Algebraische Systemtheorie mit Behaviors

Martin Scheicher

Institut für Mathematik, Universität Innsbruck

12. Elgersburg Workshop, 2018

Unterstützt durch das FWF-Projekt P29496.

Überblick

- Algebraisierung in der Systemtheorie
- Die Theorie der Behaviors
- Vernachlässigbare Anteile
- Reglerdesign

Zustandsdarstellung (Kalman, 1963)

Zustandsdarstellung

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Zustandsdarstellung (Kalman, 1963)

Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

bzw. DAE

$$\begin{aligned}E\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Zustandsdarstellung (Kalman, 1963)

Zustandsdarstellung

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

bzw. DAE

$$E\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Wobei: $A,\ B,\ C,\ D,\ (E) \in \mathbb{R}^{\bullet \times \bullet}$ Matrizen von Zahlen

Methoden: Lineare Algebra

Zustandsdarstellung (Kalman, 1963)

Zustandsdarstellung	bzw. DAE
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} E\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Wobei: $A,\ B,\ C,\ D,\ (E) \in \mathbb{R}^{\bullet\times\bullet}$ Matrizen von Zahlen
Methoden: Lineare Algebra

Beispiel: System in Zustandsdarstellung ist *kontrollierbar* $\Longleftrightarrow$

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

$(A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times n})$

Polynomielle Matrizen (Rosenbrock 1966)

Neu: Matrizen von Differentialoperatoren.

Polynomielle Matrizen (Rosenbrock 1966)

Neu: Matrizen von Differentialoperatoren.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 5 = 0 \iff \left(\frac{d^2}{dt^2} - 3\frac{d}{dt} + 5\right) x = 0$$
$$\iff (s^2 - 3s + 5) \circ x = 0$$

wobei $s\circ = \dfrac{d}{dt}$.

Polynomielle Matrizen (Rosenbrock 1966)

Neu: Matrizen von Differentialoperatoren.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 5 = 0 \iff \left(\frac{d^2}{dt^2} - 3\frac{d}{dt} + 5\right)x = 0$$
$$\iff (s^2 - 3s + 5) \circ x = 0$$

wobei $s\circ = \dfrac{d}{dt}$.

System:

$$A \circ x = B \circ u, \qquad y = C \circ x + D \circ u$$

mit $A,\ B,\ C,\ D \in \mathbb{R}[s]^{\bullet\times\bullet}$.

Polynomielle Matrizen (Rosenbrock 1966)

Neu: Matrizen von Differentialoperatoren.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 5 = 0 \iff \left(\frac{d^2}{dt^2} - 3\frac{d}{dt} + 5\right) x = 0$$
$$\iff (s^2 - 3s + 5) \circ x = 0$$

wobei $s\circ = \dfrac{d}{dt}$.

System:

$$A \circ x = B \circ u, \qquad y = C \circ x + D \circ u$$

mit $A,\ B,\ C,\ D \in \mathbb{R}[s]^{\bullet\times\bullet}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} E\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad\iff\quad \begin{aligned} (sE - A) \circ x &= B \circ u \\ y &= C \circ x + D \circ u \end{aligned}$$

Behaviors (Willems 1986)

2 Ideen:

1. Keine Unterscheidung zwischen Ein- und Ausgabe: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = w$

Behaviors (Willems 1986)

2 Ideen:

1. Keine Unterscheidung zwischen Ein- und Ausgabe: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = w$
2. Wichtig: Lösungen.
   Behavior $=$ Lösungsraum eines Systems von Diff.gleichungen.

Behaviors (Willems 1986)

2 Ideen:

1. Keine Unterscheidung zwischen Ein- und Ausgabe: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = w$
2. Wichtig: Lösungen.
   Behavior = Lösungsraum eines Systems von Diff.gleichungen.

Formal:

$\mathbb{R}[s]$ ... Operatorenring, $R \in \mathbb{R}[s]^{k \times l}$

$\mathcal{F}$ ... Signalraum (Modul über $\mathbb{R}[s]$, z.B. $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$)

Behaviors (Willems 1986)

2 Ideen:

1. Keine Unterscheidung zwischen Ein- und Ausgabe: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = w$
2. Wichtig: Lösungen.
   Behavior = Lösungsraum eines Systems von Diff.gleichungen.

Formal:

$\mathbb{R}[s]$ ... Operatorenring, $R \in \mathbb{R}[s]^{k \times l}$
$\mathcal{F}$ ... Signalraum (Modul über $\mathbb{R}[s]$, z.B. $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$)

Behavior $\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\} \subseteq \mathcal{F}^l$ Untermodul

Behaviors (Willems 1986)

2 Ideen:

1. Keine Unterscheidung zwischen Ein- und Ausgabe: $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ u \end{smallmatrix}\right) = w$
2. Wichtig: Lösungen.
   Behavior = Lösungsraum eines Systems von Diff.gleichungen.

