Technische Universität Ilmenau

Fakultät für Informatik und Automatisierung
Institut Technische Informatik und Ingenieurinformatik
Fachgebiet Integrierte Kommunikationssysteme

Arbeitsblätter

zur Lehrveranstaltung

Integrierte Hard- und Softwaresysteme 1

(Ausgabe April 2014)

Dr.-Ing. Heinz-Dietrich Wuttke

Dr.-Ing. Karsten Henke

Inhaltsübersicht

BOOLEsche Mengenalgebra (BMA)

Algebra: Trägermenge und Relationen bzw. Operationen mit bestimmten Eigenschaften (Axiome) sowie neutrale Elemente bezüglich dieser Operationen definieren eine Algebra.

$BMA = [\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, M]$ mit:

- $\mathcal{P}(M)$ als Trägermenge
- $\cup, \cap, \bar{\ }$ als Operationen
- $\emptyset$ als neutrales Element der Vereinigung ($\cup$)
- M als neutrales Element der Schnittbildung ($\cap$)

Axiome der BOOLEschen Mengenalgebra, wobei $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$

Kommutativität	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativität	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
Distributivität	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotenz	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Adjunktivität	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
Komplementarität	$A \cup \bar{A} = M$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

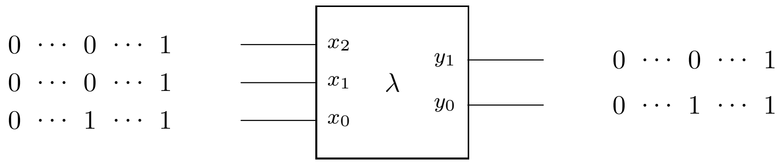
Wichtige Regeln der BOOLEschen Mengenalgebra

*deMORGAN*sche Regel	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
Vereinigungsregel	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup M = M$
Schnittregel	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap M = A$
Komplementregel	$\overline{\overline{A}} = A$ $\overline{\emptyset} = M$ $\overline{M} = \emptyset$

Anwendung der BMA auf die Funktionsbeschreibung digitaler Schaltungen (kombinatorisch)

Digitale Schaltung

$X = \{X_0, \cdots, X_i, \cdots, X_{2^n-1}\}$ $\qquad\qquad$ $Y = \{Y_0, \cdots, Y_t, \cdots, Y_{2^m-1}\}$



mit:

- X – Menge der Eingangsbelegungen X_i des Eingangsvektors $x = [x_{n-1}, \ldots, x_r, \ldots, x_0]$
- Y – Menge der Ausgangsbelegungen Y_t des Ausgangsvektors $y = [y_{m-1}, \ldots, y_k, \ldots, y_0]$
- λ – Abbildungsvorschrift (Funktion der Schaltung):

  $\lambda : X \Rightarrow Y$ bzw. $\lambda(X) = Y$ (determiniert)

  $\lambda : X \Rightarrow \mathcal{P}(Y)\backslash\emptyset$ bzw. $\lambda(X) = \mathcal{P}(Y)\backslash\emptyset$ (nichtdeterminiert)

Definitionen

Ein – /Ausgangsvektor $\quad x = [x_{n-1}, \ldots, x_r, \ldots, x_0]$ bzw. $y = [y_{m-1}, \ldots, y_k, \ldots, y_0]$ aus binären Variablen x_r bzw. y_k mit n bzw. m als Stelligkeit von x bzw. y

Eingangsbelegung $\quad X_i(x) \Rightarrow \{0,1\}^n$ geordnete Menge von n bits; $n = |x|$

$X_i = [X_i(x_{n-1}), \ldots, X_i(x_r), \ldots, X_i(x_0)]$

bit der Eingangsbelegung $\quad X_i(x_r) \in \{0,1\}$ Wert der Eingangsvariablen x_r in der Belegung X_i

Ausgangsbelegung $\quad Y_t(y) \Rightarrow \{0,1\}^m$ (determiniert)

$Y_t(y) \Rightarrow \{0,1,*,H(g)\}^m$ (nichtdeterminiert siehe Beispiel Seite 3)

$$Y_t = [Y_t(y_{m-1}), \ \ldots \ , Y_t(y_k), \ \ldots, Y_t(y_0)]$$
$$= [\lambda_{m-1}(X_i), \ldots, \lambda_k(X_i), \ldots, \lambda_0(X_i)] = \lambda(X_i)$$

bit der Ausgangsbelegung $\quad Y_t(y_k) \in \{0,1\}$ (determiniert)

