

# Balanciertes Abschneiden für DAE-Systeme

Timo Reis    **Olaf Rendel**

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

10. Elgersburg Workshop,  
9. Februar 2016

## DAE-System

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Ex(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

System impulssteuerbar und  $sE - A$  regulär.

## Ziel

Reduziere zu einem kleinen System

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\widehat{E}\widehat{x}(t) &= \widehat{A}\widehat{x}(t) + \widehat{B}u(t), \\ y(t) &= \widehat{C}\widehat{x}(t) + \widehat{D}u(t),\end{aligned}$$

sodass wichtige Eigenschaften erhalten bleiben.

## Balanciertes Abschneiden

### Balanciertes System

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad C_3],$$

$$Q = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Balanciertes Abschneiden

## Balanciertes System

Identifiziere kleine Singulärwerte

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad C_3],$$

$$Q = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Balanciertes Abschneiden

### Balanciertes System

$$\begin{aligned}\widehat{E} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \widehat{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}, \\ \widehat{B} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix}, & \widehat{C} &= [C_1 \quad C_3], \\ \widehat{P} &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \widehat{Q} &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

### Reduziertes System

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \widehat{E} \widehat{x}(t) &= \widehat{A} \widehat{x}(t) + \widehat{B} u(t), \\ y(t) &= \widehat{C} \widehat{x}(t) + D u(t)\end{aligned}$$

## Balancieren

Finde reguläre  $S, T$ , sodass

$$SET = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = T \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^*, \quad Q = S^* \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S.$$

$\Sigma \geq 0$  ist diagonal. Systemgrößen gegeben durch  $(SAT, SB, CT, D, SET)$ .

## Beobachtungen

- Mit  $T = [T_1 \quad T_2]$  und  $S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$  folgt  $\text{im } T_2 = \ker E$  und  $\text{im } S_2^* = \ker E^*$
- $Q = \Pi_{\mathcal{W}}^* Q \Pi_{\mathcal{W}}$  mit Projektor  $\Pi_{\mathcal{W}}$  auf  $\mathcal{W} = \text{im } E$
- $P = \Pi_{\mathcal{W}^*}^* P \Pi_{\mathcal{W}^*}$  mit Projektor  $\Pi_{\mathcal{W}^*}$  auf  $\mathcal{W}^* = \text{im } E^*$

## Anmerkungen zur Numerik

- Bestimmen von  $P$  und  $Q$  ist möglich wenn der Rang numerisch klein ist
- $P$  und  $Q$  gegeben durch Cholesky-Faktoren:  
 $Q \approx R_q^* R_q$  und  $P \approx R_p R_p^*$  [R., Reis 2016]
- $S_1$  und  $T_1$  durch Singulärwertzerlegung von  $R_q E R_p$  bestimmbar

## Systemräume $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}$

**Behavior**  $\mathfrak{B}_{[E,A,B]} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}^{n+m}) : \frac{d}{dt} Ex = Ax + Bu \right\}$

**Systemraum**  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$  ist der kleinste Unterraum für den

$\mathfrak{B}_{[E,A,B]} \subseteq \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}, \mathcal{V})$  gilt.

$\tilde{\mathcal{V}}$  ist der kleinste Unterraum für den  $\mathfrak{B}_{[E,A]} \subseteq \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{V}})$  gilt.

## Impulssteuerbar

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : Ax + Bu \in \text{im } E \right\}$$

$\mathcal{V}^*$  und  $\tilde{\mathcal{V}}^*$ : Die Räume des „dualen Systems“  $\frac{d}{dt} E^* x(t) = A^* x(t) + C^* u(t)$ .

## Notation

$$F =_{\mathcal{V}} G \quad \Leftrightarrow \quad x^* F x = x^* G x \quad \forall x \in \mathcal{V}$$



# Lyapunov-Balancierung

## Annahmen

System impulssteuerbar,  $sE - A$  regulär und asymptotisch stabil.

## Lyapunovgleichungen für DAE-Systeme

$$\begin{aligned} A^*QE + E^*QA + C^*C &= \tilde{\gamma} \, 0, & Q &= \Pi_{\mathcal{W}}^* Q \Pi_{\mathcal{W}} \\ APE^* + EPA^* + BB^* &= \tilde{\gamma}^* \, 0, & P &= \Pi_{\mathcal{W}^*}^* P \Pi_{\mathcal{W}^*} \end{aligned}$$

## Schranke für das balancierte Abschneiden

$$\|G - \hat{G}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 2 \operatorname{trace} \Sigma_2$$

## Beschränkt reelle Balancierung I

### Annahmen

System ist impulssteuerbar,  $sE - A$  regulär und beschränkt reell.

