Linear-quadratische Optimalsteuerung differentiell-algebraischer Systeme

Timo Reis

gem. Arbeit mit Achim Ilchmann, Olaf Rendel, Matthias Voigt

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Elgersburg Workshop "Mathematische Systemtheorie"
Elgersburg, 8.2.2016

Inhalt

Einführung

Differentiell-algebraische Systeme (DAEs)

Gegeben sei ein differentiell-algebraisches Steuerungssystem

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

wobei $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(sE - A) \in \mathbb{R}[s] \setminus \{0\}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, Zustand x und Eingang u.

Lösung: $(x, u) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n+m})$ mit $\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$.

Linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem

Minimiere (infimiere) das quadratische Kostenfunktional

$$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

unter der Nebenbedingung (NB) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu$ mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$.

Optimaler Wert

$$\begin{aligned} & V^+(Ex_0) \\ = & \inf \{ \, \mathcal{J}(x,u) \mid (x,u) \text{ ist Lösung mit } Ex(0) = Ex_0 \text{ und } Ex(\infty) = 0 \, \} \, . \end{aligned}$$

Linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem

Minimiere (infimiere) das quadratische Kostenfunktional

$$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

unter der Nebenbedingung (NB) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$.

Optimaler Wert

$$\begin{aligned} &V^+(Ex_0) \\ &= \inf \left\{ \mathcal{J}(x,u) \mid (x,u) \text{ ist Lösung mit } Ex(0) = Ex_0 \text{ und } Ex(\infty) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Fragestellungen

- $-\infty < V^+(Ex_0) < \infty$?
- $\inf = \min$?
- (Wann) ist der Minimierer eindeutig?

Lineare differentiell-algebraische Gleichungen

Beispiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix} u(t)$$

mit Lösung $x_1 = u$, $x_2 = \dot{u}$.

Lineare differentiell-algebraische Gleichungen

Beispiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u(t)$$

mit Lösung $x_1 = u$, $x_2 = \dot{u}$.

Eigenschaften

- Zustand kann Ableitungen des Eingangs enthalten.
- Nicht jeder Wert $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ wird durch irgendeine Lösung (x, u) von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ durchlaufen.

Lineare differentiell-algebraische Gleichungen

Beispiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} u(t)$$

mit Lösung $x_1 = x_2 = 0$, $x_3(t) = x_3(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau$.

Lineare differentiell-algebraische Gleichungen

Beispiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

mit Lösung $x_1 = x_2 = 0$, $x_3(t) = x_3(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau$.

Eigenschaften

- Nicht für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $u \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$, so dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ eine Lösung mit $Ex_0 = Ex(0)$ hat.

Lineare differentiell-algebraische Gleichungen

Systemraum

Der Systemraum $\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}$ ist der kleinste Unterraum von $\mathbb{R}^{n+m}$, so dass für alle Lösungen (x, u) von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ gilt

$$(x(t), u(t)) \in \mathcal{V}^{\mathrm{sys}} \text{ für fast alle } t \in \mathbb{R}.$$

Lineare differentiell-algebraische Gleichungen

Systemraum

Der Systemraum $\mathcal{V}^{\text{sys}}$ ist der kleinste Unterraum von $\mathbb{R}^{n+m}$, so dass für alle Lösungen (x, u) von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ gilt

$$(x(t), u(t)) \in \mathcal{V}^{\text{sys}} \text{ für fast alle } t \in \mathbb{R}.$$

Geometrische Charakterisierung — R., Rendel, Voigt 15

$\mathcal{V}^{\text{sys}}$ ist der Grenzwert der Folge $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0 &= \mathbb{K}^{n+m},\\ \mathcal{V}_{k+1} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+m};\, Ax + Bu \in \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix} \mathcal{V}_k \right\}.\end{aligned}$$

Lineare differentiell-algebraische Gleichungen

Konsistente Anfangswerte

Der Raum der konsistenten differentiellen Anfangswerte ist

$$\mathcal{V}^{\text{diff}} = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu,\ \text{mit } Ex(0) = Ex_0 \text{ besitzt Lösung} \right\}.$$

Zusammenhang zum Systemraum

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{\text{diff}} &= \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists (\bar{x}_0, \bar{u}_0) \in \mathcal{V}^{\text{sys}} :\ Ex_0 = E\bar{x}_0 \right\} \\ &= E^{-1}\left(\begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix} \mathcal{V}^{\text{diff}}\right).\end{aligned}$$

Definition

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ heißt impulssteuerbar, wenn $\mathcal{V}^{\text{diff}} = \mathbb{R}^n$.

Linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem

Minimiere (infimiere)

$$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

unter NB $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$.
Optimaler Wert: $V^+(Ex_0) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definition

- Das Optimalsteuerungsproblem heißt zulässig, wenn für alle $x_0 \in \mathcal{V}^{\mathrm{diff}}$ gilt $-\infty < V^+(Ex_0) < \infty$.
- $u \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$ heißt optimale Steuerung, wenn für (x,u) mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$, $Ex(0) = Ex_0$ gilt

$$Ex(\infty) = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{J}(x,u) = V^+(Ex_0).$$

- Das Optimalsteuerungsproblem heißt regulär, wenn für alle $x_0 \in \mathcal{V}^{\mathrm{diff}}$ eine eindeutige optimale Steuerung existiert.

Beispiel

Minimiere $\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$

unter NB $\dot{x} = -u, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0.$

Beispiel

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \qquad \dot{x} = -u, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0.$$

Beobachtung

- Wenn $x_0 \neq 0$, dann gilt $\mathcal{J}(x,u) > 0$ für alle Lösungen (x,u) mit $x(0) = x_0$.
- Für $u_n = n \cdot \chi_{[0,n^{-1}]} x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(u_n, x_n) = 0$.

Beispiel

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \qquad \dot{x} = -u, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0.$$

Beobachtung

- Wenn $x_0 \neq 0$, dann gilt $\mathcal{J}(x,u) > 0$ für alle Lösungen (x,u) mit $x(0) = x_0$.
- Für $u_n = n \cdot \chi_{[0,n^{-1}]} x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(u_n, x_n) = 0$.

Schlussfolgerung

- Der optimale Wert ist $V^+(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Es existiert keine optimale Steuerung, wenn $x_0 \neq 0$.
  $\Longrightarrow$ Das Optimalsteuerungsproblem ist nicht regulär.

Beispiel

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

Beispiel

Minimiere $$\mathcal{J}(x,u)=\int_0^\infty \begin{pmatrix}x(t)\\u(t)\end{pmatrix}^* \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\u(t)\end{pmatrix} dt$$

unter NB $$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu,\quad Ex(0)=Ex_0,\quad Ex(\infty)=0.$$

Beobachtung

- Es gilt $\mathcal{J}(x,u)=0$ für alle Lösungen (x,u).

Beispiel

Minimiere $\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$

unter NB $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$

Beobachtung

- Es gilt $\mathcal{J}(x,u) = 0$ für alle Lösungen (x,u).

Schlussfolgerung

- Der optimale Wert ist $V^+(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
- Jede Steuerung $u \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$ mit $Ex(\infty) = 0$ ist optimal.
  $\Longrightarrow$ Das Optimalsteuerungsproblem ist nicht regulär.

Satz (Optimalsteuerung von ODEs) WILLEMS 71

Wenn das Optimalsteuerungsproblem

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0$$

regulär ist, dann gilt $R > 0$.
In dem Fall gilt $V^+(x_0) = x_0^* P x_0$, wobei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die stabilisierende Lösung der algebraischen Riccatigleichung (ARE)

$$A^*P + PA - (PB + S)R^{-1}(B^*P + S^*) + Q = 0, \quad P = P^*$$

ist. Die optimale Steuerung ist - falls existent - gegeben durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = Ax + Bu$ mit

$$u = -R^{-1}(B^*P + S^*)x.$$

Beispiel

Minimiere
$$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty x_2^2(t)dt$$

unter NB
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_1(\infty) = 0.$$

Beispiel

Minimiere $$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty x_2^2(t)dt$$

unter NB $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_1(\infty) = 0.$$

Auflösung der algebraischen Nebenbedingung $x_2(t) = u(t)$ ergibt Äquivalenz zum regulären Optimalsteuerungsproblem

Minimiere $$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty u^2(t)dt$$

unter NB $$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad x_1(0) = x_{01}, \quad x_1(\infty) = 0.$$

