(Bedingt) Regelungsinvariante Varietäten für polynomielle und rationale Feedback-Systeme

Christian Schilli

8. Februar 2016

Elgersburg Workshop

Inhalt

- Invariante Varietäten für autonome Systeme

Inhalt

- Invariante Varietäten für autonome Systeme

- Regelungsinvariante Varietäten:

Inhalt

- Invariante Varietäten für autonome Systeme
- Regelungsinvariante Varietäten:
  - polynomielle/rationale Kontrollsysteme

Inhalt

- Invariante Varietäten für autonome Systeme
- Regelungsinvariante Varietäten:
  - polynomielle/rationale Kontrollsysteme
  - polynomielles/rationales Zustandsfeedback

Inhalt

- Invariante Varietäten für autonome Systeme
- Regelungsinvariante Varietäten:
  - polynomielle/rationale Kontrollsysteme
  - polynomielles/rationales Zustandsfeedback
- Bedingt regelungsinvariante Varietäten: Outputfeedback

Inhalt

- Invariante Varietäten für autonome Systeme
- Regelungsinvariante Varietäten:
  - polynomielle/rationale Kontrollsysteme
  - polynomielles/rationales Zustandsfeedback
- Bedingt regelungsinvariante Varietäten: Outputfeedback

Idee: Verallgemeinerung von regelungsinvarianten Unterräumen

Notationen

- $k, m, n, p \in \mathbb{N}$
- $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ Polynomring
- $Q = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in R, q \neq 0\}$ Quotientenkörper
- $\mathcal{I} = \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$ Ideal von R
- $V = \mathcal{V}(\mathcal{I}) = \{x \in K^n \mid p_i(x) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k\}$ Varietät
- $\mathcal{J}(V) = \{p \in R \mid p(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$ Verschwindungsideal

$$\underline{\text{Annahme:}} \quad \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$$

Falls $h \in R^p$:

- $K[\underline{h}] := K[h_1, \ldots, h_p] \subseteq R$ Unteralgebra
- $K(\underline{h}) := K(h_1, \ldots, h_p) \subseteq Q$ Teilkörper

Invariante Varietäten für autonome Systeme

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

$F \in R^n$ polynomieller Vektor, $x_0 \in K^n$ Anfangswert

Invariante Varietäten für autonome Systeme

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

$F \in R^n$ polynomieller Vektor, $x_0 \in K^n$ Anfangswert

Definition
Es sei $\varphi(t, x_0)$ die Lösung von (1) mit maximalem Existenzintervall $J(x_0)$. Wir nennen $V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$ **invariant** für F, falls

$$x_0 \in V \Rightarrow \varphi(t, x_0) \in V \text{ für alle } t \in J(x_0).$$

Invariante Varietäten für autonome Systeme

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

$F \in R^n$ polynomieller Vektor, $x_0 \in K^n$ Anfangswert

Definition
Es sei $\varphi(t, x_0)$ die Lösung von (1) mit maximalem Existenzintervall $J(x_0)$. Wir nennen $V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$ **invariant** für F, falls

$$x_0 \in V \Rightarrow \varphi(t, x_0) \in V \text{ für alle } t \in J(x_0).$$

Falls $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ invariant für F:

$$F \text{ \textbf{zulässig} für } \mathcal{V}(\mathcal{I}).$$

Modul aller zulässigen Vektorfelder

Gegeben: $\mathcal{I} = \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$ Ideal von R.

Modul aller zulässigen Vektorfelder

Gegeben: $\mathcal{I} = \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$ Ideal von R.

$$\mathcal{M} := \{F \in R^n \mid F \text{ zulässig für } \mathcal{V}(\mathcal{I})\} \subseteq R^n$$

Modul aller zulässigen Vektorfelder

Gegeben: $\mathcal{I} = \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$ Ideal von R.

$$\mathcal{M} := \{F \in R^n \mid F \text{ zulässig für } \mathcal{V}(\mathcal{I})\} \subseteq R^n$$

Satz

Falls $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist invariant für F.*
2. *$Dp_j \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \partial_i p_j \cdot F_i \in \mathcal{I}$ für alle $j = 1, \ldots, k$.*

Modul aller zulässigen Vektorfelder

Gegeben: $\mathcal{I} = \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$ Ideal von R.

$$\mathcal{M} := \{F \in R^n \mid F \text{ zulässig für } \mathcal{V}(\mathcal{I})\} \subseteq R^n$$

ist ein (mit GB berechenbarer) R-Modul

Satz
Falls $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$ *ist invariant für* F.
2. $Dp_j \cdot F = \sum_{i=1}^n \partial_i p_j \cdot F_i \in \mathcal{I}$ *für alle* $j = 1, \ldots, k$.
3. $F \in \mathcal{M}$.