Formal:

$\mathbb{R}[s]$ ... Operatorenring, $R \in \mathbb{R}[s]^{k \times l}$

$\mathcal{F}$ ... Signalraum (Modul über $\mathbb{R}[s]$, z.B. $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$)

$$\text{Behavior } \mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\} \subseteq \mathcal{F}^l \text{ Untermodul}$$

Beispiel: $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\quad E\dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du.$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^{n+p+m};\ \begin{pmatrix} sE - A & 0 & -B \\ -C & \mathrm{id}_p & -D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

- Multidimensional Constant Linear Systems (Oberst, 1990)

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

- Multidimensional Constant Linear Systems (Oberst, 1990)
- Lectures on Linear Systems (Oberst, S., Blumthaler, 201?)

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

- Multidimensional Constant Linear Systems (Oberst, 1990)
- Lectures on Linear Systems (Oberst, S., Blumthaler, 201?)

Vergleich:

Gerade im Raum: Parameterform $\leftrightsquigarrow$ implizite Form

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

- Multidimensional Constant Linear Systems (Oberst, 1990)
- Lectures on Linear Systems (Oberst, S., Blumthaler, 201?)

Vergleich:

Gerade im Raum:	Parameterform	$\leftrightsquigarrow$	implizite Form
Lineare Algebra:	Spaltenraum	$\leftrightsquigarrow$	Zeilenraum

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

- Multidimensional Constant Linear Systems (Oberst, 1990)
- Lectures on Linear Systems (Oberst, S., Blumthaler, 201?)

Vergleich:

Gerade im Raum:	Parameterform	$\leftrightsquigarrow$	implizite Form
Lineare Algebra:	Spaltenraum	$\leftrightsquigarrow$	Zeilenraum
Systemtheorie:	Behavior $\mathcal{B}$	$\leftrightsquigarrow$	Gleichungsmodul $\mathrm{U}(\mathcal{B})$

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

- Multidimensional Constant Linear Systems (Oberst, 1990)
- Lectures on Linear Systems (Oberst, S., Blumthaler, 201?)

Vergleich:

Gerade im Raum:	Parameterform	$\leftrightsquigarrow$	implizite Form
Lineare Algebra:	Spaltenraum	$\leftrightsquigarrow$	Zeilenraum
Systemtheorie:	Behavior $\mathcal{B}$	$\leftrightsquigarrow$	Gleichungsmodul $\mathrm{U}(\mathcal{B})$

Gleichungsmodul:

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\}$$

$$\mathrm{U}(\mathcal{B}) = \{\eta \in \mathbb{R}[s]^{1\times l};\ \forall w \in \mathcal{B}:\ \eta \circ w = 0\}$$

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

- Multidimensional Constant Linear Systems (Oberst, 1990)
- Lectures on Linear Systems (Oberst, S., Blumthaler, 201?)

Vergleich:

Gerade im Raum:	Parameterform	$\leftrightsquigarrow$	implizite Form
Lineare Algebra:	Spaltenraum	$\leftrightsquigarrow$	Zeilenraum
Systemtheorie:	Behavior $\mathcal{B}$	$\leftrightsquigarrow$	Gleichungsmodul $\mathsf{U}(\mathcal{B})$

Gleichungsmodul:

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\}$$
$$\mathsf{U}(\mathcal{B}) = \{\eta \in \mathbb{R}[s]^{1\times l};\ \forall w \in \mathcal{B}:\ \eta \circ w = 0\}$$

Klar: $R_{i-} \in \mathsf{U}(\mathcal{B})$. Damit: $\mathbb{R}[s]^{1\times k} R \subseteq \mathsf{U}(\mathcal{B})$.

Abstrakte Algebra (Oberst 1990)

Anwendung der algebraischen Analysis in der Systemtheorie.

- Multidimensional Constant Linear Systems (Oberst, 1990)
- Lectures on Linear Systems (Oberst, S., Blumthaler, 201?)

Vergleich:

Gerade im Raum:	Parameterform	$\longleftrightarrow$	implizite Form
Lineare Algebra:	Spaltenraum	$\longleftrightarrow$	Zeilenraum
Systemtheorie:	Behavior $\mathcal{B}$	$\longleftrightarrow$	Gleichungsmodul $\mathsf{U}(\mathcal{B})$

Gleichungsmodul:

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^{l};\ R \circ w = 0\}$$
$$\mathsf{U}(\mathcal{B}) = \{\eta \in \mathbb{R}[s]^{1\times l};\ \forall w \in \mathcal{B}:\ \eta \circ w = 0\}$$

Klar: $R_{i\_} \in \mathsf{U}(\mathcal{B})$. Damit: $\mathbb{R}[s]^{1\times k} R \subseteq \mathsf{U}(\mathcal{B})$.

Satz: $\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator $\Longrightarrow \mathbb{R}[s]^{1\times k} R = \mathsf{U}(\mathcal{B})$.