Beispiel

Minimiere
$$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty x_2^2(t) - \frac{1}{2}u^2(t)dt$$

unter NB
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_1(\infty) = 0.$$

Beispiel

Minimiere $$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty x_2^2(t) - \frac{1}{2}u^2(t)dt$$

unter NB $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_1(\infty) = 0.$$

Auflösung der algebraischen Nebenbedingung $x_2(t) = u(t)$ ergibt Äquivalenz zum regulären Optimalsteuerungsproblem

Minimiere $$\mathcal{J}(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^2(t)dt$$

unter NB $$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad x_1(0) = x_{01}, \quad x_1(\infty) = 0.$$

Optimalsteuerung von DAEs: Zugänge

Verallg. ARE, $R > 0$, $\left[\begin{smallmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{smallmatrix}\right] \geq 0$ — KURINA 96, TAKABA ET AL 02

$V^+(Ex_0) = x_0^* P^* E x_0$ mit

$$A^* P + P^* A - (P^* B + S) R^{-1} (B^* P + S^*) + Q = 0, \quad E^* P = P^* E.$$

Verallg. ARE, $R > 0$, $\left[\begin{smallmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{smallmatrix}\right] \geq 0$ — BENDER, LAUB 86

$V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0$ mit

$$A^* PE + E^* PA - (E^* PB + S) R^{-1} (B^* PE + S^*) + Q = 0, \quad P = P^*.$$

Verallg. ARE, $\left[\begin{smallmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{smallmatrix}\right] \geq 0$ — MEHRMANN 92

Verfahren: Anwendung eines Feedbacks $\rightsquigarrow$ Transformation auf ein äquivalentes ODE-Problem.

Optimaler Wert

$$
\begin{aligned}
& V^+(Ex_0) \\
&= \inf \left\{ \mathcal{J}(x,u) \mid (x,u) \text{ ist Lösung mit } Ex(0) = Ex_0 \text{ und } Ex(\infty) = 0 \right\}.
\end{aligned}
$$

Notwendiges Kriterium für Zulässigkeit

$$V(Ex_0) < \infty \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

genau dann, wenn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ stabilisierbar im Behavior-Sinn ist.
I.e., für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Lösung (x,u) mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$.

Algebraisch:

$$\operatorname{im}(\lambda E - A) + \operatorname{im}(B) = \mathbb{C}^n \quad \text{für alle } \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}.$$

Optimalsteuerung von DAEs

Optimaler Wert

$$V^+(Ex_0) = \inf \{ \mathcal{J}(x,u) \mid (x,u) \text{ ist Lösung mit } Ex(0) = Ex_0 \text{ und } Ex(\infty) = 0 \} .$$

Hinreichendes Kriterium für Zulässigkeit

$$-\infty < V^+(Ex_0) < \infty \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

wenn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu$ stabilisierbar im Behavior-Sinn ist und

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \geq 0.$$

Inhalt

Definition

Eine Funktion $V : E \cdot \mathcal{V}^{\mathrm{diff}} \to \mathbb{R}$ heißt Speicherfunktion für das Optimalsteuerungsproblem

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0,$$

wenn V stetig, $V(0) = 0$ und für alle Lösungen (x,u) gilt

$$V(Ex(t_0)) - V(Ex(t_1)) \leq \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt \quad \forall t_0 \leq t_1.$$

Speicherfunktion

$$\frac{1}{h}\left(V(Ex(t)) - V(Ex(t+h))\right) \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$ und Lösungen (x, u).

Wenn V differenzierbar, dann ergibt Grenzübergang $h \to 0$

$$\begin{aligned} & -(\nabla V(Ex(t)))^*(Ax(t) + Bu(t)) \\ = & -(\nabla V(Ex(t)))^* E\dot{x}(t) \\ \leq & \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \qquad \forall (x_0, u_0) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathrm{sys}} \end{aligned}$$

Speicherfunktion

$$V(Ex(0)) - V(Ex(t)) \leq \int_0^t \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

für alle $t > 0$ und Lösungen (x, u).