beschränkt reell  $\Leftrightarrow \|y\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^2} \Leftrightarrow I - G(\lambda)^* G(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}_+$

### Beschränkt reelle Lur'e-Gleichungen

$$\begin{bmatrix} A^*QE + E^*QA + C^*C & E^*QB + C^*D \\ B^*QE + D^*C & D^*D - I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_C^* \\ L_C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_C & L_C \end{bmatrix} = \nu 0,$$

$$\Pi_{\mathcal{W}}^* Q \Pi_{\mathcal{W}} = Q$$

$$\begin{bmatrix} APE^* + EPA^* + BB^* & EPC^* + BD^* \\ CPE^* + DB^* & DD^* - I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_B \\ L_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_B \\ L_B \end{bmatrix}^* = \nu^* 0,$$

$$\Pi_{\mathcal{W}^*}^* P \Pi_{\mathcal{W}^*} = P$$

## Beschränkt reelle Balancierung II

### Schranke für das balancierte Abschneiden

Mit

$$H(s) = \begin{bmatrix} C \\ K_C \end{bmatrix} (sE - A)^{-1} \begin{bmatrix} B & K_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

$$\hat{H}(s) = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{K}_C \end{bmatrix} (s\hat{E} - \hat{A})^{-1} \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{K}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}(s) & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

gilt

$$\|G - \hat{G}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq \|H - \hat{H}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 2 \operatorname{trace} \Sigma_2.$$

Folgt aus der „Lyapunov-Gleichung in der Lur’e-Gleichung“.

# Gap-Metrik

## Definition

Seien  $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subset X$  Unterräume des Hilbertraums  $X$ . Dann ist die Gap-Metrik  $\widehat{\delta}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  definiert durch

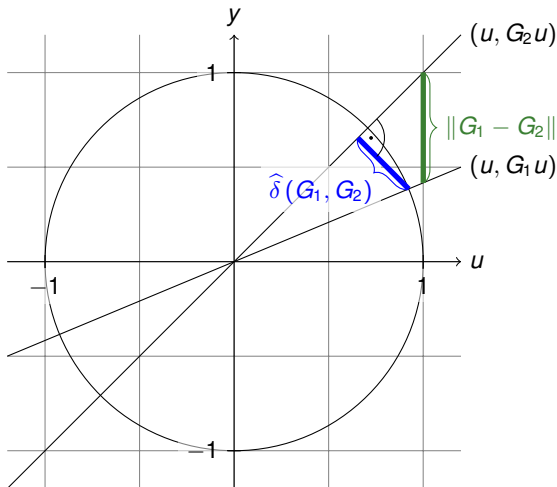
$$\delta(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \max_{v \in \mathcal{V}, \|v\|=1} \min_{w \in \mathcal{W}} \|v - w\|,$$

$$\widehat{\delta}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \max \{ \delta(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \delta(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \}.$$

## Anwendung

Gap-Metrik für Systeme:

$$\widehat{\delta}(G_1, G_2) = \widehat{\delta}(\text{graph } G_1, \text{graph } G_2)$$



- Wenn  $G_1, G_2 \in \mathcal{H}^\infty$  dann  $\hat{\delta}(G_1, G_2) \leq \|G_1 - G_2\|_{\mathcal{H}^\infty}$
- Invariant gegenüber orthogonalen Eingang-Ausgangs-Transformationen

## Möbius-Transformation

Gegeben sei die orthogonale Eingangs-Ausgangs-Transformationen

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(y + u) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y - u) \end{bmatrix}$$

Neue Transferfunktion ergibt sich aus der Möbius-Transformation

$$G(s) \rightarrow \mathcal{M}(G)(s) := (I - G(s))(I + G(s))^{-1}.$$

## Eigenschaften

- Orthogonale Transformation des Graphen des Systems (erhält die Gap-Metrik)
- $G(s)$  ist beschränkt reell  $\Leftrightarrow \mathcal{M}(G)$  ist positiv reell.