Regelungsinvariante Varietäten

Betrachte polynomielles Kontrollsystem:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \tag{2}$$

$x(\cdot)$ Zustand von (2)	$f \in R^n$ autonomer Teil
$g \in R^{n \times m}$ Steuerungsmatrix	$u(\cdot)$ Inputfunktion
n Anzahl der Zustände	m Anzahl der Inputs

Regelungsinvariante Varietäten

Betrachte polynomielles Kontrollsystem:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \tag{2}$$

$x(\cdot)$ Zustand von (2)

$f \in R^n$ autonomer Teil

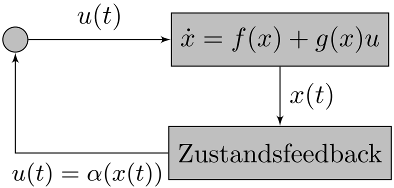
$g \in R^{n \times m}$ Steuerungsmatrix

$u(\cdot)$ Inputfunktion

n Anzahl der Zustände

m Anzahl der Inputs

Idee:
Nutze **Zustandsfeedback** um V invariant für (2) zu machen



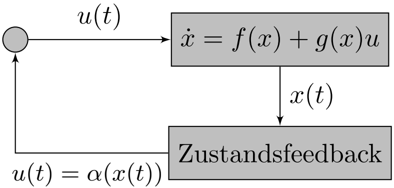
Regelungsinvariante Varietäten

Betrachte polynomielles Kontrollsystem:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \tag{2}$$

$x(\cdot)$ Zustand von (2)	$f \in R^n$ autonomer Teil
$g \in R^{n\times m}$ Steuerungsmatrix	$u(\cdot)$ Inputfunktion
n Anzahl der Zustände	m Anzahl der Inputs

<u>Idee:</u>
Nutze **Zustandsfeedback** um V invariant für (2) zu machen



Definition

Wir nennen eine Varietät V **regelungsinvariant für (2)**, falls es ein Zustandsfeedback $u(t) = \alpha(x(t))$ gibt, so dass $F := f + g\alpha$ zulässig ist für V.

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. α polynomiell, F polynomiell:

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. α polynomiell, F polynomiell:

   $f \in \mathrm{im}_R(g) + \mathcal{M}$?

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. α polynomiell, F polynomiell:

   $f \in \mathrm{im}_R(g) + \mathcal{M}$? $\rightarrow$ GB

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. α polynomiell, F polynomiell:

$$f \in \mathrm{im}_R(g) + \mathcal{M} \text{ ?} \rightarrow \text{GB } \rightarrow \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha\text{?} \end{cases}$$

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. **α polynomiell, F polynomiell:**

$$f \in \mathrm{im}_R(g) + \mathcal{M} \text{ ?} \rightarrow \text{GB} \rightarrow \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha\text{?} \end{cases}$$

2. **α rational, F polynomiell:**

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. α polynomiell, F polynomiell:

   $$f \in \mathrm{im}_R(g) + \mathcal{M} \text{ ?} \to \text{GB} \to \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha\text{?} \end{cases}$$

2. α rational, F polynomiell:

   $$f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M} \text{ ?}$$

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. α polynomiell, F polynomiell:

$$f \in \mathrm{im}_R(g) + \mathcal{M} \ ? \to \text{GB} \ \to \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha? \end{cases}$$

2. α rational, F polynomiell:

$$f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M} \ ? \to \text{GB} \to \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha? \end{cases}$$

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. α polynomiell, F polynomiell:

   $$f \in \mathrm{im}_R(g) + \mathcal{M} \text{ ?} \to \text{GB} \to \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha\text{?} \end{cases}$$

2. α rational, F polynomiell:

   $$f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M} \text{ ?} \to \text{GB} \to \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha\text{?} \end{cases}$$

3. α rational, F rational:

Regelungsinvarianz: 3 Fälle

Ziel: Wähle α, so dass Closed Loop $F = f + g\alpha$ zulässig für V, d.h.

$$f + g\alpha \in \mathcal{M}.$$

1. **α polynomiell, F polynomiell:**

$$f \in \mathrm{im}_R(g) + \mathcal{M} \text{ ?} \to \text{GB} \to \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha\text{?} \end{cases}$$

2. **α rational, F polynomiell:**

$$f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M} \text{ ?} \to \text{GB} \to \begin{cases} \text{Nein: Fertig} \\ \text{Ja: Nicht-Eindeutigkeit } \alpha\text{?} \end{cases}$$

3. **α rational, F rational:**

Existiert $\alpha = \frac{n}{d} \in Q^m$, so dass $\begin{cases} fd + gn \in \mathcal{M} \text{ und} \\ d \notin \mathcal{I} \text{ ?} \end{cases}$

Fall 1: Polynomielles Zustandsfeedback

Regelungsinvarianz: Existiert $\alpha \in R^m$ so dass $f + g\alpha \in \mathcal{M}$?

Fall 1: Polynomielles Zustandsfeedback

Regelungsinvarianz: Existiert $\alpha \in R^m$ so dass $f + g\alpha \in \mathcal{M}$?

Falls ja: Wie nicht-eindeutig ist ein solches α?

Fall 1: Polynomielles Zustandsfeedback

Regelungsinvarianz: Existiert $\alpha \in R^m$ so dass $f + g\alpha \in \mathcal{M}$?

Falls ja: Wie nicht-eindeutig ist ein solches α?

Definition

$$\mathcal{A} := \{\bar{\alpha} \in R^m \mid f + g\bar{\alpha} \in \mathcal{M}\}$$

wird Menge der **zulässigen Zustandsfeedbacks für** V genannt.

Fall 1: Polynomielles Zustandsfeedback

Regelungsinvarianz: Existiert $\alpha \in R^m$ so dass $f + g\alpha \in \mathcal{M}$?

Falls ja: Wie nicht-eindeutig ist ein solches α?

Definition

$$\mathcal{A} := \{\bar{\alpha} \in R^m \mid f + g\bar{\alpha} \in \mathcal{M}\}$$

wird Menge der **zulässigen Zustandsfeedbacks für** V genannt.