$Y_t(y_k) \in \{0,1,*,H(g)\}$ (nichtdeterminiert)

Belegungsmenge $\quad X = \{X_i \mid 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$ $\qquad$ $Y = \{Y_t \mid 0 \leq t \leq 2^m - 1\}$

Belegungsindizes $\quad i = \sum_{r=0}^{n-1} X_i(x_r) \cdot 2^r$ $\qquad$ $t = \sum_{k=0}^{m-1} Y_t(y_k) \cdot 2^k$

Indexmenge $\quad$ Menge der Indizes der Eingangsbelegungen

$M = \{i \mid 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$; $\quad |M| = |X|$

Wertetabelle

$\lambda : X \Rightarrow Y$ — Belegung Y des Ausgangsvektors y als Funktion $\lambda(X)$ der Belegung X des Eingangsvektors x.

BI	x_{n-1}	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_0	y_{m-1}	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_0	BI
0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0						
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$X_i(x_{n-1})$	$\cdots$	$X_i(x_r)$	$\cdots$	$X_i(x_0)$	$\lambda_{m-1}(X_i)$	$\cdots$	$\lambda_k(X_i)$	$\cdots$	$\lambda_0(X_i)$	t
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
2^n-1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1						

Beispiel: Funktion mit 3 Eingangs- und 2 Ausgangsvariablen

Ein-/Ausgangsvektor: $x = [x_2, x_1, x_0]$ mit $|x| = 3$ bzw. $y = [y_1, y_0]$ mit $|y| = 2$

Eingangsbelegung: $X_5(x) = [1, 0, 1]$ als geordnete Menge von $n = |x| = 3$ bits mit dem Belegungsindex $i = 5 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0)$

bit der Eingangsbelegung: $X_5(x_0) = 1$ das "0"-te bit der Eingangsbelegung X_5

Ausgangsbelegung: $\lambda(X_5) = [\lambda_1(X_5), \lambda_0(X_5)] = [Y_2(y_1), Y_2(y_0)] = [1, 0] = Y_2$

Wertetabelle:

$y = [y_1, y_0]$

$x = [x_2, x_1, x_0]$

i	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_0}$	t
0	0	0	0	1	1	3
1	0	0	1	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	2
4	1	0	0	1	1	3
5	1	0	1	1	0	2
6	1	1	0	1	g_0	$\{2,3\}$
7	1	1	1	$*$	$*$	$\{0,1,2,3\}$

$X_2 = [0, 1, 0]$

$X_5(x_1) = 0$

$X_6(x_2) = 1$

$\lambda_1(X_1) = Y_1(y_1) = 0$

$\lambda_0(X_3) = Y_2(y_0) = 0$

$\lambda(X_5) = Y_2 = [1, 0]$

$\lambda(X_6) = \{Y_2, Y_3\} = \{[1, 0], [1, 1]\}$
mit $g_0 \in \{0, 1\}$ (gleichgültige Ausgangsbelegung für y_0)

X_7: verbotene Eingangsbelegung (Ausgang beliebig; gekennzeichnet durch $*$)

Belegungsmengen – schaltalgebraische Ausdrücke

schaltalgebraischer Ausdruck

$h_i(x), h_j(x) \in H$ sind elementare oder zusammengesetzte schaltalgebraische Ausdrücke und sind folgendermaßen induktiv definiert:

1. Konstante 0 und 1 sind schaltalgebraische Ausdrücke;
2. binäre Variable x_r eines n-stelligen Vektors x sind schaltalgebraische Ausdrücke;
3. wenn $h_i(x)$ und $h_j(x)$ Ausdrücke sind, so auch:

   $\overline{h_i(x)}$, $\quad (h_i(x) \rightarrow h_j(x))$,
   $(h_i(x) \wedge h_j(x))$, $\quad (h_i(x) \sim h_j(x))$,
   $(h_i(x) \vee h_j(x))$, $\quad (h_i(x) \not\sim h_j(x))$

4. andere Zeichenketten sind keine schaltalgebraischen Ausdrücke.

Wertbestimmung für schaltalgebraische Ausdrücke

Wertfunktion

Die Wertfunktion $\mathcal{W}$ ordnet einem *schaltalgebraischen Ausdruck* $h_j \in H$ bei einer *Belegung* $X_i \in X$ einen Wert aus $\{0,1\}$ zu.