Inklusion von Behaviors und Dualität

$\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator.

$$\mathcal{B}_1 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_1 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_1) = \mathbb{R}[s]^{1 \times k_1} R_1,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_2 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_2) = \mathbb{R}[s]^{1 \times k_2} R_2.$$

Inklusion von Behaviors und Dualität

$\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator.

$$\mathcal{B}_1 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_1 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_1) = \mathbb{R}[s]^{1 \times k_1} R_1,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_2 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_2) = \mathbb{R}[s]^{1 \times k_2} R_2.$$

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \iff U(\mathcal{B}_1) \supseteq U(\mathcal{B}_2)$$

Inklusion von Behaviors und Dualität

$\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator.

$$\mathcal{B}_1 = \{w \in \mathcal{F}^l;\; R_1 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_1) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w \in \mathcal{F}^l;\; R_2 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_2) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 &\Longleftrightarrow U(\mathcal{B}_1) \supseteq U(\mathcal{B}_2) \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \supseteq \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2 \end{aligned}$$

Inklusion von Behaviors und Dualität

$\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator.

$$\mathcal{B}_1 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_1 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_1) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_2 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_2) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 &\iff U(\mathcal{B}_1) \supseteq U(\mathcal{B}_2) \\ &\iff \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \supseteq \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2 \\ &\iff \forall j:\ \ (R_2)_{j-} \in \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \end{aligned}$$

Inklusion von Behaviors und Dualität

$\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator.

$$\mathcal{B}_1 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_1 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_1) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_2 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_2) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 &\iff U(\mathcal{B}_1) \supseteq U(\mathcal{B}_2) \\
&\iff \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \supseteq \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2 \\
&\iff \forall j:\ \ (R_2)_{j-} \in \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \\
&\iff \forall j\ \exists \xi^j \in \mathbb{R}[s]^{1\times k_1}:\ \ (R_2)_{j-} = \xi^j R_1
\end{aligned}$$

Inklusion von Behaviors und Dualität

$\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator.

$$\mathcal{B}_1 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_1 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_1) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_2 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_2) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 &\iff U(\mathcal{B}_1) \supseteq U(\mathcal{B}_2) \\
&\iff \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \supseteq \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2 \\
&\iff \forall j:\ \ (R_2)_{j-} \in \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \\
&\iff \forall j\ \exists \xi^j \in \mathbb{R}[s]^{1\times k_1}:\ \ (R_2)_{j-} = \xi^j R_1 \\
&\iff \exists X \in \mathbb{R}[s]^{k_2\times k_1}:\ \ R_2 = X R_1
\end{aligned}$$

Inklusion von Behaviors und Dualität

$\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator.

$$\mathcal{B}_1 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_1 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_1) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_2 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_2) = \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 &\Longleftrightarrow U(\mathcal{B}_1) \supseteq U(\mathcal{B}_2) \\
&\Longleftrightarrow \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \supseteq \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2 \\
&\Longleftrightarrow \forall j:\ (R_2)_{j-} \in \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1 \\
&\Longleftrightarrow \forall j\ \exists \xi^j \in \mathbb{R}[s]^{1\times k_1}:\ (R_2)_{j-} = \xi^j R_1 \\
&\Longleftrightarrow \exists X \in \mathbb{R}[s]^{k_2\times k_1}:\ R_2 = X R_1
\end{aligned}$$

Dualität: Behaviors $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}^l \ \leftrightsquigarrow$ Untermoduln von $\mathbb{R}[s]^{1\times l}$, $l \in \mathbb{N}$.

Inklusion von Behaviors und Dualität

$\mathcal{F}$ injektiver Cogenerator.

$$\mathcal{B}_1 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_1 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_1) = \mathbb{R}[s]^{1 \times k_1} R_1,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R_2 \circ w = 0\}, \quad U(\mathcal{B}_2) = \mathbb{R}[s]^{1 \times k_2} R_2.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 &\iff U(\mathcal{B}_1) \supseteq U(\mathcal{B}_2) \\
&\iff \mathbb{R}[s]^{1 \times k_1} R_1 \supseteq \mathbb{R}[s]^{1 \times k_2} R_2 \\
&\iff \forall j:\ (R_2)_{j-} \in \mathbb{R}[s]^{1 \times k_1} R_1 \\
&\iff \forall j\ \exists \xi^j \in \mathbb{R}[s]^{1 \times k_1}:\ (R_2)_{j-} = \xi^j R_1 \\
&\iff \exists X \in \mathbb{R}[s]^{k_2 \times k_1}:\ R_2 = X R_1
\end{aligned}$$

Dualität: Behaviors $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}^l \ \leftrightsquigarrow$ Untermoduln von $\mathbb{R}[s]^{1 \times l}$, $l \in \mathbb{N}$.
Speziell: $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 \iff R_2 = X R_1$ und $R_1 = Y R_2$
mit $X,\ Y \in \mathbb{R}[s]^{\bullet \times \bullet}$.

