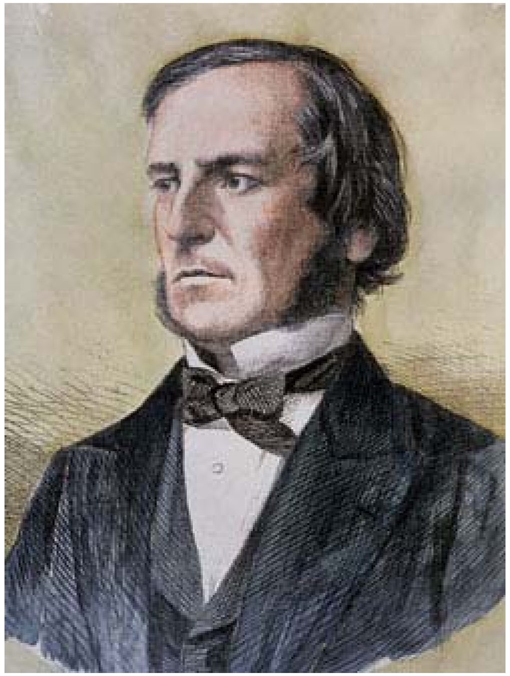
Rechnerorganisation – 3. Vorlesung

- Mathematische Grundlagen (1)
- Boolesche Algebren: BMA, BAA (2,**3**)
- Kombinatorische Schaltungen (4,5)
- Automaten (6,7)
- Sequentielle Schaltungen (8)
- Programmierbare Strukturen (9)
- Rechneraufbau und ~funktion (10,11)
- Informationskodierung (12,13,14)

BMA, BAA

BMA … BOOLEsche Mengenalgebra

BAA … BOOLEsche Ausdrucksalgebra



George Boole

2. November 1815 - 8. Dezember 1864

1847: *The Mathematical Analysis of Logic*

Quelle: Wikipedia.de

Rechnerorganisation – bisher

Funktion digitaler Schaltungen:

- Variablen, Belegungen
- BMA, Wertetabellen
- Syntax schaltalgebraischer Ausdrücke
- Semantik, Wertfunktion, Wertberechnung
- Ausdruck => Wertetabelle
- Wertetabelle => Ausdruck
  - Elementarkonjunktion, KDNF
  - Elementardisjunktion, KKNF

Wertetabelle Bezeichnung der Elemente

BMA: λ: X => Y

BAA: y = h(x)

$x = [x_2, x_1, x_0]$

$y = [y_1, y_0]$

$X_2 = [0,1,0]$

$X_6(x_1) = 1$

$X_6(x_2) = 1$

i	x_2	x_1	x_0	y_1	y_0	t
0	0	0	0	1	1	3
1	0	0	1	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	2
4	1	0	0	1	1	3
5	1	0	1	1	0	2
6	1	1	0	1	0	2
7	1	1	1	0	0	0

$\lambda_1(X_1) = Y_1(y_1) = 0$

$\lambda_0(X_3) = Y_2(y_0) = 0$

$\lambda(X_5) = Y_2 = [1,0]$

Schaltalgebraische Ausdrücke

Bisher: formale Beschreibung der Funktion einer digitalen Schaltung über *Wertetabellen*

λ: X => Y ... BMA

Für eine *schaltungstechnische Realisierung* ist eine strukturorientierte Beschreibung von Interesse
=> **schaltalgebraische Ausdrücke**

y = h(x) ... BAA

Wertberechnung (für **Ausdrücke**)

Wertberechnung für Ausdrücke $W(h_k, X_i)$:

- schrittweise Berechnung des Wertes
  - 1. Belegung der Variablen (Bits)
  - 2. Verknüpfung der Werte
- Variable x_j => Bit der Belegung $X_i(x_j)$

$$\begin{aligned} W(x_2 \vee x_1 x_0, X_6) &= W(x_2, X_6) \vee W(x_1, X_6) \wedge W(x_0, X_6) \\ &= X_6(x_2) \vee X_6(x_1) \wedge X_6(x_0) \\ &= 1 \vee 1 \wedge 0 \ \text{ bzw. ausführlich } \ (1 \vee (1 \wedge 0)) \end{aligned}$$

Ausdruck => Wertetabelle

- Berechnung der Werte eines Ausdrucks für alle Eingangsbelegungen:

  => Notation in Wertetabelle als **Wertverlauf**

  => Ausdruck repräsentiert Wertetabelle
  (für eine Ausgangsvariable)

$$s_j = \overline{a_j} b_j \vee a_j \overline{b_j} = a_j \not\sim b_j$$

$$u_j = a_j \, b_j$$

$\longrightarrow$

a_j	b_j	s_j	u_j
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Rechnerorganisation – 3. Vorlesung

Funktion digitaler Schaltungen:

- Ausdruck => Wertetabelle
- **Wertetabelle => Ausdruck**
  - Elementarkonjunktion, KDNF
  - Elementardisjunktion, KKNF
- Überführung der Normalformen
- Minimierung schaltalgebraischer Ausdrücke
  - über Umformungsregeln
  - mittels Karnaugh/Veitch-Diagramm (grafisch)

Elementarkonjunktion k_3 => KDNF

- $\overline{0} \wedge 1 \wedge 1 = 1$
- $X_3 = [\,0, \ldots, 0, 1, 1\,]$
- $k_3 = \overline{x_{n-1}} \wedge \ldots \wedge x_1 \wedge x_0$
- $h_i = y_1 = k_3 \vee k_5 \vee k_6 \vee k_7$

$W(k_3, X_i) = 1$ falls $i = 3$

$W(k_3, X_i) = 0$ falls $i \neq 3$

h_i in KDNF

- KDNF = Disjunktion von Elementarkonjunktionen

Elementardisjunktion d_2 => KKNF

- $0 \vee \overline{1} \vee 0 = 0$
- $\mathbf{X_2} = [0, \ldots, 0, 1, 0]$
- $d_2 = x_{n-1} \vee \ldots \vee \overline{x_1} \vee x_0$

$W(d_2, X_i) = 0$ falls $i = 2$

$W(d_2, X_i) = 1$ falls $i \neq 2$

- $h_i = d_0 \wedge d_1 \wedge d_2 \wedge d_4$ $\quad$ h_i in KKNF
- KKNF = Konjunktion von Elementardisjunktionen

Rechnerorganisation – 3. Vorlesung

Funktion digitaler Schaltungen:

- Ausdruck => Wertetabelle
- Wertetabelle => Ausdruck
  - Elementarkonjunktion, KDNF
  - Elementardisjunktion, KKNF
- **Überführung der Normalformen**
- Minimierung schaltalgebraischer Ausdrücke
  - über Umformungsregeln
  - mittels Karnaugh/Veitch-Diagramm (grafisch)

KKNF => KDNF

- Für vollständig bestimmte Funktionen gilt:

$$\overline{I^0} = I^1$$

- Index für d: $\in I^0 \longrightarrow$ (Ausgang y=0)

  $h_i = d_0 \wedge d_1 \wedge d_2 \wedge d_4$

- Index für k: $\in I^1 \longrightarrow$ (Ausgang y=1)

  $h_i = k_3 \vee k_5 \vee k_6 \vee k_7$

i	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Überführung Normalformen

De Morgan:

$$\overline{h_i \vee h_j} = \overline{h_i} \wedge \overline{h_j}$$

$$\overline{h_i \wedge h_j} = \overline{h_i} \vee \overline{h_j}$$

KDNF => KNANF (NAND) $\quad \overline{\overline{k_i \vee k_j}} = \overline{\overline{k_i} \wedge \overline{k_j}}$

KKNF => KNONF (NOR) $\quad \overline{\overline{d_i \wedge d_j}} = \overline{\overline{d_i} \vee \overline{d_j}}$

Rechnerorganisation – 3. Vorlesung

Funktion digitaler Schaltungen:

- Ausdruck => Wertetabelle
- Wertetabelle => Ausdruck
  - Elementarkonjunktion, KDNF
  - Elementardisjunktion, KKNF
- Überführung Normalformen
- **Minimierung schaltalgebraischer Ausdrücke**
  - über Umformungsregeln
  - mittels Karnaugh/Veitch-Diagramm (grafisch)

Rechnerorganisation – 3. Vorlesung

Minimierung schaltalgebraischer Ausdrücke:

- **über Umformungsregeln**
- mittels Karnaugh/Veitch-Diagramm (grafisch)

Minimierung:

- Vereinfachung schaltalgebraischer Ausdrücke in einen minimalen logischen Ausdruck und somit
- die Realisierung einer Schaltung mit der kleinstmöglichen Anzahl von Gattern

Minimierung über Umformungsregeln

Arbeitsblätter S. 7, 8

Kommutativität	$h_i \vee h_j = h_j \vee h_i$
	$h_i \wedge h_j = h_j \wedge h_i$
Assoziativität	$h_i \vee (h_j \vee h_k) = (h_i \vee h_j) \vee h_k = h_i \vee h_j \vee h_k$
	$h_i \wedge (h_j \wedge h_k) = (h_i \wedge h_j) \wedge h_k = h_i \wedge h_j \wedge h_k$
Distributivität	$h_i \vee (h_j \wedge h_k) = (h_i \vee h_j) \wedge (h_i \vee h_k)$
	$h_i \wedge (h_j \vee h_k) = (h_i \wedge h_j) \vee (h_i \wedge h_k)$
Idempotenz	$h_i \vee h_i = h_i$
	$h_i \wedge h_i = h_i$
Adjunktivität	$h_i \wedge (h_i \vee h_j) = h_i$
	$h_i \vee (h_i \wedge h_j) = h_i$
Negation	$h_i \vee \overline{h_i} = 1$
	$h_i \wedge \overline{h_i} = 0$
	$\overline{\overline{h_i}} = h_i$
	$\overline{0} = 1$
	$\overline{1} = 0$