$\mathcal{W} : H \times X \Rightarrow \{0,1\}$ $\quad$ z.B. $\mathcal{W}(h_j(x), X_i) = 0$

$X - Partitionierung$

Jeder schaltalgebraische Ausdruck $h_j(x)$ teilt die Belegungsmenge X des Vektors x disjunkt in zwei Teilmengen X^1 und X^0, wobei gilt:

- $X = X^1 \cup X^0$; $\quad X^1 \cap X^0 = \emptyset$; $\quad X^1 = \overline{X^0}$
- $\forall X_i(X_i \in X^1 \leftrightarrow \mathcal{W}(h_j(x), X_i) = 1)$
- $\forall X_i(X_i \in X^0 \leftrightarrow \mathcal{W}(h_j(x), X_i) = 0)$

Wertbestimmung

$\forall X_i(\mathcal{W}(h_j(x), X_i) = 1 \leftrightarrow p_j(X_i))$

sprich: *Für alle Belegungen X_i gilt: Der Wert eines schaltalgebraischen Ausdrucks $h_j(x)$ bei der Belegung X_i ist 1, genau dann, wenn die von X_i abhängige Aussage $p_j(X_i)$ wahr ist.*

	$h_j(x)$	$p_j(X_i)$
(a)	0	f
(b)	1	w
(c)	x_k	$X_i(x_k) = 1$
(d)	$\overline{x_k}$	$X_i(x_k) = 0$
(e)	$\overline{h_k(x)}$	$\overline{\mathcal{W}(h_k(x), X_i) = 1}$
(f)	$h_k(x) \wedge h_l(x)$	$(\mathcal{W}(h_k(x), X_i) = 1) \wedge (\mathcal{W}(h_l(x), X_i) = 1)$
(g)	$h_k(x) \vee h_l(x)$	$(\mathcal{W}(h_k(x), X_i) = 1) \vee (\mathcal{W}(h_l(x), X_i) = 1)$

z.B. Zeile (d): $\forall X_i\big(\mathcal{W}(\overline{x_k}, X_i) = 1 \leftrightarrow X_i(x_k) = 0\big)$

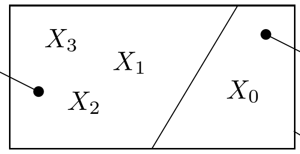
verbal: *Der Wert des Ausdrucks $\overline{x_k}$ bei der Belegung X_i ist gleich 1, genau dann, wenn bit k der Belegung X_i gleich 0 ist.*

Beispiel

$h_i = x_0 \vee x_1 \quad x = [x_1, x_0] \quad X = \{X_3, X_2, X_1, X_0\}$

X-Partitionierung

$h_i = x_0 \vee x_1 \;\hat{=}\; X^1$



$\overline{h_i} = \overline{x_0 \vee x_1} = \overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \;\hat{=}\; \overline{X^1} = X^0$

$X = X^1 \cup X^0$

Wertbestimmung

$\mathcal{W}\big((x_0 \vee x_1), X_0\big) = \mathcal{W}(x_0, X_0) \vee \mathcal{W}(x_1, X_0) = X_0(x_0) \vee X_0(x_1) = 0 \vee 0 = 0$

$\mathcal{W}\big((x_0 \vee x_1), X_2\big) = \mathcal{W}(x_0, X_2) \vee \mathcal{W}(x_1, X_2) = X_2(x_0) \vee X_2(x_1) = 0 \vee 1 = 1$

$\mathcal{W}\big((x_0 \vee \overline{x_1}), X_2\big) = \mathcal{W}(x_0, X_2) \vee \overline{\mathcal{W}(x_1, X_2)} = X_2(x_0) \vee \overline{X_2(x_1)} = 0 \vee \overline{1} = 0$

Verallgemeinerte Werteverlaufsgleichheit ($\underset{*}{=}$)

Werteverlaufsgleichheit bezüglich 0 ($\underset{o}{=}$) ("streng")

$$h_i(x) \underset{o}{=} h_j(x) \leftrightarrow \forall X_k(\mathcal{W}(h_i(x), X_k) = \mathcal{W}(h_j(x), X_k))$$

Werteverlaufsgleichheit bezüglich h^* ($\underset{*}{=}$) ("verallgemeinert")

$$h_i(x) \underset{*}{=} h_j(x) \leftrightarrow \forall X_k(\mathcal{W}(h_i(x), X_k) = \mathcal{W}(h_j(x), X_k) \vee \mathcal{W}(h^*(x), X_k) = 1)$$

$$h_i(x) \underset{*}{=} h_j(x) \quad \text{d.h.} \quad h_i \vee h^\bullet \underset{o}{=} h_j \vee h^\bullet \quad \text{mit} \quad h^\bullet = h_i \not\sim h_j \quad \text{und} \quad h^\bullet \to h^* \underset{o}{=} 1$$