Bilder von Behaviors

Beispiele: $(\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_p & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_m \end{pmatrix} \circ : \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} ; \ \begin{pmatrix} sE-A & 0 & -B \\ -C & \mathrm{id}_p & -D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = 0 \right\} &\longrightarrow \mathcal{F}^{p+m}, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} &\longmapsto \left(\begin{smallmatrix} y \\ u \end{smallmatrix} \right).\end{aligned}$$

Bilder von Behaviors

Beispiele: $(\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_p & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_m \end{pmatrix} \circ : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} sE-A & 0 & -B \\ -C & \mathrm{id}_p & -D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = 0 \right\} \longrightarrow \mathcal{F}^{p+m},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & \mathrm{id}_m \end{pmatrix} \circ : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} ; (sE - A) \circ x = B \circ u \right\} \longrightarrow \mathcal{F}^{p+m},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}.$$

Bilder von Behaviors

Beispiele: $(\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_p & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_m \end{pmatrix} \circ\colon \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} sE-A & 0 & -B \\ -C & \mathrm{id}_p & -D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = 0 \right\} \longrightarrow \mathcal{F}^{p+m},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & \mathrm{id}_m \end{pmatrix} \circ\colon \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix};\ (sE - A) \circ x = B \circ u \right\} \longrightarrow \mathcal{F}^{p+m},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}.$$

Allgemein: $P \in \mathbb{R}[s]^{l_2 \times l_1}$

$$P\circ\colon\ \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{F}^{l_2}, \quad w_1 \longmapsto P \circ w_1.$$

- $\mathrm{im}(P) = P \circ \mathcal{B}_1$ ist Behavior.
- $R_2 \in \mathbb{R}[s]^{k_1 \times l_2}$ mit $P \circ \mathcal{B}_1 = \{w_2 \in \mathcal{F}^{l_2};\ R_2 \circ w_2 = 0\}$ kann berechnet werden.

Abbildungen zwischen Behaviors

$\mathcal{B}_i = \{w_i \in \mathcal{F}^{l_i};\ R_i \circ w_i = 0\}$, $i = 1, 2$, und $P \in \mathbb{R}[s]^{l_2 \times l_1}$.

$$P\circ\colon\ \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2, \quad w_1 \longmapsto P \circ w_1,$$

ist wohldefiniert $\iff P \circ \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$

Abbildungen zwischen Behaviors

$\mathcal{B}_i = \{w_i \in \mathcal{F}^{l_i};\ R_i \circ w_i = 0\}$, $i = 1, 2$, und $P \in \mathbb{R}[s]^{l_2 \times l_1}$.

$$P\circ\colon\ \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2, \quad w_1 \longmapsto P \circ w_1,$$

ist wohldefiniert $\iff P \circ \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$

Vergleiche:

- Vektorräume mit linearen Abbildungen,
- topologische Räume mit stetigen Abbildungen.

Abbildungen zwischen Behaviors

$\mathcal{B}_i = \{w_i \in \mathcal{F}^{l_i};\ R_i \circ w_i = 0\}$, $i = 1, 2$, und $P \in \mathbb{R}[s]^{l_2 \times l_1}$.

$$P\circ\colon\ \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2, \quad w_1 \longmapsto P \circ w_1,$$

ist wohldefiniert $\iff P \circ \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$

Vergleiche:

- Vektorräume mit linearen Abbildungen,
- topologische Räume mit stetigen Abbildungen.

Kategorie $\mathrm{syst}_{\mathbb{R}[s]}\mathcal{F}$ der Behaviors:

Objekte: Behaviors

Morphismen: Abbildungen zwischen Behaviors

Verkettung: Hintereinanderausführung $(P_2\circ)(P_1\circ) = (P_2P_1)\circ$.

Der Systemmodul

Behavior	$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\}$
Gleichungsmodul	$U(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times k} R$
Systemmodul	$M(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times l} / U(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times l} / \mathbb{R}[s]^{1\times k} R$

Der Systemmodul

$$
\begin{aligned}
\text{Behavior} \quad & \mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\} \\
\text{Gleichungsmodul} \quad & U(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times k} R \\
\text{Systemmodul} \quad & M(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times l} / U(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times l} / \mathbb{R}[s]^{1\times k} R
\end{aligned}
$$

Abbildungen: $P \in \mathbb{R}[s]^{l_2 \times l_1}$ induziert

$$
\begin{aligned}
(\cdot P)_{\mathrm{ind}}:\ \mathbb{R}[s]^{1\times l_2}/\mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2 &\longrightarrow \mathbb{R}[s]^{1\times l_1}/\mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1, \\
\overline{\eta} &\longmapsto \overline{\eta P},
\end{aligned}
$$

ist wohldefiniert $\Longleftrightarrow \mathbb{R}[s]^{1\times k_2} R_2 P \subseteq \mathbb{R}[s]^{1\times k_1} R_1$

$\Longleftrightarrow \exists X \in \mathbb{R}[s]^{\bullet \times \bullet}:\ R_2 P = X R_1$

Der Systemmodul

$$\begin{aligned}
\text{Behavior} \quad & \mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^{l};\ R \circ w = 0\} \\
\text{Gleichungsmodul} \quad & U(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times k} R \\
\text{Systemmodul} \quad & M(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times l} / U(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[s]^{1\times l} / \mathbb{R}[s]^{1\times k} R
\end{aligned}$$