Sei (x, u) Lösung mit $Ex(\infty) = 0$.
Grenzübergang $t \to \infty$ ergibt

$$V(Ex(0)) \leq \mathcal{J}(x, u).$$

Folgerung (hinreichendes Kriterium für Zulässigkeit)

Wenn eine Speicherfunktion $V : E\mathcal{V}^{\text{diff}} \to \mathbb{R}$ existiert und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu$ stabilisierbar im Behavior-Sinn ist, dann

$$-\infty < V(Ex_0) \leq V^+(Ex_0) < \infty \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel: *RCL*-Schaltung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} A_C C A_C^* & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_V(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -A_R R^{-1} A_R^* & -A_L & -A_V \\ A_L^* & 0 & 0 \\ A_V^* & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} u_V(t)$$

Kostenfunktional

$$\mathcal{J}(e, i_L, i_V, u_V) = -\int_0^\infty u_V(t)^* i_V(t) dt.$$

Beispiel: *RCL*-Schaltung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} A_C C A_C^* & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_V(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -A_R R^{-1} A_R^* & -A_L & -A_V \\ A_L^* & 0 & 0 \\ A_V^* & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} u_V(t)$$

Kostenfunktional

$$\mathcal{J}(e, i_L, i_V, u_V) = -\int_0^\infty u_V(t)^* i_V(t) dt.$$

Dann gilt

$$-\int_{t_0}^{t_1} u_V(\tau)^T i_V(\tau)\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}\, e(t)^* A_C C A_C^* e(t)|_{t=t_0}^{t=t_f} - \frac{1}{2}\, i_L^*(t) L i_L(t)|_{t=t_0}^{t=t_f} - \int_{t_0}^{t_f} e(\tau)^* A_R(\tau) R^{-1} A_R^* e(\tau) d\tau$$

$$\leq -\frac{1}{2}\, e(t)^* A_C C A_C^* e(t)|_{t=t_0}^{t=t_f} - \frac{1}{2}\, i_L^*(t) L i_L(t)|_{t=t_0}^{t=t_f}$$

Beispiel: *RCL*-Schaltung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} A_C C A_C^* & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_V(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -A_R R^{-1} A_R^* & -A_L & -A_V \\ A_L^* & 0 & 0 \\ A_V^* & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} u_V(t)$$

Kostenfunktional

$$\mathcal{J}(e, i_L, i_V, u_V) = -\int_0^\infty u_V(t)^* i_V(t) dt.$$

Ergo:

$$V(A_C C A_C^* e, L i_L, 0) := -\frac{1}{2} e^* A_C C A_C^* e - \frac{1}{2} i_L^* L i_L$$

ist Speicherfunktion.

Definition (Gleichheit und Definitheit auf Unterraum)

Für symmetrische Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Unterraum $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir

- $P >_{\mathcal{V}} Q$, wenn $x^* P x > x^* Q x$ für alle $x \in \mathcal{V}$;
- $P =_{\mathcal{V}} Q$, wenn $x^* P x = x^* Q x$ für alle $x \in \mathcal{V}$,

sowie analoge Definitionen für $P <_{\mathcal{V}} Q$, $P \leq_{\mathcal{V}} Q$ und $P \geq_{\mathcal{V}} Q$.

Definition (Gleichheit und Definitheit auf Unterraum)

Für symmetrische Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Unterraum $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir

- $P >_{\mathcal{V}} Q$, wenn $x^*Px > x^*Qx$ für alle $x \in \mathcal{V}$;
- $P =_{\mathcal{V}} Q$, wenn $x^*Px = x^*Qx$ für alle $x \in \mathcal{V}$,

sowie analoge Definitionen für $P <_{\mathcal{V}} Q$, $P \leq_{\mathcal{V}} Q$ und $P \geq_{\mathcal{V}} Q$.

Quadratische Speicherfunktionen — R., Rendel, Voigt 15

Für eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $V(Ex_0) = x_0^*E^*PEx_0$ eine Speicherfunktion genau dann, wenn es die differentiell-algebraische Kalman-Yakubovich-Popov-Ungleichung

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} 0.$$

erfüllt.