Verallgemeinerte Umformungsregeln

mit $h^\bullet \to h^* \underset{o}{=} 1$ gilt: $\quad h_i \underset{*}{=} h_i \vee h^\bullet$

$$h_i \underset{*}{=} h_i \wedge \overline{h}^\bullet$$

Verallgemeinerte X-Partitionierung

$X = X^1 \cup X^0 \cup X^* \qquad M = M^1 \cup M^0 \cup M^*; \quad M^1 \cap M^0 = \emptyset$

$X_i \in X^1 \leftrightarrow \mathcal{W}(h_j, X_i) \underset{o}{=} 1$

$X_i \in X^0 \leftrightarrow \mathcal{W}(h_j, X_i) \underset{o}{=} 0$

$X_i \in X^* \leftrightarrow \mathcal{W}(h_j, X_i) =$ nicht determiniert

$X_i \in X^\bullet \leftrightarrow \mathcal{W}(h_j, X_i) \underset{*}{=} 1 \quad$ mit $\quad X^\bullet \subseteq X^*$

Beispiel verallgemeinerte Werteverlaufsgleichheit zweier Ausdrücke

BI	x_2	x_1	x_0	h_i	h_j	h^*	$h^\bullet$
0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0
2	0	1	0	1	0	1	1
3	0	1	1	0	1	1	1
4	1	0	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	1	0
7	1	1	1	1	1	1	0

$h_i(x) = \overline{x_2}(\overline{x_1} \vee \overline{x_0}) \vee x_2x_1x_0$

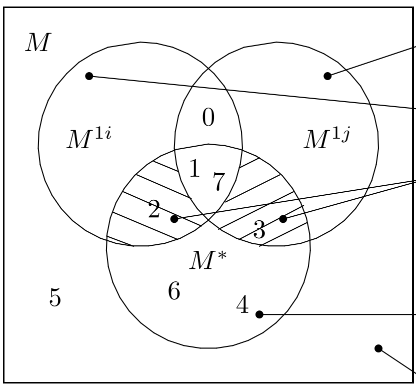
$h_j(x) = \overline{x_2}(\overline{x_1} \vee x_0) \vee x_1x_0$

$h^*(x) = x_1 \vee \overline{x_2}x_0 \vee x_2\overline{x_0}$

$h_i \underset{o}{\neq} h_j$ aber

$h_i \underset{*}{=} h_j$ denn

$h_i \vee h^* \underset{o}{=} h_j \vee h^*$



$h_j = \overline{x_2}(\overline{x_1} \vee x_0) \vee x_1x_0 \ \hat{=}\ X^{j1} = \{X_0, X_1, X_3, X_7\}$

$h_i = \overline{x_2}(\overline{x_1} \vee \overline{x_0}) \vee x_2x_1x_0 \ \hat{=}\ X^{i1} = \{X_0, X_1, X_2, X_7\}$

$h^\bullet = \overline{x_2}x_1 \ \hat{=}\ X^\bullet = X^{i\bullet} \cup X^{j\bullet} = \{X_2, X_3\}$

$h^* = x_1 \vee \overline{x_2}x_0 \vee x_2\overline{x_0} \ \hat{=}\ X^* = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7\}$

$\overline{(h_i \vee h_j \vee h^*)} = x_2\overline{x_1}x_0 \ \hat{=}\ X^0 = \{X_5\}$

BOOLEsche Ausdrucksalgebra (BAA)

$BAA = [K, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1]$ mit:

- K als Menge von Repräsentanten h_i je einer unendlichen Menge H^i werteverlaufsgleicher Ausdrücke a_i, wobei gilt:
  - $a_i \underset{o}{=} h_i \leftrightarrow h_i, a_i \in H^i \quad |H^i| = \infty\ , |X| = 2^n\ , 0 \leq i \leq |K| - 1$
  - $|K| = |P(X)| = 2^{2^n}$ mit n = Anzahl der x-Variablen

  z.B. für $n = 2$: $|X| = 2^2 = 4$; $|K| = 2^{2^2} = 16$ (siehe auch Seite 22)

  $K = \{h_0, h_1, \ldots, h_{15}\}$

  $H^9 = \{x_1 x_0 \vee \bar{x_1}\bar{x_0}, (\bar{x_1} \vee x_0)(x_1 \vee \bar{x_0}), x_1 \sim x_0, \ldots\}$