Lemma

Es sei $\mathcal{N} := \{\bar{\alpha} \in R^m \mid g\bar{\alpha} \in \mathcal{M}\}$ *(R-Modul).*

Fall 1: Polynomielles Zustandsfeedback

Regelungsinvarianz: Existiert $\alpha \in R^m$ so dass $f + g\alpha \in \mathcal{M}$?

Falls ja: Wie nicht-eindeutig ist ein solches α?

Definition

$$\mathcal{A} := \{\bar{\alpha} \in R^m \mid f + g\bar{\alpha} \in \mathcal{M}\}$$

wird Menge der **zulässigen Zustandsfeedbacks für** V genannt.

Lemma

Es sei $\mathcal{N} := \{\bar{\alpha} \in R^m \mid g\bar{\alpha} \in \mathcal{M}\}$ (R-Modul). Falls $\alpha \in \mathcal{A} \neq \emptyset$:

$$\mathcal{A} = \alpha + \mathcal{N} \quad \text{(“affiner R-Modul”)}$$

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

Es sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $V = \mathcal{V}(p)$, wobei $p = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

Es sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $V = \mathcal{V}(p)$, wobei $p = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Betrachte das polynomielle Kontrollsystem

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u, \text{ mit } f \in R^3 \text{ und } g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

Es sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $V = \mathcal{V}(p)$, wobei $p = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Betrachte das polynomielle Kontrollsystem

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u, \text{ mit } f \in R^3 \text{ und } \; g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Modul $\mathcal{M} = \mathrm{im}_R(M)$ aller zulässigen Vektorfelder von V:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -y & -z & xz & xy & x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ -z & x & 0 & yz & y^2 + z^2 - 1 & 0 \\ y & 0 & x & z^2 - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

Es sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $V = \mathcal{V}(p)$, wobei $p = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Betrachte das polynomielle Kontrollsystem

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u, \text{ mit } f \in R^3 \text{ und } \; g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Modul $\mathcal{M} = \mathrm{im}_R(M)$ aller zulässigen Vektorfelder von V:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -y & -z & xz & xy & x^2+y^2+z^2-1 \\ -z & x & 0 & yz & y^2+z^2-1 & 0 \\ y & 0 & x & z^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g) = R^3$

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

Es sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $V = \mathcal{V}(p)$, wobei $p = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Betrachte das polynomielle Kontrollsystem

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u, \text{ mit } f \in R^3 \text{ und } g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Modul $\mathcal{M} = \mathrm{im}_R(M)$ aller zulässigen Vektorfelder von V:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -y & -z & xz & xy & x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ -z & x & 0 & yz & y^2 + z^2 - 1 & 0 \\ y & 0 & x & z^2 - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g) = R^3$

$\Rightarrow$ Unabhängig von $f \in R^3$ is V regelungsinvariant für (3).

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

$$g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 0 & -y & -z & xz & xy & x^2+y^2+z^2-1 \\ -z & x & 0 & yz & y^2+z^2-1 & 0 \\ y & 0 & x & z^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

$$g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 0 & -y & -z & xz & xy & x^2+y^2+z^2-1 \\ -z & x & 0 & yz & y^2+z^2-1 & 0 \\ y & 0 & x & z^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte zum Beispiel

$$f = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

$$g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 0 & -y & -z & xz & xy & x^2+y^2+z^2-1 \\ -z & x & 0 & yz & y^2+z^2-1 & 0 \\ y & 0 & x & z^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte zum Beispiel

$$f = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{-xy \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - xz \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{\underbrace{x^2}_{=:-\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \, \mathrm{im}_R(g)}.$$

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

$$g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 0 & -y & -z & xz & xy & x^2+y^2+z^2-1 \\ -z & x & 0 & yz & y^2+z^2-1 & 0 \\ y & 0 & x & z^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte zum Beispiel

$$f = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{-xy \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - xz \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{\underbrace{x^2}_{=:-\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{im}_R(g)}.$$

Berechne weiter

$$\mathcal{N} = \{\bar{\alpha} \in R \mid g\bar{\alpha} \in \mathcal{M}\} = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle.$$

Beispiel: Polynomielles Zustandsfeedback

$$g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 0 & -y & -z & xz & xy & x^2+y^2+z^2-1 \\ -z & x & 0 & yz & y^2+z^2-1 & 0 \\ y & 0 & x & z^2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte zum Beispiel

$$f = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{-xy \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - xz \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{\underbrace{x^2}_{=:-\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \, \mathrm{im}_R(g)}.$$

Berechne weiter

$$\mathcal{N} = \{\bar{\alpha} \in R \mid g\bar{\alpha} \in \mathcal{M}\} = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle.$$

Menge aller zulässigen Zustandsfeedbacks (für (f, g)):

$$\mathcal{A} = \alpha + \mathcal{N} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle.$$

Fall 2: Rationales Zustandsfeedback, polynomieller Closed Loop

Erinnerung: $\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid F$ zulässig für $\mathcal{V}(\mathcal{I}))\}$ ist R-Modul!

Fall 2: Rationales Zustandsfeedback, polynomieller Closed Loop

Erinnerung: $\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid F$ zulässig für $\mathcal{V}(\mathcal{I}))\}$ ist R-Modul!

Regelungsinvarianz:

$$\text{Es gibt } \alpha \in Q^m : f + g\alpha \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M}$$

Fall 2: Rationales Zustandsfeedback, polynomieller Closed Loop

Erinnerung: $\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid F \text{ zulässig für } \mathcal{V}(\mathcal{I}))\}$ ist R-Modul!

