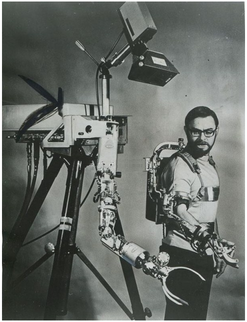
Small-gain Theoreme für Teleoperatoren-Netzwerke mit Zeitverzögerungen

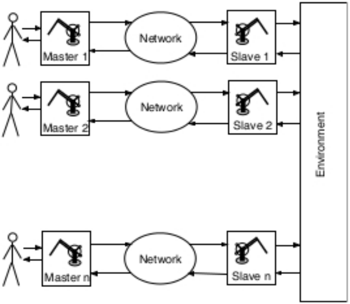
Bernd Nieberding

Elgersburg Workshop 2016

9. Februar 2016

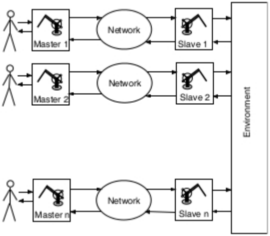
Was sind Teleoperatoren?





- Teleoperator = ferngesteuertes technisches Gerät
- Hier: Gerät liefert haptisches Feedback.
- 1945: Rudimentärer Teleoperator zur Bearbeitung von radioaktivem Material.
- Weitere Anwendungen: Militär (Drohnen), Medizin (Chirurgie).

Analytische Probleme



Typisches Framework: Passivität.

Problem: Passivität nicht gewährleistet, wenn

- Mehrere Kommunikationskanäle mit zeitvariablen Totzeiten,
- Slave-Operatoren unterschiedlich groß.

Lösungsansatz: Small-gain Methoden
(Polushin et. al 2013, Trajektorien-Gains).

Notation

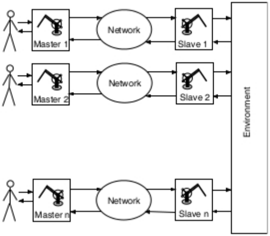
- $t_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, so dass
  für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_1 \leq t_2$:
  $$t_d(t_2) - t_d(t_1) \leq t_2 - t_1$$
  und
  $$\lim_{t\to\infty} t - t_d(t) = \infty.$$
- ¨t_d-Historie¨ von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,
  $g^d(t) := \{g(s) \in \mathbb{R}^n \mid s \in [t - t_d(t), t]\}$.
- $I_d(t) := [t - t_d(t), t]$
- $|\cdot|$ Euklidische Norm
- $\|f\|_A^c := \sup_{x\in A} |f(x)|, \qquad \|g^d\|_c = \|g\|_{I_d(t)}^c,$
- $\|f\|_A^\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in A} |f(x)|, \qquad \|g^d\|_\infty = \|g\|_{I_d(t)}^\infty.$

Vergleichsfunktionen

Definition

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &:= \{\gamma : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ \mid \gamma(0) = 0 \ \wedge \ \gamma(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}\}\,, \\
\mathcal{G} &:= \{\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+) \mid \gamma \text{ streng monoton wachsend}\}\,, \\
\mathcal{K} &:= \{\gamma \in \mathcal{G} \cap \mathcal{P}\}\,, \\
\mathcal{K}_\infty &:= \left\{\gamma \in \mathcal{K} \mid \gamma(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty\right\},
\end{aligned}
$$

FACHHOCHSCHULE ERFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



- Betrachten Teilsysteme Σ_i, beschrieben durch FDEs:

$$\Sigma_i: \qquad \dot{x}_i = f_i\left(x_i^d, u_i^d, w_i^d\right), \qquad y_i = h_i\left(x_i^d\right), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