  $h_9 = x_1 x_0 \vee \bar{x_1}\bar{x_0}$ als Repräsentant aus H^9 in DNF
- $\vee, \wedge, \bar{\ }$ als Operationen
- 0 als neutrales Element der Disjunktion ($\vee$)
- 1 als neutrales Element der Konjunktion ($\wedge$)

Axiome und Regeln der BOOLEschen Ausdrucksalgebra

Kommutativität

$$h_i \vee h_j \underset{o}{=} h_j \vee h_i$$
$$h_i \wedge h_j \underset{o}{=} h_j \wedge h_i$$

Assoziativität

$$h_i \vee (h_j \vee h_k) \underset{o}{=} (h_i \vee h_j) \vee h_k \underset{o}{=} h_i \vee h_j \vee h_k$$
$$h_i \wedge (h_j \wedge h_k) \underset{o}{=} (h_i \wedge h_j) \wedge h_k \underset{o}{=} h_i \wedge h_j \wedge h_k$$

Distributivität

$$h_i \vee (h_j \wedge h_k) \underset{o}{=} (h_i \vee h_j) \wedge (h_i \vee h_k)$$
$$h_i \wedge (h_j \vee h_k) \underset{o}{=} (h_i \wedge h_j) \vee (h_i \wedge h_k)$$

Idempotenz

$$h_i \vee h_i \underset{o}{=} h_i$$
$$h_i \wedge h_i \underset{o}{=} h_i$$

Adjunktivität

$$h_i \wedge (h_i \vee h_j) \underset{o}{=} h_i$$
$$h_i \vee (h_i \wedge h_j) \underset{o}{=} h_i$$

Negation

$$h_i \vee \bar{h_i} \underset{o}{=} 1$$
$$h_i \wedge \bar{h_i} \underset{o}{=} 0$$
$$\bar{\bar{h_i}} \underset{o}{=} h_i$$
$$\bar{0} \underset{o}{=} 1$$
$$\bar{1} \underset{o}{=} 0$$

*Disjunktions*regel	$h_i \vee 0 \underset{o}{=} h_i$
	$h_i \vee 1 \underset{o}{=} 1$
*Konjunktions*regel	$h_i \wedge 0 \underset{o}{=} 0$
	$h_i \wedge 1 \underset{o}{=} h_i$
*deMORGAN*sche Regel	$\overline{h_i \vee h_j} \underset{o}{=} \bar{h}_i \wedge \bar{h}_j$
	$\overline{h_i \wedge h_j} \underset{o}{=} \bar{h}_i \vee \bar{h}_j$
Implikationsregel	$h_i \rightarrow h_j \underset{o}{=} \bar{h}_i \vee h_j$
Äquivalenzregel	$h_i \sim h_j \underset{o}{=} h_i h_j \vee \bar{h}_i \bar{h}_j$
Antivalenzregel	$h_i \not\sim h_j \underset{o}{=} \overline{h_i \sim h_j} \underset{o}{=} h_i \bar{h}_j \vee \bar{h}_i h_j$

Wichtige Kürzungsregeln

1. $h_i h_j \vee \bar{h}_i h_j \underset{o}{=} (h_i \vee h_j)(\bar{h}_i \vee h_j) \underset{o}{=} h_j$
2. $h_i \vee h_i h_j \underset{o}{=} h_i(h_i \vee h_j) \underset{o}{=} h_i$
3. $h_i \vee \bar{h}_i h_j \underset{o}{=} h_i \vee h_j$
4. $h_i(\bar{h}_i \vee h_j) \underset{o}{=} h_i h_j$
5. $h_i h_j \vee h_i \bar{h}_k \vee h_j h_k \underset{o}{=} h_i \bar{h}_k \vee h_j h_k$
6. $(h_i \vee h_j)(h_i \vee \bar{h}_k)(h_j \vee h_k) \underset{o}{=} (h_i \vee \bar{h}_k)(h_j \vee h_k)$

Elementarkonjunktion und -disjunktion

Elementarkonjunktion $\quad k_i(x) ::= \bigwedge_{r=0}^{n-1} (X_i(x_r) \sim x_r)$