Abbildungen: $P \in \mathbb{R}[s]^{l_2 \times l_1}$ induziert

$$\begin{aligned}
(\cdot P)_{\mathrm{ind}}:\ \mathbb{R}[s]^{1\times l_2}/\mathbb{R}[s]^{1\times k_2}R_2 &\longrightarrow \mathbb{R}[s]^{1\times l_1}/\mathbb{R}[s]^{1\times k_1}R_1, \\
\overline{\eta} &\longmapsto \overline{\eta P},
\end{aligned}$$

ist wohldefiniert $\Longleftrightarrow \mathbb{R}[s]^{1\times k_2}R_2P \subseteq \mathbb{R}[s]^{1\times k_1}R_1$

$\Longleftrightarrow \exists X \in \mathbb{R}[s]^{\bullet\times\bullet}:\ R_2P = XR_1$

Kategorie der e.e. Moduln der Form $\mathbb{R}[s]^{1\times l}/\mathbb{R}[s]^{1\times k}R$:

Objekte: Moduln $\mathbb{R}[s]^{1\times l}/\mathbb{R}[s]^{1\times k}R$

Morphismen: Abbildungen $(\cdot P)_{\mathrm{ind}}$

Verkettung: Hintereinanderausführung
$(\cdot P_1)_{\mathrm{ind}}\,(\cdot P_2)_{\mathrm{ind}} = (\cdot P_2P_1)_{\mathrm{ind}}.$

Äquivalenz der Kategorien

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{syst}^{\mathrm{op}}_{\mathbb{R}[s]}\mathcal{F} \arrow[rr] & & \left\{ \begin{array}{c} \text{e.e. Moduln der Form} \\ \mathbb{R}[s]^{1\times l}/\mathbb{R}[s]^{1\times k}R \end{array} \right\} \\
\mathcal{B}_1 \arrow[d, "P\circ"] & & M(\mathcal{B}_1) \\
{} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & {} & \\
\mathcal{B}_2 & & M(\mathcal{B}_2) \arrow[uu, "(\cdot P)_{\mathrm{ind}}"']
\end{tikzcd}
$$

Äquivalenz der Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{syst}^{\mathsf{op}}_{\mathbb{R}[s]}\mathcal{F} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{e.e. Moduln der Form} \\ \mathbb{R}[s]^{1\times l}/\mathbb{R}[s]^{1\times k}R \end{array} \right\} \\ \mathcal{B}_1 & & M(\mathcal{B}_1) \\ \Big\downarrow P\circ & \longmapsto & \Big\uparrow (\cdot P)_{\mathsf{ind}} \\ \mathcal{B}_2 & & M(\mathcal{B}_2) \end{array}$$

ist ein kontravarianter Funktor, der Exaktheit erhält und reflektiert,

Äquivalenz der Kategorien

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{syst}^{\mathrm{op}}_{\mathbb{R}[s]}\mathcal{F} \arrow[rr] & & \left\{ \begin{array}{c} \text{e.e. Moduln der Form} \\ \mathbb{R}[s]^{1\times l}/\mathbb{R}[s]^{1\times k}R \end{array} \right\} \\
\mathcal{B}_1 \arrow[d, "P\circ"] & & M(\mathcal{B}_1) \\
{} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & {} & {} \\
\mathcal{B}_2 & & M(\mathcal{B}_2) \arrow[uu, "(\cdot P)_{\mathrm{ind}}"']
\end{tikzcd}
$$

ist ein kontravarianter Funktor, der Exaktheit erhält und reflektiert, d.h., eine Äquivalenz von Kategorien.

Nutzen:

- Schöne Anwendung der Kategorientheorie

Äquivalenz der Kategorien

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{syst}^{\mathrm{op}}_{\mathbb{R}[s]\mathcal{F}} & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{e.e. Moduln der Form}\\ \mathbb{R}[s]^{1\times l}/\mathbb{R}[s]^{1\times k}R\end{array}\right\} \\
\mathcal{B}_1 & & M(\mathcal{B}_1) \\
\big\downarrow P\circ & \longmapsto & \big\uparrow (\cdot P)_{\mathrm{ind}} \\
\mathcal{B}_2 & & M(\mathcal{B}_2)
\end{array}$$

ist ein kontravarianter Funktor, der Exaktheit erhält und reflektiert, d.h., eine Äquivalenz von Kategorien.

Nutzen:

- Schöne Anwendung der Kategorientheorie
- Didaktische Vorteile

Äquivalenz der Kategorien

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{syst}^{\mathsf{op}}_{\mathbb{R}[s]}\mathcal{F} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{e.e. Moduln der Form} \\ \mathbb{R}[s]^{1\times l}/\mathbb{R}[s]^{1\times k}R \end{array} \right\} \\
\mathcal{B}_1 & & M(\mathcal{B}_1) \\
\Big\downarrow P\circ & \longmapsto & \Big\uparrow (\cdot P)_{\mathsf{ind}} \\
\mathcal{B}_2 & & M(\mathcal{B}_2)
\end{array}$$

ist ein kontravarianter Funktor, der Exaktheit erhält und reflektiert, d.h., eine Äquivalenz von Kategorien.