Regelungsinvarianz:

$$\text{Es gibt } \alpha \in Q^m : f + g\alpha \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M}$$

Satz

1. *Es gibt eine (berechenbare) Matrix $\tilde{g}$ über R, so dass*

$$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(\tilde{g}).$$

Fall 2: Rationales Zustandsfeedback, polynomieller Closed Loop

Erinnerung: $\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid F$ zulässig für $\mathcal{V}(\mathcal{I}))\}$ ist R-Modul!

Regelungsinvarianz:

$$\text{Es gibt } \alpha \in Q^m : f + g\alpha \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M}$$

Satz

1. *Es gibt eine (berechenbare) Matrix $\tilde{g}$ über R, so dass*

$$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(\tilde{g}).$$

2. *Falls* $\ker_Q(g) = \{0\}$

Fall 2: Rationales Zustandsfeedback, polynomieller Closed Loop

Erinnerung: $\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid F \text{ zulässig für } \mathcal{V}(\mathcal{I}))\}$ ist R-Modul!

Regelungsinvarianz:

$$\text{Es gibt } \alpha \in Q^m : f + g\alpha \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M}$$

Satz

1. *Es gibt eine (berechenbare) Matrix $\tilde{g}$ über R, so dass*

$$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(\tilde{g}).$$

2. *Falls $\ker_Q(g) = \{0\}$ und $f + g\alpha \in \mathcal{M}$ für ein $\alpha \in Q^m$,*

Fall 2: Rationales Zustandsfeedback, polynomieller Closed Loop

Erinnerung: $\mathcal{M} = \{F \in R^n \mid F \text{ zulässig für } \mathcal{V}(\mathcal{I}))\}$ ist R-Modul!

Regelungsinvarianz:

$$\text{Es gibt } \alpha \in Q^m : f + g\alpha \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{im}_Q(g) + \mathcal{M}$$

Satz

1. *Es gibt eine (berechenbare) Matrix $\tilde{g}$ über R, so dass*
$$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(\tilde{g}).$$
2. *Falls $\ker_Q(g) = \{0\}$ und $f + g\alpha \in \mathcal{M}$ für ein $\alpha \in Q^m$, dann gibt es $0 \neq d \in R$ und einen R-Modul $\mathcal{N}$, so dass*
$$\mathcal{A} = \{\bar{\alpha} \in Q^m \mid f + g\bar{\alpha} \in \mathcal{M}\} = \underbrace{\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}}_{\text{“affiner, gebrochener } R\text{-Modul”}}$$

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

Sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $\mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle$ mit $p_1 = xy - z,\ p_2 = xz - y$.

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

Sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $\mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle$ mit $p_1 = xy - z,\; p_2 = xz - y$.

Betrachte $V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$ und das polynomielle Kontrollsystem

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix} u = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u. \qquad (4)$$

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

Sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $\mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle$ mit $p_1 = xy - z,\ p_2 = xz - y$.

Betrachte $V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$ und das polynomielle Kontrollsystem

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix} u = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u. \tag{4}$$

Modul $\mathcal{M} = \mathrm{im}_R(M)$ der zulässigen Vektorfelder von V:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & xy - z & xz - y \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

Sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $\mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle$ mit $p_1 = xy - z,\ p_2 = xz - y$.

Betrachte $V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$ und das polynomielle Kontrollsystem

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix} u = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u. \tag{4}$$

Modul $\mathcal{M} = \mathrm{im}_R(M)$ der zulässigen Vektorfelder von V:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & xy - z & xz - y \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $f \notin \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

Sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $\mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle$ mit $p_1 = xy - z,\ p_2 = xz - y$.

Betrachte $V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$ und das polynomielle Kontrollsystem

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix} u = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u. \tag{4}$$

Modul $\mathcal{M} = \mathrm{im}_R(M)$ der zulässigen Vektorfelder von V:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & xy - z & xz - y \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $f \notin \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$

$\Rightarrow$ V nicht regelungsinvariant für (4) mit poly. Zustandsfeedback.

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \qquad p_2 = xz - y, \qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \qquad p_2 = xz - y, \qquad\qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt mit $\alpha = \frac{1}{2z} \cdot \begin{pmatrix} 2x - xz \\ 2y \end{pmatrix}$:

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \qquad p_2 = xz - y, \qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt mit $\alpha = \frac{1}{2z} \cdot \begin{pmatrix} 2x - xz \\ 2y \end{pmatrix}$:

$$f + g\alpha = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ 2z - xy \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M},$$

d.h. $f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \qquad p_2 = xz - y, \qquad\qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt mit $\alpha = \frac{1}{2z} \cdot \begin{pmatrix} 2x - xz \\ 2y \end{pmatrix}$:

$$f + g\alpha = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ 2z - xy \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M},$$

d.h. $f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g) \;\Rightarrow\; V$ regel.inv. mit rat. Zustandsfeedback

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \quad p_2 = xz - y, \qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2-1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt mit $\alpha = \frac{1}{2z} \cdot \begin{pmatrix} 2x - xz \\ 2y \end{pmatrix}$:

$$f + g\alpha = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ 2z - xy \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M},$$

d.h. $f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g) \;\Rightarrow\; V$ regel.inv. mit rat. Zustandsfeedback

Menge der zulässigen rationalen Zustandsfeedbacks:

$$\frac{1}{2z} \cdot \begin{pmatrix} 2x - xz \\ 2y \end{pmatrix} + \mathcal{I} \cdot R^2 + \langle \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{z} \cdot \langle \begin{pmatrix} xy - z \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Fall 3: Rationales Zustandsfeedback, rationaler Closed Loop