Beispiel: Ermittlung von $k_3(x) = \overline{x_2} x_1 x_0$

BI	x_2	x_1	x_0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{aligned} k_3(x) &::= (X_3(x_2) \sim x_2) \wedge (X_3(x_1) \sim x_1) \wedge (X_3(x_0) \sim x_0) \\ &::= (0 \sim x_2)(1 \sim x_1)(1 \sim x_0) \\ &::= (0x_2 \vee 1\overline{x_2})(1x_1 \vee 0\overline{x_1})(1x_0 \vee 0\overline{x_0}) \\ &::= (0 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee 0)(x_0 \vee 0) \\ &::= \overline{x_2} x_1 x_0 \end{aligned}$$

Elementardisjunktion $\quad d_i(x) ::= \bigvee_{r=0}^{n-1} (X_i(x_r) \not\sim x_r)$

Ermittlung **expliziter BOOLEscher Gleichungen in Normalform**
für je eine Ausgangsvariable $y_k \in y$ entsprechend folgender Definitionen:

KDNF

Kanonisch
Disjunktive
Normalform

$$y_k = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} k_i(x) \wedge \lambda_k(X_i)$$

$$h^*(x) \underset{\text{o}}{=} \bigvee_{i \in M_k} k_i(x) \qquad \text{mit } \forall i (i \in M_k \leftrightarrow \lambda_k(X_i) = *)$$

KKNF

Kanonisch
Konjunktive
Normalform

$$y_k = \bigwedge_{i=0}^{2^n-1} (d_i(x) \vee \lambda_k(X_i))$$

$$\overline{h^*(x)} \underset{\text{o}}{=} \bigwedge_{i \in M_k} d_i(x) \qquad \text{mit } \forall i (i \in M_k \leftrightarrow \lambda_k(X_i) = *)$$

KNANF

Kanonische
NAND-
Normalform

$$KDNF \xleftrightarrow[\text{und deMorgan}]{\text{doppelteNegation}} KNANF$$

$$y_k = \overline{\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} \overline{k_i(x) \wedge \lambda_k(X_i)}}$$

KNONF

Kanonische
NOR-
Normalform

$$KKNF \xleftrightarrow[\text{und deMorgan}]{\text{doppelteNegation}} KNONF$$

$$y_k = \overline{\bigvee_{i=0}^{2^n-1} \overline{d_i(x) \vee \lambda_k(X_i)}}$$

Ermittlung expliziter Gleichungen für nichtdeterminierte Funktionen

$\boldsymbol{\lambda : X \Rightarrow P(Y) \backslash \emptyset}$

Für jede Eingangsbelegung $X_i \in X$ mit

- $\lambda(X_i) \subseteq \{Y_l \;\mid\; 0 \leq l \leq 2^m - 1\}$ und
- $|\lambda(X_i)| > 1$ (nichtdeterminierter Funktionswert bei der Belegung X_i)

müssen in der *Wertetabelle* für die einzelnen Variablen $y = [y_{m-1}, \ldots, y_k, \ldots, y_0]$ des Ausgangsvektors statt der Konstanten 0 und 1 Ausdrücke in den Variablen eines Parametervektors $g^i = [g^i_{s-1}, \ldots, g^i_t, \ldots g^i_0]$ so eingetragen werden, daß bei beliebiger Belegung der g-Parameter nur Ausgangsbelegungen aus $\lambda(X_i)$ entstehen können.

(I) Bestimmung der g-Parameter

1. Bestimmung der g-Parameter-Ausdrücke *für eine Belegung* X_i
   (a) Bestimmung der Anzahl der g-Parameter:
   - $s^i = |g^i| = \lceil ld|\lambda(X_i)|\rceil$ $\qquad\lceil\;\rceil$ ... aufgerundet auf ganze Zahlen

   (b) Aufstellen einer Wertetabelle für g^i, die alle Ausgangsbelegungen $Y_l \in \lambda(X_i)$ enthält, die willkürlich und ggf. auch mehrfach zugeordnet werden können:

$g^i_{s-1} \ldots g^i_t \ldots g^i_0$	$\lambda_{m-1}(X_i) \ldots \lambda_k(X_i) \ldots \lambda_0(X_i)$	$\lambda(X_i)$
$0 \ldots 0 \ldots 0$	$0 \ldots 0 \ldots 1$	$Y_v \in \lambda(X_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$1 \ldots 1 \ldots 1$	$0 \ldots 1 \ldots 0$	$Y_w \in \lambda(X_i)$

   (c) Bestimmung der Ausdrücke $h_k(g^i)$ für die einzelnen Komponenten $\lambda_k(X_i)$ von $\lambda(X_i)$
   - $\lambda_0(X_i) = h_0(g^i), \ldots, \lambda_k(X_i) = h_k(g^i), \ldots, \lambda_{m-1}(X_i) = h_{m-1}(g^i)$

   (d) Die Ausdrücke $h_k(g^i)$ werden in der Wertetabelle $X \Rightarrow Y$ in die y_k-Spalten der i-ten Zeile eingetragen.
2. Die Bestimmung der g-Parameter *für alle weiteren Belegungen* erfolgt analog Punkt (1).