Nutzen:

- Schöne Anwendung der Kategorientheorie
- Didaktische Vorteile
- Klare Schnittstelle zwischen (analytischen) Eigenschaften der Systeme und (algebraischen) Eigenschaften der Gleichungen

Vernachlässigbare Anteile

$$T = \left\{ t \in \mathbb{R}[s];\ V_{\mathbb{C}}(t) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \Re(\lambda) < 0\} \right\}$$

multiplikativ abgeschlossene Menge

Vernachlässigbare Anteile

$$\mathsf{T} = \left\{ t \in \mathbb{R}[s];\ \mathsf{V}_{\mathbb{C}}(t) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \Re(\lambda) < 0\} \right\}$$

multiplikativ abgeschlossene Menge induziert

- $\mathrm{tor}_{\mathsf{T}}(\mathcal{F}) = \{w \in \mathcal{F};\ \exists t \in \mathsf{T}:\ t \circ w = 0\}$ vernachlässigbare Signale (asymptotisch Null)

Vernachlässigbare Anteile

$$\mathsf{T} = \left\{ t \in \mathbb{R}[s];\ V_{\mathbb{C}}(t) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \Re(\lambda) < 0\} \right\}$$

multiplikativ abgeschlossene Menge induziert

- $\mathrm{tor}_{\mathsf{T}}(\mathcal{F}) = \{w \in \mathcal{F};\ \exists t \in \mathsf{T}:\ t \circ w = 0\}$ vernachlässigbare Signale (asymptotisch Null)
- $\mathcal{F}_{\mathsf{T}} = \left\{ \frac{w}{t};\ w \in \mathcal{F},\ t \in \mathsf{T} \right\}$

$$\frac{w_1}{t_1} = \frac{w_2}{t_2} \in \mathcal{F}_{\mathsf{T}} \iff \exists t \in \mathsf{T}:\ t(w_1 t_2 - w_2 t_1) = 0$$

Vernachlässigbare Anteile

$$\mathrm{T} = \left\{ t \in \mathbb{R}[s];\ \mathrm{V}_{\mathbb{C}}(t) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \Re(\lambda) < 0\} \right\}$$

multiplikativ abgeschlossene Menge induziert

- $\mathrm{tor}_{\mathrm{T}}(\mathcal{F}) = \{w \in \mathcal{F};\ \exists t \in \mathrm{T}:\ t \circ w = 0\}$ vernachlässigbare Signale (asymptotisch Null)
- $\mathcal{F}_{\mathrm{T}} = \left\{ \frac{w}{t};\ w \in \mathcal{F},\ t \in \mathrm{T} \right\}$

$$\frac{w_1}{t_1} = \frac{w_2}{t_2} \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}} \iff \exists t \in \mathrm{T}:\ t(w_1 t_2 - w_2 t_1) = 0$$

Speziell:

$$\frac{w_1}{1} = \frac{w_2}{1} \in \mathcal{F}_{\mathrm{T}} \iff \exists t \in \mathrm{T}:\ t(w_1 - w_2) = 0$$

$$\iff w_1 - w_2 \in \mathrm{tor}_{\mathrm{T}}(\mathcal{F})$$

Vernachlässigbare Anteile

$$\mathsf{T} = \left\{ t \in \mathbb{R}[s];\ V_{\mathbb{C}}(t) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \Re(\lambda) < 0\} \right\}$$

multiplikativ abgeschlossene Menge induziert

- $\mathrm{tor}_{\mathsf{T}}(\mathcal{F}) = \{w \in \mathcal{F};\ \exists t \in \mathsf{T}\colon\ t \circ w = 0\}$ vernachlässigbare Signale (asymptotisch Null)
- $\mathcal{F}_{\mathsf{T}} = \left\{ \frac{w}{t};\ w \in \mathcal{F},\ t \in \mathsf{T} \right\}$ steady States

$$\frac{w_1}{t_1} = \frac{w_2}{t_2} \in \mathcal{F}_{\mathsf{T}} \iff \exists t \in \mathsf{T}\colon\ t(w_1 t_2 - w_2 t_1) = 0$$

Speziell:

$$\frac{w_1}{1} = \frac{w_2}{1} \in \mathcal{F}_{\mathsf{T}} \iff \exists t \in \mathsf{T}\colon\ t(w_1 - w_2) = 0$$

$$\iff w_1 - w_2 \in \mathrm{tor}_{\mathsf{T}}(\mathcal{F})$$

Vernachlässigbare Anteile

$$\mathsf{T} = \left\{ \mathsf{t} \in \mathbb{R}[s];\ \mathsf{V}_{\mathbb{C}}(\mathsf{t}) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \Re(\lambda) < 0\} \right\}$$

multiplikativ abgeschlossene Menge induziert

- $\mathrm{tor}_{\mathsf{T}}(\mathcal{F}) = \{w \in \mathcal{F};\ \exists \mathsf{t} \in \mathsf{T}\colon\ \mathsf{t} \circ w = 0\}$ vernachlässigbare Signale (asymptotisch Null)
- $\mathcal{F}_{\mathsf{T}} = \left\{ \frac{w}{\mathsf{t}};\ w \in \mathcal{F},\ \mathsf{t} \in \mathsf{T} \right\}$ steady States

$$\frac{w_1}{\mathsf{t}_1} = \frac{w_2}{\mathsf{t}_2} \in \mathcal{F}_{\mathsf{T}} \iff \exists \mathsf{t} \in \mathsf{T}\colon\ \mathsf{t}(w_1 \mathsf{t}_2 - w_2 \mathsf{t}_1) = 0$$