Priorität

Negation

Konjunktion

Disjunktion

alle weiteren

Minimierung über Umformungsregeln

Arbeitsblätter S. 7, 8

*Disjunktions*regel	$h_i \vee 0 = h_i$
	$h_i \vee 1 = 1$
*Konjunktions*regel	$h_i \wedge 0 = 0$
	$h_i \wedge 1 = h_i$
*deMORGAN*sche Regel	$\overline{h_i \vee h_j} = \overline{h_i} \wedge \overline{h_j}$
	$\overline{h_i \wedge h_j} = \overline{h_i} \vee \overline{h_j}$
Implikationsregel	$h_i \rightarrow h_j = \overline{h_i} \vee h_j$
Äquivalenzregel	$h_i \sim h_j = h_i h_j \vee \overline{h_i}\,\overline{h_j}$
Antivalenzregel	$h_i \not\sim h_j = \overline{h_i \sim h_j} = h_i \overline{h_j} \vee \overline{h_i} h_j$

Minimierung über Umformungsregeln

Arbeitsblätter S. 7, 8

Wichtige Kürzungsregeln

1. $h_i h_j \vee \overline{h_i} h_j \;=\; (h_i \vee h_j)(\overline{h_i} \vee h_j) \;=\; h_j$
2. $h_i \vee h_i h_j \;=\; h_i(h_i \vee h_j) \;=\; h_i$
3. $h_i \vee \overline{h_i} h_j \;=\; h_i \vee h_j$
4. $h_i(\overline{h_i} \vee h_j) \;=\; h_i h_j$
5. $h_i h_j \vee h_i \overline{h_k} \vee h_j h_k \;=\; h_i \overline{h_k} \vee h_j h_k$
6. $(h_i \vee h_j)(h_i \vee \overline{h_k})(h_j \vee h_k) \;=\; (h_i \vee \overline{h_k})(h_j \vee h_k)$

Minimierung über Umformungsregeln

Kürzungsregel:

$x_2 \, x_1 \, \mathbf{x_0} \vee x_2 \, x_1 \, \overline{\mathbf{x_0}}$ … disjunktive Form

$(x_2 \vee x_1 \vee \mathbf{x_0})(x_2 \vee x_1 \vee \overline{\mathbf{x_0}})$ … konjunktive Form

Kürzen →

← **Erweitern**

Anwendung der Kürzungsregel

$$h(x) = k_{10} \lor k_{11} \lor k_{15} \lor k_{13} \lor k_9 \lor k_7 \lor k_6 \lor k_{14}$$

$$= x_3\,\overline{x_2}\,x_1\,\overline{x_0} \lor x_3\,\overline{x_2}\,x_1\,x_0$$
$$\lor\; x_3\,x_2\,x_1\,x_0 \lor \boxed{x_3\,x_2\,\overline{x_1}\,x_0}$$
$$\lor\; \boxed{x_3\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,x_0} \lor \boxed{\overline{x_3}\,x_2\,x_1\,x_0}$$
$$\lor\; \boxed{\overline{x_3}\,x_2\,x_1\,\overline{x_0}} \lor x_3\,x_2\,x_1\,\overline{x_0}$$

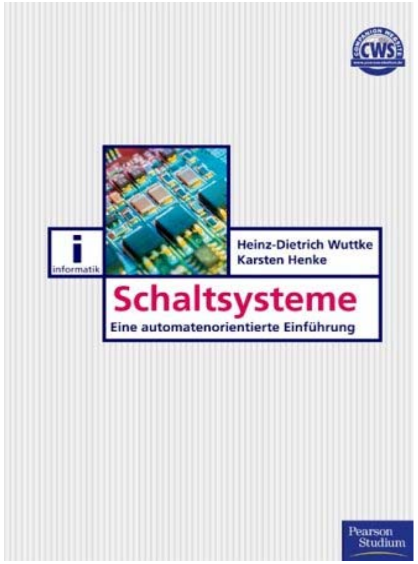
$$h(x) = x_3\,\overline{x_2}\,x_1 \lor x_3\,x_2\,x_0 \lor x_2\,x_1\,\overline{x_0} \lor \boxed{x_3\,\overline{x_1}\,x_0} \lor \boxed{\overline{x_3}\,x_2\,x_1}$$

$$h(x) = x_3\,x_0 \lor x_3\,x_1 \lor x_2\,x_1$$

=> Auflösung mit Karnaugh-Veitch !

Das war's für heute

Viel Spaß beim Wiederholen!



Kap. 3.2.3, 3.2.5.

Bis nächsten Donnerstag ...