Fall 3: Rationales Zustandsfeedback, rationaler Closed Loop

Annahme: $\mathcal{I}$ ist ein Primideal (oder $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist irreduzibel)

Fall 3: Rationales Zustandsfeedback, rationaler Closed Loop

<u>Annahme:</u> $\mathcal{I}$ ist ein Primideal (oder $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist irreduzibel)

Satz

Es seien $d \in R \setminus \{0\}$ und $F \in R^n$. Äquivalent:

1. *$\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist invariant für $\dot{x} = \frac{1}{d} \cdot F$.*

Fall 3: Rationales Zustandsfeedback, rationaler Closed Loop

Annahme: $\mathcal{I}$ ist ein Primideal (oder $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist irreduzibel)

Satz

Es seien $d \in R \setminus \{0\}$ und $F \in R^n$. Äquivalent:

1. *$\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist invariant für $\dot{x} = \frac{1}{d} \cdot F$.*
2. *$F \in \mathcal{M}$ und $d \notin \mathcal{I}$.*

Fall 3: Rationales Zustandsfeedback, rationaler Closed Loop

Annahme: $\mathcal{I}$ ist ein Primideal (oder $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist irreduzibel)

Satz

Es seien $d \in R \setminus \{0\}$ und $F \in R^n$. Äquivalent:

1. *$\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist invariant für $\dot{x} = \frac{1}{d} \cdot F$.*
2. *$F \in \mathcal{M}$ und $d \notin \mathcal{I}$.*

Regelungsinvarianz: Sei $\alpha = \frac{n}{d}$ mit $n \in R^m$ und $d \in R \setminus \{0\}$:

$$f + g\alpha = f + g \cdot \frac{n}{d} = \frac{fd + gn}{d} \in Q^n.$$

Fall 3: Rationales Zustandsfeedback, rationaler Closed Loop

Annahme: $\mathcal{I}$ ist ein Primideal (oder $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist irreduzibel)

Satz

Es seien $d \in R \setminus \{0\}$ und $F \in R^n$. Äquivalent:

1. *$\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist invariant für $\dot{x} = \frac{1}{d} \cdot F$.*
2. *$F \in \mathcal{M}$ und $d \notin \mathcal{I}$.*

Regelungsinvarianz: Sei $\alpha = \frac{n}{d}$ mit $n \in R^m$ und $d \in R \setminus \{0\}$:

$$f + g\alpha = f + g \cdot \frac{n}{d} = \frac{fd + gn}{d} \in Q^n.$$

Korollar

Es sei $\mathcal{F} := \{(d, n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}\}$.

Fall 3: Rationales Zustandsfeedback, rationaler Closed Loop

Annahme: $\mathcal{I}$ ist ein Primideal (oder $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist irreduzibel)

Satz

Es seien $d \in R \setminus \{0\}$ und $F \in R^n$. Äquivalent:

1. *$\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist invariant für $\dot{x} = \frac{1}{d} \cdot F$.*
2. *$F \in \mathcal{M}$ und $d \notin \mathcal{I}$.*

Regelungsinvarianz: Sei $\alpha = \frac{n}{d}$ mit $n \in R^m$ und $d \in R \setminus \{0\}$:

$$f + g\alpha = f + g \cdot \frac{n}{d} = \frac{fd + gn}{d} \in Q^n.$$

Korollar

Es sei $\mathcal{F} := \{(d, n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}\}$. Dann sind äquivalent:

- *$\mathcal{V}(\mathcal{I})$ ist regelungsinvariant.*
- *$\mathcal{F} \cap (R \setminus \mathcal{I} \times R^m) \neq \emptyset$.*

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \quad p_2 = xz - y, \qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \quad p_2 = xz - y, \qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $d = y \notin \mathcal{I}$,

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \qquad p_2 = xz - y, \qquad\qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $d = y \notin \mathcal{I}$, $n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 - z \\ 2z \end{pmatrix}$ und $\alpha = \frac{n}{d} \in Q^2$:

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \qquad p_2 = xz - y, \qquad\qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 - 1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $d = y \notin \mathcal{I}$, $n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - z \\ 2z \end{pmatrix}$ und $\alpha = \frac{n}{d} \in Q^2$:

$$fd + gn = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2z^2 - 2y^2 \\ 2xy - 2z + z^2 \\ 2y - 2xz + yz \end{pmatrix} = Mv \in \mathcal{M},$$

mit $v = \left(x, 1 + \frac{1}{2}z, 0, -2, 0, -z, y\right)^T$.

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \quad p_2 = xz - y, \qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2-1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $d = y \notin \mathcal{I}$, $n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-z \\ 2z \end{pmatrix}$ und $\alpha = \frac{n}{d} \in Q^2$:

$$fd + gn = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2z^2 - 2y^2 \\ 2xy - 2z + z^2 \\ 2y - 2xz + yz \end{pmatrix} = Mv \in \mathcal{M},$$

mit $v = (x, 1 + \frac{1}{2}z, 0, -2, 0, -z, y)^T$.

Also V regelungsinvariant mit rationalem Zustandsfeedback $\alpha = \frac{n}{d}$.

Beispiel: Rationales Zustandsfeedback

$$p_1 = xy - z, \qquad p_2 = xz - y, \qquad \mathcal{I} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^2-1 & p_1 & p_2 \\ y & z & xz & z & 0 & 0 & 0 \\ z & y & z & xz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $d = y \notin \mathcal{I}$, $n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-z \\ 2z \end{pmatrix}$ und $\alpha = \frac{n}{d} \in Q^2$:

$$fd + gn = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2z^2 - 2y^2 \\ 2xy - 2z + z^2 \\ 2y - 2xz + yz \end{pmatrix} = Mv \in \mathcal{M},$$

mit $v = (x, 1 + \frac{1}{2}z, 0, -2, 0, -z, y)^T$.