Zur Vermeidung der Doppelindizierung der g-Parameter (g^i_t) können die g-Parameter fortlaufend nummeriert werden:

- $g = [g_{r-1}, \ldots, g_u, \ldots g_0]$ $\qquad$ mit $\qquad r = \sum\limits_{i=0}^{2^n-1} |g^i|$

(II) Ermittlung der y-Gleichungen:

Die so entstandene Wertetabelle kann (analog dem Verfahren für determinierte Funktionen) zur Ermittlung der expliziten BOOLEschen Gleichungen verwendet werden.

+++ Datei: arbbl-10.ss +++ Datum: 30. März 2014 +++

Beispiel: Gegeben ist folgende Wertetabelle:

i	x_2	x_1	x_0	$\lambda(X)$	y_1	y_0
0	0	0	0	Y_0	0	0
1	0	0	1	Y_2	1	0
2	0	1	0	Y_1	0	1
3	0	1	1	$\{Y_1, Y_2\}$	?	?
4	1	0	0	$\{Y_0, Y_1, Y_2\}$	?	?
5	1	0	1	Y_0	0	0
6	1	1	0	Y_0	0	0
7	1	1	1	Y_2	1	0

$x = [x_2, x_1, x_0] \;\Rightarrow\; X = \{X_7, X_6, \ldots, X_0\}$
$y = [y_1, y_0] \;\Rightarrow\; \lambda(X) \subseteq \{Y_3, Y_2, Y_1, Y_0\}$

(I) Bestimmung der g-Parameter

1. Bestimmung der g-Parameter für $\lambda(X_3) = \{Y_1, Y_2\}$:

   (a) $|g| = ld2 = 1$

   (b)

g_0	$\lambda_1(X_3)$	$\lambda_0(X_3)$	$\lambda(X_3)$
0	0	1	Y_1
1	1	0	Y_2

   (c) $\lambda_1(X_3) = h_1 = g_0 \qquad \lambda_0(X_3) = h_0 = \bar{g}_0$

   (d) Eintragen von h_1 und h_0 in der Zeile 3 der Wertetabelle

2. Bestimmung der g-Parameter für $\lambda(X_4) = \{Y_0, Y_1, Y_2\}$:

   (a) $|g| = \lceil ld3 \rceil = 2$

   (b)

g_2	g_1	$\lambda_1(X_4)$	$\lambda_0(X_4)$	$\lambda(X_4)$
0	0	0	0	Y_0
0	1	0	1	Y_1
1	0	1	0	Y_2
1	1	1	0	Y_2

   (c) $\lambda_1(X_4) = h_1 = g_2 \qquad \lambda_0(X_4) = h_0 = \bar{g}_2 g_1$

   (d) Eintragen von h_1 und h_0 in Zeile 4 der Wertetabelle

(II) Ergibt folgende Wertetabelle:

i	x_2	x_1	x_0	$\lambda(X)$	y_1	y_0
0	0	0	0	Y_0	0	0
1	0	0	1	Y_2	1	0
2	0	1	0	Y_1	0	1
3	0	1	1	$\{Y_1, Y_2\}$	g_0	$\bar{g}_0$
4	1	0	0	$\{Y_0, Y_1, Y_2\}$	g_2	$\bar{g}_2 g_1$
5	1	0	1	Y_0	0	0
6	1	1	0	Y_0	0	0
7	1	1	1	Y_2	1	0

h_1 für die Belegung X_3

h_0 für die Belegung X_4

und daraus die Gleichungen für y:

$y_0 = \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \bar{g}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \bar{g}_2 g_1$

$y_1 = \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 g_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 g_2 \vee x_2 x_1 x_0$

Implizite BOOLEsche Gleichungen

gegeben: $h_i(x, y) = h_j(x, y)$ (implizite Gleichung)

gesucht: $y = h_k(x)$ (explizite Gleichung für y)

Lösung: In der BOOLEschen Algebra existieren keine Umkehroperationen für Konjunktion und Disjunktion, die das Separieren der abhängigen Variablen gestatten.
Die Lösung wird über ein *Tabellenverfahren* durch Werteverlaufsvergleich von h_i und h_j ermittelt.