# Positiv reelle Balancierung I

## Annahmen

System ist impulssteuerbar,  $sE - A$  regulär und positiv reell.

$$\text{positiv reell} \Leftrightarrow G(\lambda)^* + G(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}_+$$

## Positiv reelle Lur'e-Gleichungen

$$\begin{bmatrix} A^*QE + E^*QA & E^*QB - C^* \\ B^*QE - C & -D^* - D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_C^* \\ L_C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_C & L_C \end{bmatrix} = \nu \cdot 0$$

$$\Pi_{\mathcal{W}}^* Q \Pi_{\mathcal{W}} = Q$$

$$\begin{bmatrix} APE^* + EPA^* & EPC^* - B^* \\ CPE^* - B^* & -D - D^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_B \\ L_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_B \\ L_B \end{bmatrix}^* = \nu^* \cdot 0$$

$$\Pi_{\mathcal{W}^*}^* P \Pi_{\mathcal{W}^*} = P$$

## Positiv reelle Balancierung II

### Schranke für das balancierte Abschneiden

$$\widehat{\delta}(G, \widehat{G}) \leq 2 \operatorname{trace} \Sigma_2.$$

### Beweisskizze

$$\begin{array}{ccc}
 G \text{ (positiv reell)} & \xrightarrow[\text{Abschneiden}]{\text{positiv reelles}} & \widehat{G} \text{ (positiv reell)} \\
 \begin{array}{c} \tilde{u} = \sqrt{2}(y+u) \\ \tilde{y} = \sqrt{2}(y-u) \end{array} \downarrow & & \begin{array}{c} \tilde{u} = \sqrt{2}(y+u) \\ \tilde{y} = \sqrt{2}(y-u) \end{array} \downarrow \\
 G_{\text{BR}} \text{ (beschränkt reell)} & \xrightarrow[\text{Abschneiden}]{\text{beschränkt reelles}} & \widehat{G}_{\text{BR}} \text{ (beschränkt reell)}
 \end{array}$$

Die "Gramschen" bleiben erhalten.

$$\widehat{\delta}(G, \widehat{G}) = \widehat{\delta}(G_{\text{BR}}, \widehat{G}_{\text{BR}}) \leq \|G_{\text{BR}} - \widehat{G}_{\text{BR}}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 2 \operatorname{trace} \Sigma_2$$



## Beispiel für positiv reelle Balancierung

### RC-Netzwerk

Modifizierte Knotenanalyse:

$$E = \begin{bmatrix} A_c C A_c^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -A_r G A_r^* & -A_v \\ A_v^* & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix},$$

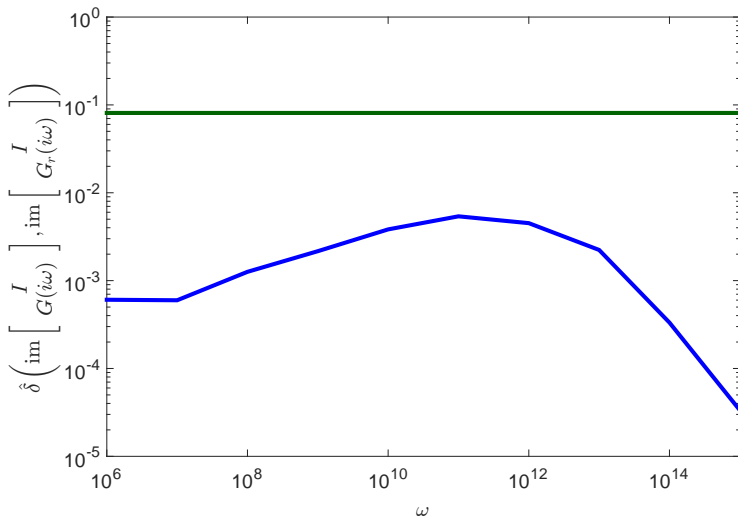
$$C = [0 \quad -I], \quad D = 0$$

### Systemräume bestimmen

Mit  $W = \begin{bmatrix} N_{A_c^*} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  gilt im  $W = \ker E = \ker E^*$  und  $\mathcal{V} = \left( \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix} W \right)^\perp$ .

### Statistiken für das Beispiel

- $E, A \in \mathbb{R}^{2007 \times 2007}$  mit  $\text{nnz}(E) = 2002$  und  $\text{nnz}(A) = 6016$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2007 \times 3}$
- $W \in \mathbb{R}^{2007 \times 5}$ ,  $R_q \in \mathbb{R}^{114 \times 2007}$  und  $R_p \in \mathbb{R}^{2007 \times 114}$
- $\hat{A} \in \mathbb{R}^{28 \times 28}$



## Erweiterung

System nicht impulssteuerbar,  $sE - A$  weiter regulär

- $\mathcal{V}$  berechenbar über Kronecker-Ketten von  $[A \ B] - s[E \ 0]$
- Ersetze  $E$  durch  $\tilde{E} = \Pi_{\mathcal{W}} E$  mit  $\Pi_{\mathcal{W}}$  als Projektor auf  $\mathcal{W} = [E \ 0] \mathcal{V}$
- System mit  $\tilde{E}$  ist impulssteuerbar und hat identisches Behavior