Quadratische Speicherfunktionen II

Wenn $V(Ex_0) = x_0^* E^* PEx_0$ eine Speicherfunktion ist, dann existieren Matrizen $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $L \in \mathbb{R}^{p\times m}$, so dass

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}.$$

Für eine Lösung (x,u) mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$ gilt dann

$$x_0 E^* P E x_0$$
$$= - \int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x(\tau)E^* P E x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

Für eine Lösung (x, u) mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&x_0 E^* P E x_0 \\
&= -\int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x(\tau)E^* P E x(\tau))\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_0^\infty \dot{x}(\tau)E^* P E x(\tau) + x(\tau)E^* P E \dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Für eine Lösung (x, u) mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
& x_0 E^* P E x_0 \\
&= -\int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x(\tau) E^* P E x(\tau))\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_0^\infty \dot{x}(\tau) E^* P E x(\tau) + x(\tau) E^* P E \dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_0^\infty (Ax(\tau) + Bu(\tau))^* P E x(\tau) + x(\tau) E^* P (Ax(\tau) + Bu(\tau))\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Für eine Lösung (x, u) mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
& x_0 E^* P E x_0 \\
&= -\int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x(\tau)E^* P E x(\tau))\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_0^\infty \dot{x}(\tau)E^* P E x(\tau) + x(\tau)E^* P E \dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_0^\infty (Ax(\tau) + Bu(\tau))^* P E x(\tau) + x(\tau)E^* P(Ax(\tau) + Bu(\tau))\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} -A^* P E - E^* P A & -E^* P B \\ -B^* P E & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Für eine Lösung (x,u) mit $Ex(0)=Ex_0$ und $Ex(\infty)=0$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
&x_0 E^* P E x_0\\
&= -\int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x(\tau)E^*PEx(\tau))\mathrm{d}\tau\\
&= -\int_0^\infty \dot x(\tau)E^*PEx(\tau)+x(\tau)E^*PE\dot x(\tau)\mathrm{d}\tau\\
&= -\int_0^\infty (Ax(\tau)+Bu(\tau))^*PEx(\tau)+x(\tau)E^*P(Ax(\tau)+Bu(\tau))\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^\infty \begin{pmatrix}x(\tau)\\u(\tau)\end{pmatrix}^* \begin{bmatrix}-A^*PE-E^*PA & -E^*PB\\ -B^*PE & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(\tau)\\u(\tau)\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^\infty \begin{pmatrix}x(\tau)\\u(\tau)\end{pmatrix}^* \begin{bmatrix}Q & S\\ S^* & R\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x(\tau)\\u(\tau)\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty \begin{pmatrix}x(\tau)\\u(\tau)\end{pmatrix}^* \begin{bmatrix}K^*K & K^*L\\ L^*K & L^*L\end{bmatrix}^*\begin{pmatrix}x(\tau)\\u(\tau)\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Für eine Lösung (x, u) mit $Ex(0) = Ex_0$ und $Ex(\infty) = 0$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
& x_0 E^* P E x_0 \\
= & -\int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x(\tau)E^* P E x(\tau))\mathrm{d}\tau \\
= & -\int_0^\infty \dot{x}(\tau)E^* P E x(\tau) + x(\tau)E^* P E \dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
= & -\int_0^\infty (Ax(\tau) + Bu(\tau))^* P E x(\tau) + x(\tau)E^* P(Ax(\tau) + Bu(\tau))\mathrm{d}\tau \\
= & \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} -A^*PE - E^*PA & -E^*PB \\ -B^*PE & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
= & \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau - \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} K^*K & K^*L \\ L^*K & L^*L \end{bmatrix}^* \begin{pmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
= & \mathcal{J}(x, u) - \int_0^\infty \|Kx(\tau) + Lu(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Satz — R., Voigt 16

Gegeben sei ein zulässiges Optimalsteuerungsproblem

$$\text{Minimiere}\quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB}\quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

Dann ist die optimale Wertefunktion $V^+(Ex_0)$ eine quadratische Speicherfunktion.

Beweisskizze

Zeige, dass

- V^+ Speicherfunktion ist,
- $V^+(E(x_{10}+x_{20})) + V^+(E(x_{10}-x_{20})) = 2V^+(Ex_{10}) + 2V^+(Ex_{20})$ für alle $x_{10}, x_{20} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{diff}}$,
- $V^+(\lambda Ex_0) = \lambda^2 \cdot V^*(Ex_0)$ für alle $x_0 \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{diff}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Korollar — R., Voigt 16

Sei das System $\frac{d}{dt}Ex = Ax + Bu$ stabilisierbar im Behavior-Sinn. Dann sind äquivalent:

(i) Das Optimalsteuerungsproblem

$$\text{Minimiere}\quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB}\qquad \tfrac{d}{dt}Ex = Ax + Bu,\quad Ex(0) = Ex_0,\quad Ex(\infty) = 0$$

ist zulässig.