- mit Zustand $x_i^d(t) \in C\left(I_{t_d}(t); \mathbb{R}^{n_i}\right)$, Ausgang $y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$,
- Interner Eingang $u_i^d(t) \in \mathcal{L}^\infty\left(I_{t_d}(t); \mathbb{R}^{m_i}\right)$, externer Eingang $w_i^d(t) \in \mathcal{L}^\infty\left(I_{t_d}(t); \mathbb{R}^{q_i}\right)$,
- f_i, h_i Lipschitz-stetige Funktionale.
- $f_i(0) = 0$, $h_i(0) = 0$, $h_i(x_i^d) = 0$ für $t - d(t) \leq 0$

System Restriktionen

Σ_i: physikalische/mechanische Restriktionen bzgl. der Eingänge (Ausgänge):

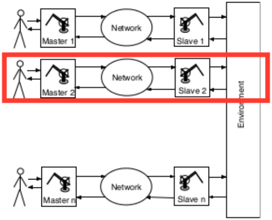
Annahme (Eingangs-Beschränkungen)

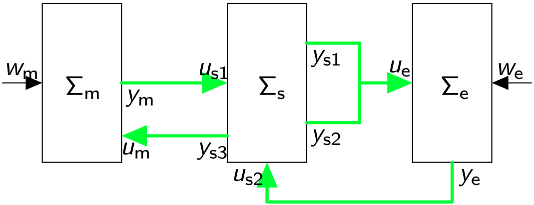
Es existieren $\Delta_{x_i}, \Delta_{u_{ij}}, \Delta_{w_i} \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, so dass:

$$\|x^d(0)\|_c \leq \Delta_{x_i}, \quad \|u_{ij}^d\|_{\mathbb{R}_+}^{\infty} \leq \Delta_{u_{ij}}, \quad \|w_i^d\|_{\mathbb{R}_+}^{\infty} \leq \Delta_{w_i}.$$

“Stabilität“ von Σ muss unter diesen Bedingungen gewährleistet werden.

Gekoppeltes System: Voraussetzungen





- Kommunikation zw. j-tem Eingang von Σ_i und k-tem Ausgang von Σ_l:

$$|u_{ij}(t)| \leq \max_{\substack{i \neq l \in \{1,\dots,n\} \\ k \in \{1,\dots,p\}}} \left\{ \mathcal{M}_{ij}^{lk} \left(\left| y_{lk}(t - \tau_{ij}^{lk}(t)) \right| \right) \right\},$$

  $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$,

- Zeitverzögerung $\tau_{ij}^{lk} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, Lebesgue-messbar,
- Kommunikations-Gain $\mathcal{M}_{ij}^{lk} \in \mathcal{G} \cup \{0\}$.

FACHHOCHSCHULE ERFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Annahme

$\exists$ stückweise stetige Funktion $\tau^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\tau^*(t_2) - \tau^*(t_1) \leq t_2 - t_1, \; t_2 \leq t_1 \in \mathbb{R}_+,$$

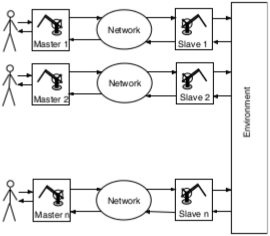
so dass $\forall \; t \geq 0$:

i)

$$\max_{\substack{i \neq l \in \{\mathbf{1},\ldots,N\} \\ j \in \{\mathbf{1},\ldots,M\}, \; k \in \{\mathbf{1},\ldots,P\}}} \tau_{ij}^{lk}(t) \leq \tau^*(t),$$

ii)

$$t - \max_{\substack{i \neq l \in \{\mathbf{1},\ldots,N\} \\ j \in \{\mathbf{1},\ldots,M\}, \; k \in \{\mathbf{1},\ldots,P\}}} \tau_{ij}^{lk}(t) \xrightarrow{t \to \infty} \infty$$



$$\Sigma : \qquad \dot{x} = f(x^d, u^d, w^d) := \left(f_i\left(x_i^d, u_i^d, w_i^d\right)\right)_{i=1}^n, \quad y = h(x^d)$$

mit

$$x^d = \left(\left(x_1^d\right)^\top, \ldots, \left(x_N^d\right)^\top\right)^\top, \qquad y = \left(y_1^\top, \ldots, y_N^\top\right)^\top,$$

$$u^d = \left(\left(u_1^d\right)^\top, \ldots, \left(u_n^d\right)^\top\right)^\top, \qquad w^d = \left(\left(w_1^d\right)^\top, \ldots, \left(w_n^d\right)^\top\right)^\top,$$

$$h = \left(h_1^\top, \ldots, h_N^\top\right)^\top.$$

Definition (Karafyllis, Pepe, Jiang 2008)