Also V regelungsinvariant mit rationalem Zustandsfeedback $\alpha = \frac{n}{d}$.

Bemerkung: Da $f + g\alpha \notin R^3 \to \alpha$ nicht in Fall 2 entdeckt.

Bedingt regelungsinvariante Varietäten

Polynomielles Kontrollsystem mit Output:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad y(t) = h(x(t)) \qquad (5)$$

$y(\cdot)$ Output von (5) $\quad h \in R^p$ Outputfunktion $\quad p$ Anzahl der Outputs

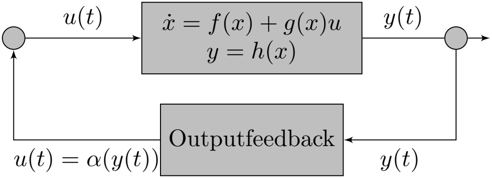
Bedingt regelungsinvariante Varietäten

Polynomielles Kontrollsystem mit Output:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad y(t) = h(x(t)) \qquad (5)$$

$y(\cdot)$ Output von (5) $\quad h \in R^p$ Outputfunktion $\quad p$ Anzahl der Outputs

<u>Idee:</u>
Nutze **Outputfeedback** um V invariant für (5) zu machen



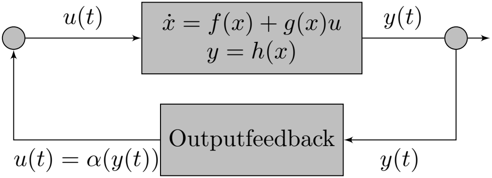
Bedingt regelungsinvariante Varietäten

Polynomielles Kontrollsystem mit Output:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad y(t) = h(x(t)) \qquad (5)$$

$y(\cdot)$ Output von (5) $\quad h \in R^p$ Outputfunktion $\quad p$ Anzahl der Outputs

<u>Idee:</u>
Nutze **Outputfeedback** um V invariant für (5) zu machen



Definition
Wir nennen eine Varietät V **bedingt regelungsinvariant für (5)**, falls V regelungsinvariant ist, und wir ein zulässiges Feedback α finden können, welches nur vom Output y abhängt.

Fall 1: Polynomielles Outputfeedback

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in R^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Fall 1: Polynomielles Outputfeedback

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in R^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zulässigen Feedbacks: $\alpha + \mathcal{N}$ (für einen R-Modul $\mathcal{N}$).

Fall 1: Polynomielles Outputfeedback

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in R^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zulässigen Feedbacks: $\alpha + \mathcal{N}$ (für einen R-Modul $\mathcal{N}$).

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\mathcal{O} := (\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset.$$

Fall 1: Polynomielles Outputfeedback

<u>Ann.:</u> V regelungsinvariant, $\alpha \in R^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zulässigen Feedbacks: $\alpha + \mathcal{N}$ (für einen R-Modul $\mathcal{N}$).

<u>Bedingte Regelungsinvarianz:</u>

$$\mathcal{O} := (\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset.$$

Falls $\alpha^* \in \mathcal{O}$, dann $\mathcal{O} = \alpha^* + (\mathcal{N} \cap K[\underline{h}]^m)$.

Fall 1: Polynomielles Outputfeedback

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in R^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zulässigen Feedbacks: $\alpha + \mathcal{N}$ (für einen R-Modul $\mathcal{N}$).

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\mathcal{O} := (\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset.$$

Falls $\alpha^* \in \mathcal{O}$, dann $\mathcal{O} = \alpha^* + (\mathcal{N} \cap K[\underline{h}]^m)$.

Ohne Details: GB ermöglichen uns die Bestimmung von

1. $\mathcal{N} \cap K[\underline{h}]^m$.
2. Einem partikulären Element $\alpha^* \in \mathcal{O}$.

Fall 1: Polynomielles Outputfeedback

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in R^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zulässigen Feedbacks: $\alpha + \mathcal{N}$ (für einen R-Modul $\mathcal{N}$).

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\mathcal{O} := (\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset \ \checkmark$$

Falls $\alpha^* \in \mathcal{O}$, dann $\mathcal{O} = \alpha^* + (\mathcal{N} \cap K[\underline{h}]^m)$.

Ohne Details: GB ermöglichen uns die Bestimmung von

1. $\mathcal{N} \cap K[\underline{h}]^m$.
2. Einem partikulären Element $\alpha^* \in \mathcal{O}$.

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Bereits berechnet: Menge der zulässigen Zustandsfeedbacks:

$$\mathcal{A} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle = \alpha + \langle p \rangle.$$

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Bereits berechnet: Menge der zulässigen Zustandsfeedbacks:

$$\mathcal{A} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle = \alpha + \langle p \rangle.$$

Entscheide ob V bedingt invariant ist:

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Bereits berechnet: Menge der zulässigen Zustandsfeedbacks:

$$\mathcal{A} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle = \alpha + \langle p \rangle.$$

Entscheide ob V bedingt invariant ist:

$$\mathcal{A} \ni \alpha^* = -x^2 + p = y^2 + z^2 - 1 = h - 1 \in K[h].$$

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Bereits berechnet: Menge der zulässigen Zustandsfeedbacks:

$$\mathcal{A} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle = \alpha + \langle p \rangle.$$

Entscheide ob V bedingt invariant ist:

$$\mathcal{A} \ni \alpha^* = -x^2 + p = y^2 + z^2 - 1 = h - 1 \in K[h].$$

Damit: V in der Tat bedingt regelungsinvariant.