(ii) Es existiert eine Speicherfunktion.

(iii) Es existiert eine quadratische Speicherfunktion.

(iv) Die Kalman-Yakubovich-Popov-Ungleichung

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

hat eine Lösung.

Zulässiges Optimalsteuerungsproblem

Minimiere $\mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$

unter NB $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$

$V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0$, wobei

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0 = \mathcal{J}(x,u) - \|Kx + Lu\|^2_{\mathcal{L}^2}.$$

Folgerungen aus

$$V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0 = \mathcal{J}(x,u) - \|Kx + Lu\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

- Infimierende Folge aus Lösungen (x_n, u_n) mit $Ex_n(0) = Ex_0$, $Ex_n(\infty) = 0$ erfüllt

$$\lim_{n \to \infty} \|Kx_n + Lu_n\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 0.$$

- Optimale Steuerung erfüllt die DAE

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ K & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

Inhalt

Definition — ROSENBLUM, ROVNYAK 85

Eine Funktion $G \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ heißt outer, wenn der Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} M_G:\quad \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^m) &\to \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^p),\\ \widehat{u} &\mapsto G(\cdot)\widehat{u}(\cdot) \end{aligned}$$

dichtes Bild hat.

Satz — ROSENBLUM, ROVNYAK 85

Eine Funktion $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m} \cap \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+;\mathbb{C}^{p\times m})$ ist outer genau dann, wenn

$$\operatorname{rk} G(\lambda) = p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Folgerung

Sei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ stabilisierbar im Behavior-Sinn und seien $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Dann ist $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p\times m})$ outer genau dann, wenn

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} -\lambda E + A & B \\ K & L \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Fragestellung

Was bedeutet

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} -\lambda E + A & B \\ K & L \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

wenn $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L \notin \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p\times m})$?

Definition — ILCHMANN, R. 16

Wir nennen eine Funktion $G \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ outer, wenn

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{R}(s)}\, G(s) = p$$

und $G(s)$ keine Nullstellen in $\mathbb{C}_+$ hat.

Korollar — ILCHMANN, R. 16

Sei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ stabilisierbar im Behavior-Sinn. Dann ist $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L$ outer genau dann, wenn

$$\mathrm{rk}\begin{bmatrix} -\lambda E + A & B \\ K & L \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Satz — Ilchmann, R. 16

Sei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ stabilisierbar im Behavior-Sinn und seien $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{p\times m}$.
Wenn $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L$ outer ist, dann gilt

- **O1**: Für alle $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathcal{V}^{\mathrm{diff}}$ existiert ein $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^m)$, so dass $\|Kx + Lu\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon$.

Umgekehrt, wenn **O1** gilt und

$$\begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix} \mathcal{V}^{\mathrm{sys}} = \mathbb{R}^p,$$

dann ist $G(s)$ outer.

Inhalt

Lur'e Gleichung

Gegeben sei das Optimalsteuerungsproblem

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

(P, K, L) heißt Lösung der Lur'e-Gleichung, wenn $P = P^*$ und

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

und

$$\operatorname{rk}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} -sE + A & B \\ K & L \end{bmatrix} = n + p.$$

Lur'e Gleichung

Gegeben sei das Optimalsteuerungsproblem

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

(P, K, L) heißt Lösung der Lur'e-Gleichung, wenn $P = P^*$ und

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

und

$$\operatorname{rk}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} -sE + A & B \\ K & L \end{bmatrix} = n + p.$$

Falls

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} -\lambda E + A & B \\ K & L \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

dann heißt (P, K, L) stabilisierende Lösung.

Fakten

Sei (P, K, L) Lösung der Lur'e-Gleichung.

- Dann erfüllt P die Kalman-Yakubovich-Popov-Ungleichung.
- Für $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L$ gilt $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}(s)}\, G(s) = p$.
- Es gilt die Beziehung

$$x_0^* E^* P E x_0 = \mathcal{J}(x, u) - \|Kx + Lu\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

- Wenn (P, K, L) stabilisierende Lösung ist, dann ist $G(s)$ outer.
- Wenn (P, K, L) stabilisierende Lösung ist, dann gilt

  - **O1**: Für alle $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathcal{V}^{\mathrm{diff}}$ existiert ein $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$, so dass $\|Kx + Lu\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon$.