Speziell:

$$\frac{w_1}{1} = \frac{w_2}{1} \in \mathcal{F}_{\mathsf{T}} \iff \exists \mathsf{t} \in \mathsf{T}\colon\ \mathsf{t}(w_1 - w_2) = 0$$
$$\iff w_1 - w_2 \in \mathrm{tor}_{\mathsf{T}}(\mathcal{F})$$

- Analog: $\mathrm{tor}_{\mathsf{T}}(\mathcal{B})$ ... vernachlässigbarer Anteil
  $\mathcal{B}_{\mathsf{T}} \subseteq \mathcal{F}^{l}_{\mathsf{T}}$ ... steady States

Steady State Behaviors

$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\} \longmapsto \mathcal{B}_T = \left\{\frac{w}{t} \in \mathcal{F}_T^l;\ R \circ \frac{w}{t} = 0\right\}$
Gleichungen bleiben gleich, aber Kontext geändert.

Steady State Behaviors

$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\} \longmapsto \mathcal{B}_T = \left\{\frac{w}{t} \in \mathcal{F}_T^l;\ R \circ \frac{w}{t} = 0\right\}$
Gleichungen bleiben gleich, aber Kontext geändert.

$\mathcal{F}_T,\ \mathcal{B}_T$ sind $\mathbb{R}[s]$-Moduln, sogar Moduln über

$$\mathbb{R}[s]_T = \left\{\frac{p}{t};\ p \in \mathbb{R}[s],\ t \in T\right\}$$

Steady State Behaviors

$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\} \longmapsto \mathcal{B}_T = \left\{\frac{w}{t} \in \mathcal{F}_T^l;\ R \circ \frac{w}{t} = 0\right\}$
Gleichungen bleiben gleich, aber Kontext geändert.

$\mathcal{F}_T,\ \mathcal{B}_T$ sind $\mathbb{R}[s]$-Moduln, sogar Moduln über
$$\mathbb{R}[s]_T = \left\{\frac{p}{t};\ p \in \mathbb{R}[s],\ t \in T\right\}$$

$\mathcal{F}_T$ ist injektiver $\mathbb{R}[s]_T$-Cogenerator

Steady State Behaviors

$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{F}^l;\ R \circ w = 0\} \longmapsto \mathcal{B}_T = \left\{\frac{w}{t} \in \mathcal{F}_T^l;\ R \circ \frac{w}{t} = 0\right\}$
Gleichungen bleiben gleich, aber Kontext geändert.

$\mathcal{F}_T,\ \mathcal{B}_T$ sind $\mathbb{R}[s]$-Moduln, sogar Moduln über

$$\mathbb{R}[s]_T = \left\{\frac{p}{t};\ p \in \mathbb{R}[s],\ t \in T\right\}$$

$\mathcal{F}_T$ ist injektiver $\mathbb{R}[s]_T$-Cogenerator, d.h.

$$\begin{array}{ccc}
\text{syst}^{\text{op}}_{\mathbb{R}[s]_T \mathcal{F}_T} & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{e.e. Moduln der Form} \\ \mathbb{R}[s]_T^{1\times l}/\mathbb{R}[s]_T^{1\times k}R\end{array}\right\} \\
\mathcal{B}_{T,1} & & M(\mathcal{B}_{T,1}) \\
\Big\downarrow P\circ & \longmapsto & \Big\uparrow (\cdot P)_{\text{ind}} \\
\mathcal{B}_{T,2} & & M(\mathcal{B}_{T,2})
\end{array}$$

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\mathcal{P}"] & y \arrow[d] & \\
\bullet \arrow[u] & e=y-r \arrow[l, "\mathcal{C}"] & r\in\mathcal{B}_{\mathsf{ref}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\mathcal{P}"] & y \arrow[d] & \\
\bullet \arrow[u] & e{=}y{-}r \arrow[l, "\mathcal{C}"] & r{\in}\mathcal{B}_{\mathsf{ref}} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Annahme: Feedback wohlgestellt.

Ziel: Fehler $e = y_1 - r$ asymptotisch Null.

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\mathcal{P}"] & y \arrow[d] & \\
\bullet \arrow[u] & e{=}y{-}r \arrow[l, "\mathcal{C}"] & r\in\mathcal{B}_{\mathsf{ref}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Annahme: Feedback wohlgestellt.

Ziel: Fehler $e = y_1 - r$ asymptotisch Null.

