stark t_S-beobachtbar genau dann, wenn für alle $i \neq j$ gilt:*

$$\mathcal{R}\left(\Sigma_{i,j}\right) = \{0\} \ \wedge \ \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j & \Gamma_i - \Gamma_j\end{bmatrix} = n + \operatorname{rank}\left(\Gamma_i - \Gamma_j\right).$$

Es ist stark (x, σ)-beobachtbar genau dann, wenn für alle $i \neq j$ gilt:

$$\mathcal{R}\left(\Sigma_{i,j}\right) = \{0\} \ \wedge \ \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j & \Gamma_i - \Gamma_j\end{bmatrix} = 2n + \operatorname{rank}\left(\Gamma_i - \Gamma_j\right).$$

$$\Gamma_i := \begin{bmatrix} 0 & & & \\ C_iB_i & 0 & & \\ C_iA_iB_i & C_iB_i & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Starke (x, σ_1)-Beobachtbarkeit

Definition (Starke (x, σ_1)-Beobachtbarkeit)

Für alle σ, $\tilde{\sigma}$, x_0, $\tilde{x}_0$ **und alle** u mit

$$1 \leq \min \left\{ \text{Unstetigkeiten von } \hat{\sigma} \;\middle|\; \hat{\sigma} \overset{x_0,u}{\sim} \sigma \text{ oder } \hat{\sigma} \overset{\tilde{x}_0,u}{\sim} \tilde{\sigma} \right\}$$

gilt

$$\neg \left(x_0 = \tilde{x}_0 \;\wedge\; \sigma \overset{x_0,u}{\sim} \tilde{\sigma} \right) \;\Rightarrow\; y(x_0, \sigma, u) \neq y(\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}, u).$$

Hinreichend für starke (x, σ_1)-Beobachtbarkeit von (inh. swODE) ist

- Für alle $i \neq j$ gilt $\mathcal{R}\left(\Sigma_{i,j}\right) = \{0\}$ und
- für alle $i \neq j$, $p \neq q$, $(i, j) \neq (p, q)$ gilt

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p & \Gamma_i - \Gamma_p \\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q & \Gamma_j - \Gamma_q \end{bmatrix} = 2n + \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \Gamma_i - \Gamma_p \\ \Gamma_j - \Gamma_q \end{bmatrix}.$$

Geschaltete DAEs

$$\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x, \quad x(0) = x_0, \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \tag{swDAE}$$

- (E_i, A_i) regulär für alle $i \to$ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.
- Lösungen sind stückweise glatte Distributionen.
- Konsistenzraum für $\sigma = i$ ist $\mathcal{V}_i^* = \operatorname{im} \Pi_i$.
- Für $\sigma = i$ ist die Lösung beschrieben durch

$$\dot{x} = A_i^{\mathrm{diff}} x, \quad y = C_i^{\mathrm{diff}} x, \quad x(0) = \Pi_i x_0.$$

- Sprung/Impuls bei Schaltung:

$$\begin{aligned} x(t_S^+) &= \Pi_{\sigma(t_S^+)} x(t_S^-), \\ x[t_S] &= -\sum_{k=0}^{n} \left(E_{\sigma(t_S^+)}^{\mathrm{imp}} \right)^{k+1} x(t_S^-) \delta_{t_S}^{(k)}. \end{aligned}$$

Verallgemeinerung von ODE zu DAE: t_S-Beob.

Das System (swODE) ist t_S-beobachtbar genau dann, wenn

$$\operatorname{rank}\left(\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j\right) = n \quad \forall i \neq j.$$

Lemma (t_S-Beobachtbarkeit von (swDAE))

Das System (swDAE) *ist t_S-beobachtbar genau dann, wenn*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{\text{diff}} - \mathcal{O}_j^{\text{diff}} \Pi_i \\ \mathcal{O}_j^{\text{imp}} \Pi_i \end{bmatrix} = \dim \mathcal{V}_i^* \quad \forall i \neq j.$$

Wobei

$$\mathcal{O}_i^{\text{diff}} = \begin{bmatrix} C_i^{\text{diff}} \\ C_i^{\text{diff}} A_i^{\text{diff}} \\ C_i^{\text{diff}} \left(A_i^{\text{diff}}\right)^2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_i^{\text{imp}} = \begin{bmatrix} C_i^{\text{imp}} E_i^{\text{imp}} \\ C_i^{\text{imp}} \left(E_i^{\text{imp}}\right)^2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Verallgemeinerung von ODE zu DAE: (x, σ)-Beob.

Das System (swODE) ist (x, σ)-beobachtbar genau dann, wenn

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j\end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j.$$

Lemma ((x, σ)-Beobachtbarkeit)

Das impulsfreie System (swDAE) *ist* (x, σ)*-beobachtbar genau dann, wenn*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i^{\text{diff}} & \mathcal{O}_j^{\text{diff}}\end{bmatrix} = \dim \mathcal{V}_i^* + \dim \mathcal{V}_j^* \quad \forall i \neq j.$$

Allgemein: Impulse verkleinern Aq̈uivalenzklassen der Schaltsignale und erschweren somit starke (x, σ)-Beobachtbarkeit.
$\Rightarrow$ Zusatzbedingung.

Zusammenfassung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned}$$

σ-Beobachtbarkeit $=$ (x,σ)-Beobachtbarkeit $\Longrightarrow$ (x,σ_1)-Beobachtbarkeit

σ-Beobachtbarkeit $=$ (x,σ)-Beobachtbarkeit $\Downarrow$ klassische Beobachtbarkeit jeder Mode

(x,σ_1)-Beobachtbarkeit $\Downarrow$ t_S-Beobachtbarkeit

Referenzen

E. Elhamifar, M. Petreczky, and R. Vidal,
Rank Test for the Observability of Discrete-Time Jump Linear Systems with Inputs, *American Control Conference*, 3025-3032, 2009.

M. Kaba,
Applications of geometric control: Constrained systems and switched systems, 2014.

H. Trentelman, A. Stoorvogel, and M. Hautus,
Control theory for linear systems, Springer, 2002

R. Vidal, A. Chiuso, S. Soatto, and S. Sastry,
Observability of Linear Hybrid Systems, *Hybrid systems: Computation and control*, 526–539, 2003, Springer.