  Ergo:

  - Für alle $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathcal{V}^{\mathrm{diff}}$ existiert ein $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$, so dass

$$\mathcal{J}(x, u) \geq x_0^* E^* P E x_0 \geq \mathcal{J}(x, u) - \varepsilon^2.$$

Folgerung

Sei (P, K, L) stabilisierende Lösung der Lur'e-Gleichung. Dann ist $V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0$ der optimale Wert.
Aus der Bilanz

$$x_0^* E^* P E x_0 = \mathcal{J}(x, u) - \|Kx + Lu\|_{\mathcal{L}^2}^2$$

folgt: Eine Optimalsteuerung ist Lösung der Optimalitäts-DAE

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ K & L \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

Folgerung

Falls die Optimalitäts-DAE eine eindeutige Lösung für alle $x_0 \in \mathcal{V}^{\mathrm{diff}}$ hat, dann ist das Optimalsteuerungsproblem regulär.

$$\text{regulär} \implies p = m \ \wedge \mathrm{rk}\begin{bmatrix} -\lambda E + A & B \\ K & L \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}.$$

Beispiel

Minimiere $\quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$

unter NB $\quad \dot{x} = -u, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0.$

Beispiel

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \qquad \dot{x} = -u, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0.$$

Lur'e-Gleichung und Optimalitäts-DAE

$(P, K, L) = (0, 1, 0)$ ist stab. Lösung der Lur'e-Gleichung. Also ist die Optimalitäts-DAE

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0.$$

keine Lösung

Zulässiges Optimalsteuerungsproblem

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

Sei $V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0$, wobei

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}.$$

Wegen $V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0 = \mathcal{J}(x,u) - \|Kx + Lu\|^2_{\mathcal{L}^2}$ gilt:

- **O1**: Für alle $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathcal{V}^{\mathrm{diff}}$ existiert ein $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$, so dass

$$\|Kx + Lu\|^2_{\mathcal{L}^2} \leq \varepsilon.$$

Folgerung

Wenn $V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0$ und

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix},$$

dann ist $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L$ outer.

Also ist (P, K, L) stabilisierende Lösung der Lur'e-Gleichung.

Folgerung

Wenn $V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0$ und

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix},$$

dann ist $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L$ outer.

Also ist (P, K, L) stabilisierende Lösung der Lur'e-Gleichung.

Schlussfolgerung

Das Optimalsteuerungsproblem ist genau dann zulässig, wenn die zugehörige Lur'e-Gleichung eine stabilisierende Lösung (P, K, L) hat. In dem Fall gilt

$$V^+(Ex_0) = x_0^* E^* P E x_0.$$

Eine (evtl. vorhandene) Optimalsteuerung erfüllt die Optimalitäts-DAE.

Zusammenhang zur “klassischen Theorie”

Wenn $E = I_n$ und $R > 0$, dann folgt aus

$$\begin{bmatrix} A^*P + PA + Q & PB + S \\ B^*P + S^* & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

die algebraische Riccati-Gleichung

$$A^*P + PA - (PB + S)R^{-1}(B^*P + S^*) + Q = 0.$$

Zusammenhang zur “klassischen Theorie”

Wenn $E = I_n$ und $R > 0$, dann folgt aus

$$\begin{bmatrix} A^*P + PA + Q & PB + S \\ B^*P + S^* & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

die algebraische Riccati-Gleichung

$$A^*P + PA - (PB + S)R^{-1}(B^*P + S^*) + Q = 0.$$

Aus der Optimalitäts-DAE

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ K & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0$$

Zusammenhang zur “klassischen Theorie”

Wenn $E = I_n$ und $R > 0$, dann folgt aus

$$\begin{bmatrix} A^*P + PA + Q & PB + S \\ B^*P + S^* & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

die algebraische Riccati-Gleichung

$$A^*P + PA - (PB + S)R^{-1}(B^*P + S^*) + Q = 0.$$

Aus der Optimalitäts-DAE

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ K & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ L^*K & L^*L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

Zusammenhang zur “klassischen Theorie”

Wenn $E = I_n$ und $R > 0$, dann folgt aus

$$\begin{bmatrix} A^*P + PA + Q & PB + S \\ B^*P + S^* & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

die algebraische Riccati-Gleichung

$$A^*P + PA - (PB + S)R^{-1}(B^*P + S^*) + Q = 0.$$

Aus der Optimalitäts-DAE

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ K & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0$$

folgt

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^*P + S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