Daten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right);\ P_1 \circ y_1 = Q_1 \circ u_1\} \\
\mathcal{C} &= \{\left(\begin{smallmatrix} u_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right);\ P_2 \circ y_2 = Q_2 \circ u_2\} \\
\mathcal{B}_{\mathsf{ref}} &= \{r;\ R \circ r = 0\}
\end{aligned}$$

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\mathcal{P}"] & y \arrow[d] & \\ \bullet \arrow[u] & e=y-r \arrow[l, "\mathcal{C}"] & r\in\mathcal{B}_{\mathsf{ref}} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Annahme: Feedback wohlgestellt.

Ziel: Fehler $e = y_1 - r$ asymptotisch Null.

Daten:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{ \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right);\ P_1 \circ y_1 = Q_1 \circ u_1 \} \\ \mathcal{C} &= \{ \left(\begin{smallmatrix} u_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right);\ P_2 \circ y_2 = Q_2 \circ u_2 \} \\ \mathcal{B}_{\mathsf{ref}} &= \{ r;\ R \circ r = 0 \} \\ \mathcal{E} &= \{ y - r;\ \exists u:\ \left(\begin{smallmatrix} y \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P},\ \left(\begin{smallmatrix} y-r \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C},\ r \in \mathcal{B}_{\mathsf{ref}} \} \end{aligned}$$

... Fehlerbehavior

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$\mathcal{E} = \{y - r;\ \exists u\colon\ \left(\begin{smallmatrix} y \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P},\ \left(\begin{smallmatrix} y-r \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C},\ r \in \mathcal{B}_{\mathsf{ref}}\}$$

$\ldots$ Fehlerbehavior

$$= \{e \in \mathcal{F}^\bullet;\ E \circ e = 0\}$$

mit $E \in \mathbb{R}[s]^{\bullet\times\bullet}$ berechenbar.

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$\mathcal{E} = \{y - r;\ \exists u\colon\ \left(\begin{smallmatrix} y \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P},\ \left(\begin{smallmatrix} y-r \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C},\ r \in \mathcal{B}_{\mathsf{ref}}\}$$

... Fehlerbehavior

$$= \{e \in \mathcal{F}^{\bullet};\ E \circ e = 0\}$$

mit $E \in \mathbb{R}[s]^{\bullet \times \bullet}$ berechenbar.

Ziel: Alle Fehler asymptotisch Null, d.h.

$\mathcal{E}$ vernachlässigbar

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$\mathcal{E} = \{y - r;\ \exists u:\ \left(\begin{smallmatrix} y \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P},\ \left(\begin{smallmatrix} y-r \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C},\ r \in \mathcal{B}_{\mathsf{ref}}\}$$

... Fehlerbehavior

$$= \{e \in \mathcal{F}^{\bullet};\ E \circ e = 0\}$$

mit $E \in \mathbb{R}[s]^{\bullet \times \bullet}$ berechenbar.

Ziel: Alle Fehler asymptotisch Null, d.h.

$\mathcal{E}$ vernachlässigbar

$$\iff \mathcal{E}_T = \left\{\frac{e}{t} \in \mathcal{F}_T^{\bullet};\ E \circ \frac{e}{t} = 0\right\} = 0$$

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$\mathcal{E} = \{y - r;\ \exists u:\ \left(\begin{smallmatrix} y \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P},\ \left(\begin{smallmatrix} y-r \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C},\ r \in \mathcal{B}_{\mathsf{ref}}\}$$

$\ldots$ Fehlerbehavior

$$= \{e \in \mathcal{F}^{\bullet};\ E \circ e = 0\}$$

mit $E \in \mathbb{R}[s]^{\bullet \times \bullet}$ berechenbar.

Ziel: Alle Fehler asymptotisch Null, d.h.

$$\begin{aligned} &\mathcal{E} \text{ vernachlässigbar} \\ &\iff \mathcal{E}_T = \left\{\frac{e}{t} \in \mathcal{F}_T^{\bullet};\ E \circ \frac{e}{t} = 0\right\} = 0 \\ &\iff U(\mathcal{E}_T) = \mathbb{R}[s]_T^{1\times\bullet} E = \mathbb{R}[s]_T^{1\times\bullet} \end{aligned}$$

Anwendung: Asymptotic Tracking Compensator

$$\mathcal{E} = \{y - r;\ \exists u\colon\ \left(\begin{smallmatrix} y \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P},\ \left(\begin{smallmatrix} y-r \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C},\ r \in \mathcal{B}_{\mathrm{ref}}\}$$

... Fehlerbehavior

$$= \{e \in \mathcal{F}^{\bullet};\ E \circ e = 0\}$$

mit $E \in \mathbb{R}[s]^{\bullet\times\bullet}$ berechenbar.

Ziel: Alle Fehler asymptotisch Null, d.h.

$\mathcal{E}$ vernachlässigbar

$$\iff \mathcal{E}_T = \left\{\frac{e}{t} \in \mathcal{F}_T^{\bullet};\ E \circ \frac{e}{t} = 0\right\} = 0$$

$$\iff U(\mathcal{E}_T) = \mathbb{R}[s]_T^{1\times\bullet}E = \mathbb{R}[s]_T^{1\times\bullet}$$

$$\iff \exists X \in \mathbb{R}[s]_T^{\bullet\times\bullet}\colon\ XE = \mathrm{id}_{\bullet}$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!