Σ ist Eingangs-Ausgangs-stabil (IOS), wenn $\exists\ \sigma \in \mathcal{KL}, \gamma_u \in \mathcal{K}, \gamma_w \in \mathcal{K}$:

$$|y(t)| \leq \max\{\beta(\|x(0)^d\|_c, t), \gamma_u(\|u^d\|_{\mathbb{R}^+}^{\infty}), \gamma_w(\|w^d\|_{\mathbb{R}^+}^{\infty})\}$$

Theorem (Karafyllis, Pepe, Jiang 2008)

Σ *ist IOS* $\Leftrightarrow$ *es existiert ein IOS Lyapunov-Krasovskii-Funktional.*

FACHHOCHSCHULE ERFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Definition

$V_i : \mathcal{C}\left(I_d(t), \mathbb{R}^{n_i}\right) \to R_+$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, local Lipschitz-stetig, heißt *IOpS-Lyapunov-Funktional* für Σ_i, wenn:

i) $\exists\ \underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i \in \mathcal{K}_\infty$:

$$\underline{\alpha}_i\left(|h_i(x_i^d)|\right) \le V(x_i^d) \le \overline{\alpha}_i\left(\|x_i^d\|_c)\right),$$

$\forall\ x_i^d \in \mathcal{C}\left(I_d(t), \mathbb{R}^{n_i}\right)$.

ii) $\exists\ \gamma_{ij}^u, \gamma_i^w \in \mathcal{K}_\infty$, $j = 1, \ldots, M_i$, $\gamma_{ij}^u \equiv 0$, $M_i < j \le M$ $p_i \in \mathbb{R}_+$ und $\alpha_i \in \mathcal{K}$:

$$V_i(x_i^d) \ge \max\left\{\max_{j=1,\ldots,M}\left\{\gamma_{ij}^u\left(\|u_{ij}^d\|_\infty\right)\right\}, \gamma_i^w\left(\|w^d\|_\infty\right), p_i\right\}$$
$$\Rightarrow\ D^+V_i(x_i^d, u_i^d, w^d) \le -\alpha_i\left(V_i\left(x_i^d\right)\right)$$

$\forall\ (x_i^d, u_i^d, w^d) \in \mathcal{C}\left(I_d(t), \mathbb{R}^{n_i}\right) \times \mathcal{L}^\infty\left(I_d(t), \mathbb{R}^{m_i}\right) \times \mathcal{L}^\infty\left(I_d(t), \mathbb{R}^q\right)$.

FACHHOCHSCHULE ERFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Lemma (Nieberding 2015)

Sei V_i IOpS-Lyapunov-Krasovskii-Funktional für Σ_i und gilt

$$|u_{ij}(t)| \leq \max_{\substack{i \neq l \in \{1,\dots,n\} \\ k \in \{1,\dots,p\}}} \left\{ \mathcal{M}_{ij}^{lk} \left(\left| y_{lk}(t - \tau_{ij}^{lk}(t)) \right| \right) \right\},$$

dann folgt

$$V_i(x_i^d) \geq \max \left\{ \psi_{i1} \left(V_1(x_1^d) \right), \dots, \psi_{iN} \left(V_N(x_N^d) \right), \gamma_i^w \left(\|w^d\|_\infty \right), p_i \right\}$$
$$\Rightarrow \; D^+ V_i(x_i^d, w^d) \leq -\alpha_i \left(V_i \left(x_i^d \right) \right)$$