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Bereits berechnet: Menge der zulässigen Zustandsfeedbacks:

$$\mathcal{A} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle = \alpha + \langle p \rangle.$$

Entscheide ob V bedingt invariant ist:

$$\mathcal{A} \ni \alpha^* = -x^2 + p = y^2 + z^2 - 1 = h - 1 \in K[h].$$

Damit: V in der Tat bedingt regelungsinvariant.

Menge der polynomiellen Outputfeedbacks:

$\mathcal{O} = \mathcal{A} \cap K[h]$

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Bereits berechnet: Menge der zulässigen Zustandsfeedbacks:

$$\mathcal{A} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle = \alpha + \langle p \rangle.$$

Entscheide ob V bedingt invariant ist:

$$\mathcal{A} \ni \alpha^* = -x^2 + p = y^2 + z^2 - 1 = h - 1 \in K[h].$$

Damit: V in der Tat bedingt regelungsinvariant.

Menge der polynomiellen Outputfeedbacks:

$$\mathcal{O} = \mathcal{A} \cap K[h] = (\alpha + \langle p \rangle) \cap K[h]$$

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Bereits berechnet: Menge der zulässigen Zustandsfeedbacks:

$$\mathcal{A} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle = \alpha + \langle p \rangle.$$

Entscheide ob V bedingt invariant ist:

$$\mathcal{A} \ni \alpha^* = -x^2 + p = y^2 + z^2 - 1 = h - 1 \in K[h].$$

Damit: V in der Tat bedingt regelungsinvariant.

Menge der polynomiellen Outputfeedbacks:

$$\mathcal{O} = \mathcal{A} \cap K[h] = (\alpha + \langle p \rangle) \cap K[h] = \alpha^* + \langle p \rangle \cap K[h]$$

Beispiel: Polynomielles Outputfeedback

$$V = \mathcal{V}(p), \text{ mit } p = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u, \quad \underline{y} = h(\underline{x}) = y^2 + z^2.$$

Bereits berechnet: Menge der zulässigen Zustandsfeedbacks:

$$\mathcal{A} = -x^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1 \rangle = \alpha + \langle p \rangle.$$

Entscheide ob V bedingt invariant ist:

$$\mathcal{A} \ni \alpha^* = -x^2 + p = y^2 + z^2 - 1 = h - 1 \in K[h].$$

Damit: V in der Tat bedingt regelungsinvariant.

Menge der polynomiellen Outputfeedbacks:

$$\mathcal{O} = \mathcal{A} \cap K[h] = (\alpha + \langle p \rangle) \cap K[h] = \alpha^* + \langle p \rangle \cap K[h] = \{h - 1\}.$$

Fall 2: Rationales Outputfeedback, polynomieller Closed Loop

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in Q^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Fall 2: Rationales Outputfeedback, polynomieller Closed Loop

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in Q^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zul. Feedbacks: $\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}$ ($d \in R$, $\mathcal{N}$ ein R-Modul)

Fall 2: Rationales Outputfeedback, polynomieller Closed Loop

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in Q^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zul. Feedbacks: $\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}$ ($d \in R$, $\mathcal{N}$ ein R-Modul)

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\mathcal{O} := (\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset.$$

Fall 2: Rationales Outputfeedback, polynomieller Closed Loop

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in Q^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zul. Feedbacks: $\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}$ ($d \in R$, $\mathcal{N}$ ein R-Modul)

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\mathcal{O} := (\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset.$$

Falls $\alpha^* \in \mathcal{O}$, dann $\mathcal{O} = \alpha^* + (\frac{1}{d} \cdot \mathcal{N} \cap K(\underline{h})^m)$.

Fall 2: Rationales Outputfeedback, polynomieller Closed Loop

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in Q^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zul. Feedbacks: $\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}$ ($d \in R$, $\mathcal{N}$ ein R-Modul)

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\mathcal{O} := (\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset.$$

Falls $\alpha^* \in \mathcal{O}$, dann $\mathcal{O} = \alpha^* + (\frac{1}{d} \cdot \mathcal{N} \cap K(\underline{h})^m)$.

Problem: Bestimme den Schnitt von "gebrochenem R-Modul" mit einem Teilkörper $K(\underline{h}) \subseteq Q$.

Fall 2: Rationales Outputfeedback, polynomieller Closed Loop

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in Q^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zul. Feedbacks: $\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}$ ($d \in R$, $\mathcal{N}$ ein R-Modul)

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\mathcal{O} := (\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset.$$

Falls $\alpha^* \in \mathcal{O}$, dann $\mathcal{O} = \alpha^* + (\frac{1}{d} \cdot \mathcal{N} \cap K(\underline{h})^m)$.

Problem: Bestimme den Schnitt von "gebrochenem R-Modul" mit einem Teilkörper $K(\underline{h}) \subseteq Q$.

- $p = 1$ (single Output): $\frac{1}{d} \cdot \mathcal{N} \cap K(h)^m$ berechenbar ✓

Fall 2: Rationales Outputfeedback, polynomieller Closed Loop

Ann.: V regelungsinvariant, $\alpha \in Q^m$ zulässiges Zustandsfeedback

Menge der zul. Feedbacks: $\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}$ ($d \in R$, $\mathcal{N}$ ein R-Modul)

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\mathcal{O} := (\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset.$$

Falls $\alpha^* \in \mathcal{O}$, dann $\mathcal{O} = \alpha^* + (\frac{1}{d} \cdot \mathcal{N} \cap K(\underline{h})^m)$.