Zusammenhang zur “klassischen Theorie”

Wenn $E = I_n$ und $R > 0$, dann folgt aus

$$\begin{bmatrix} A^*P + PA + Q & PB + S \\ B^*P + S^* & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

die algebraische Riccati-Gleichung

$$A^*P + PA - (PB + S)R^{-1}(B^*P + S^*) + Q = 0.$$

Aus der Optimalitäts-DAE

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ K & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0$$

folgt

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ R^{-1}(B^*P + S^*) & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \qquad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(\infty) = 0.$$

Inhalt

Lur'e-Gleichungen und Spektralfaktorisierung

Die stabilisierende Lösung der Lur'e-Gleichung

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

realisiert die Spektralfaktorisierung

$$\Pi(s) = G(-\overline{s})^* G(s),$$

mit Spektralfaktor $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L$ und Popov-Funktion

$$\Pi(s) = \begin{bmatrix} (-\overline{s}E - A)^{-1}B \\ I_m \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sE - A)^{-1}B \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}.$$

Lur'e-Gleichungen und Spektralfaktorisierung

Die stabilisierende Lösung der Lur'e-Gleichung

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + Q & E^*PB + S \\ B^*PE + S^* & R \end{bmatrix} =_{\mathcal{V}} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}$$

realisiert die Spektralfaktorisierung

$$\Pi(s) = G(-\overline{s})^* G(s),$$

mit Spektralfaktor $G(s) = K(sE - A)^{-1}B + L$ und Popov-Funktion

$$\Pi(s) = \begin{bmatrix} (-\overline{s}E - A)^{-1}B \\ I_m \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sE - A)^{-1}B \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{m\times m}.$$

Kann benutzt werden für ...

- Inner-Outer-Faktorisierung und normalisierte Koprimfaktorisierungen von Übertragungsfunktionen.
- Lösbarkeitsanalyse der Lur'e-Gleichungen im Frequenzbereich.

Optimalsteuerung auf negativem Zeithorizont

Sei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu$ anti-stabilisierbar im Behavior-Sinn. Das Optimalsteuerungsproblem

$$\text{Maximiere} \quad \mathcal{J}(x,u) = -\int_{-\infty}^{0} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^{*} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^{*} & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{unter NB} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0, \quad Ex(-\infty) = 0.$$

führt auf die anti-stabilisierende Lösung der Lur'e-Gleichungen, d.h.

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} -\lambda E + A & B \\ K & L \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_{-}.$$

Available storage

Das Funktional available storage

$$V_{\mathrm{as}}(x_0) = \sup_{T>0} - \int_0^T \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{mit} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0$$

führt auf Lösungen P der Kalman-Yakubovich-Popov-Ungleichung mit $E^*PE \leq_{\mathcal{V}^{\mathrm{diff}}} 0$. Die Speicherfunktion erfüllt dann

$$V(Ex(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt \quad \forall t_0 \leq t_1.$$

Available storage

Das Funktional available storage

$$V_{\mathrm{as}}(x_0) = \sup_{T>0} -\int_0^T \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\text{mit } \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax + Bu, \quad Ex(0) = Ex_0$$

führt auf Lösungen P der Kalman-Yakubovich-Popov-Ungleichung mit $E^*PE \leq_{\mathcal{V}^{\mathrm{diff}}} 0$. Die Speicherfunktion erfüllt dann

$$V(Ex(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt \quad \forall t_0 \leq t_1.$$

Kann benutzt werden für ...

Dissipativitätsanalyse von DAEs.

Bounded Real Lemma

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA + C^*C & E^*PB + C^*D \\ B^*PE + D^*C & D^*D - I \end{bmatrix} \leq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} 0, \quad E^*PE \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{diff}}} 0.$$

Positive Real Lemma

$$\begin{bmatrix} A^*PE + E^*PA & E^*PB - C^* \\ B^*PE - C & -D^* - D \end{bmatrix} \leq_{\mathcal{V}^{\mathrm{sys}}} 0, \quad E^*PE \geq_{\mathcal{V}^{\mathrm{diff}}} 0.$$

Zusammenfassung

- Linear-quadratische Optimalsteuerung von DAEs
- Speicherfunktionen
- Outer
- Lur'e-Gleichungen