$\forall \; (x_i^d, w^d) \in \mathcal{C}\left(I_d(t), \mathbb{R}^{n_i}\right) \times \mathcal{L}^\infty \left(I_d(t), \mathbb{R}^q\right)$, *mit*

$$\psi_{il} \left(V_l \left(x_l^{\tau^*(t)} \right) \right) := \max_{\substack{j \in \{1,\dots,M\} \\ k \in \{1,\dots,P\}}} \gamma_{ij}^u \circ \mathcal{M}_{ij}^{lk} \circ \underline{\alpha}_{lk}^{-1} \left(V_l \left(x_l^{\tau^*(t)} \right) \right).$$

Small-Gain-Bedingung

Gain-Operator $\overline{\Gamma} : \mathbb{R}_+^{N+1} \to \mathbb{R}_+^N$ der gekoppelten Teilsysteme Σ_i

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \\ r \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \max\{\psi_{11}(s_1), \ldots \psi_{1N}(s_N), \gamma_1^w(r)\} \\ \vdots \\ \max\{\psi_{N1}(s_1), \ldots \psi_{NN}(s_N), \gamma_N^w(r)\} \end{bmatrix}$$

und $\Gamma(s) := \overline{\Gamma}(s, 0)$.

Theorem (Rüffer 2007)

Wenn Γ mit $M_\Gamma \in \mathcal{G}^{N\times N}$ die Small-gain-Bedingung

$$\Gamma(s) \not\geq s, \qquad s \in \mathbb{R}_+^N \setminus \{0\}$$

erfüllt, dann $\exists$ Hilfsfunktion $\sigma \in K_\infty^N$ mit ¨guten¨ Eigenschaften.

Lyapunov Funktional für Σ

Theorem (Nieberding 2015)

- *Besitzt jedes Σ_i in Σ ein IOpS-Lyapunov-Krasovskii-Funktional V_i*
- *und erfüllt Γ die Small-gain-Bedingung,*

dann ist das IOpS-Lyapunov-Krasovskii-Funktional für Σ:

$$V\left(x^d\right) := \max_{i=\mathbf{1},\ldots,N} \left\{\sigma_i^{-\mathbf{1}} \circ V_i\left(x_i^d\right)\right\}$$

Theorem (Nieberding 2015)

$\exists \ (\Delta_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}_+^N$, so dass

$$\max_{j=1,\dots,m} \mathcal{M}_{ij}^{lk}(\Delta_i) \leq \Delta_{u_{ij}}, \qquad i = 1, \dots, N$$

und $\Delta := (\underline{\alpha}_i(\Delta_i))_{i=1}^N$ und gilt

$$\Gamma(s) \not\geq s \qquad \forall s \in \mathbb{R}_+^N \setminus \{0\} : s \leq \Delta$$

dann ist

$$V\left(x^d\right) := \max_{i=1,\dots,N} \left\{\sigma_i^{-1} \circ V_i\left(x_i^d\right)\right\}$$

ein <u>lokales</u> IOpS-Lyapunov-Krasovskii-Funktional für Σ unter den Eingangs-Beschränkungen

$$\|u_{ij}^d\|_{\mathbb{R}_+}^{\infty} \leq \Delta_{u_{ij}}.$$

- Gains im IOS-Lyapunov-Theorem (Karafyllis et. al. 2008) sind K_∞ und mit $p_i = 0$,

- Stabilität (WIOpS) in Polushin et. al. 2013 ist schwächer als IOS $\rightarrow$ WIOpS-Lyapunov Theorem.

References

I. Polushin, S.N. Dashkovskiy, A. Takhmar and R.V. Patel. A small gain framework for networked cooperative force-reflecting teleoperation. *Automatica*, 2013.

S. N. Dashkovskiy, B. S. Rüffer, F. R. Wirth. Small Gain Theorems for Large Scale Systems and Construction of ISS Lyapunov Functions *SIAM*, 2010.