Problem: Bestimme den Schnitt von "gebrochenem R-Modul" mit einem Teilkörper $K(\underline{h}) \subseteq Q$.

- $p = 1$ (single Output): $\frac{1}{d} \cdot \mathcal{N} \cap K(h)^m$ berechenbar ✓
- $p > 1$ (multi Output): $\frac{1}{d} \cdot \mathcal{N} \cap K(\underline{h})^m = ?$

Fall 3: Rationales Outputfeedback, rationaler Closed Loop

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\{(d,n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}, d \notin \mathcal{I}\} \cap K[\underline{h}]^{1+m} \neq \emptyset.$$

Fall 3: Rationales Outputfeedback, rationaler Closed Loop

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\{(d,n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}, d \notin \mathcal{I}\} \cap K[\underline{h}]^{1+m} \neq \emptyset.$$

1. Berechne $\mathcal{F}^* := \{(d,n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}\} \cap K[\underline{h}]^{1+m}$.

Fall 3: Rationales Outputfeedback, rationaler Closed Loop

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\{(d, n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}, d \notin \mathcal{I}\} \cap K[\underline{h}]^{1+m} \neq \emptyset.$$

1. Berechne $\mathcal{F}^* := \{(d, n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}\} \cap K[\underline{h}]^{1+m}$.
2. Überprüfe, ob

$$\mathcal{D}^* := \text{Ideal der ersten Komponenten von } \mathcal{F}^* \not\subseteq \mathcal{I}.$$

Fall 3: Rationales Outputfeedback, rationaler Closed Loop

Bedingte Regelungsinvarianz:

$$\{(d,n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}, d \notin \mathcal{I}\} \cap K[\underline{h}]^{1+m} \neq \emptyset.$$

1. Berechne $\mathcal{F}^* := \{(d,n) \in R^{1+m} \mid fd + gn \in \mathcal{M}\} \cap K[\underline{h}]^{1+m}$.
2. Überprüfe, ob

$$\mathcal{D}^* := \text{Ideal der ersten Komponenten von } \mathcal{F}^* \not\subseteq \mathcal{I}.$$

✓ (GB)

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Zusammenfassung:

<u>Gegeben:</u> $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \; \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

<u>Voraussetzungen:</u> $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \; \ker_Q(g) = \{0\}, \; \mathcal{I}$ Primideal

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n\times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.		

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$	

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n\times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓

Zusammenfassung:

<u>Gegeben:</u> $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

<u>Voraussetzungen:</u> $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

<u>Betrachte:</u> $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

<u>Start:</u> Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.		

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$	

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$	$(\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset$

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n\times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$ ✓	$(\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset$ $p = 1$ ✓, $p > 1$ ×

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n\times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$ ✓	$(\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset$ $p = 1$ ✓, $p > 1$ ×
α rat., $f + g\alpha$ rat.		

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n\times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$ ✓	$(\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset$ $p = 1$ ✓, $p > 1$ ×
α rat., $f + g\alpha$ rat.	$\mathcal{F} \cap (R \setminus \mathcal{I} \times R^m) \neq \emptyset$	

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n \times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$ ✓	$(\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset$ $p = 1$ ✓, $p > 1$ ×
α rat., $f + g\alpha$ rat.	$\mathcal{F} \cap (R \setminus \mathcal{I} \times R^m) \neq \emptyset$	$\mathcal{F} \cap (K[\underline{h}] \setminus \mathcal{I} \times K[\underline{h}]^m) \neq \emptyset$

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n\times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$ ✓	$(\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset$ $p = 1$ ✓, $p > 1$ ×
α rat., $f + g\alpha$ rat.	$\mathcal{F} \cap (R \setminus \mathcal{I} \times R^m) \neq \emptyset$ ✓	$\mathcal{F} \cap (K[\underline{h}] \setminus \mathcal{I} \times K[\underline{h}]^m) \neq \emptyset$ ✓

Zusammenfassung:

Gegeben: $f \in R^n, \quad g \in R^{n\times m}, \quad h \in R^p, \ \mathcal{I} \subseteq R$ Ideal

Voraussetzungen: $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}, \ \ker_Q(g) = \{0\}, \ \mathcal{I}$ Primideal

Betrachte: $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \ y = h(x), \ V = \mathcal{V}(\mathcal{I})$

Start: Berechne R-Moduln $\mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \mathcal{F}$ mit GB

	Regelungsinvarianz	Bedingte Regelungsinvarianz
α poly., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_R(g)$ ✓	$(\alpha + \mathcal{N}) \cap K[\underline{h}]^m \neq \emptyset$ ✓
α rat., $f + g\alpha$ poly.	$f \in \mathcal{M} + \mathrm{im}_Q(g)$ ✓	$(\alpha + \frac{1}{d} \cdot \mathcal{N}) \cap K(\underline{h})^m \neq \emptyset$ $p = 1$ ✓, $p > 1$ ×
α rat., $f + g\alpha$ rat.	$\mathcal{F} \cap (R \setminus \mathcal{I} \times R^m) \neq \emptyset$ ✓	$\mathcal{F} \cap (K[\underline{h}] \setminus \mathcal{I} \times K[\underline{h}]^m) \neq \emptyset$ ✓

Vielen Dank!