Tabellenverfahren

	Y_0 $\cdots$ Y_k $\cdots$ Y_{2^m-1}	Lösungsmenge $\lambda(X)$
X_0	$W(h_i, X_0, Y_k) \stackrel{?}{=} W(h_j, X_0, Y_k)$	$\lambda(X_0) = \{Y_k \| W(h_i, X_0, Y_k) = W(h_j, X_0, Y_k)\}$
X_1	$W(h_i, X_1, Y_k) \stackrel{?}{=} W(h_j, X_1, Y_k)$	$\lambda(X_1) = \{Y_k \| W(h_i, X_1, Y_k) = W(h_j, X_1, Y_k)\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_l	$W(h_i, X_l, Y_k) \stackrel{?}{=} W(h_j, X_l, Y_k)$	$\lambda(X_l) = \{Y_k \| W(h_i, X_l, Y_k) = W(h_j, X_l, Y_k)\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_{2^n-1}	$W(h_i, X_{2^n-1}, Y_k) \stackrel{?}{=} W(h_j, X_{2^n-1}, Y_k)$	

- Für die jeweiligen Belegungen (X_l, Y_k) werden die Werte der Ausdrücke h_i und h_j ermittelt und verglichen.
- Bei Übereinstimmung wird ein "=", andernfalls ein "$\neq$" im Kreuzungspunkt der jeweiligen Belegungen eingetragen.
- Ausgangsbelegungen Y_k, die bei einer Eingangsbelegung X_l für h_i und h_j den gleichen Wert liefern, werden in die entsprechende Lösungsmenge $\lambda(X_l)$ der l-ten Zeile aufgenommen.
- Mögliche Lösungsmengen sind:
  - $\lambda(X_l) = \emptyset \;\Rightarrow$ keine Lösung für Eingangsbelegung X_l
  - $|\lambda(X_l)| = 1 \Rightarrow$ eindeutige Lösung für Eingangsbelegung X_l
  - $|\lambda(X_l)| > 1 \Rightarrow$ mehrdeutige Lösung für Eingangsbelegung X_l

Das implizite Gleichungssystem ist

- **eindeutig lösbar**, wenn $\forall l$ gilt: $|\lambda(X_l)| = 1 \qquad (0 \leq l \leq 2^n - 1)$
- **partiell lösbar**, wenn $\forall l$ mit $\lambda(X_l) = \emptyset$ gilt: $W(h^*, X_l) = 1$
- **mehrdeutig lösbar**, wenn $\exists \lambda(X_l)$ mit $|\lambda(X_l)| > 1$

Mehrdeutige Lösungen sind mit g-Parametern beschreibbar (siehe Seite 10).

Beispiel

gegeben: $y_0 \vee \bar{y_1}\bar{x_2}x_0 \vee \bar{y_1}\bar{x_0} \vee x_1\bar{x_0} \vee y_1x_2 = \bar{y_0}\bar{x_1}\bar{x_0} \vee \bar{y_1}x_2\bar{x_1}\bar{x_0} \vee \bar{y_1}\bar{y_0}x_2x_1 \vee \bar{y_1}y_0\bar{x_2}x_1$

gesucht: $y_1 = h(x_2, x_1, x_0) \quad y_0 = h(x_2, x_1, x_0)$

Lösung:

(1) $W(y_0 \vee \bar{y_1}\bar{x_2}x_0 \vee \cdots \vee y_1x_2, [0,0,1], [1,0]) = 0$

(2) $W(\bar{y_0}\bar{x_1}\bar{x_0} \vee \bar{y_1}x_2\bar{x_1}\bar{x_0} \vee \cdots, [0,0,1], [1,0]) = 0$

(3) Überprüfung auf Wertegleichheit; $\rightsquigarrow$ Eintragen von "="

(4) Ermitteln von $\lambda(X_1) = [1,0] = Y_2$

(I) Tabellenverfahren:

			y_0	0	1	0	1			
			y_1	0	0	1	1	$\lambda(X)$	y_1	y_0
	x_2	x_1	x_0							
0	0	0	0	$1 = 1$	$1 \neq 0$	$0 \neq 1$	$1 \neq 0$	Y_0	0	0
1	0	0	1	$1 \neq 0$	$1 \neq 0$	$0 = 0$	$1 \neq 0$	Y_2	1	0
2	0	1	0	$1 \neq 0$	$1 = 1$	$1 \neq 0$	$1 \neq 0$	Y_1	0	1
3	0	1	1	$1 \neq 0$	$1 = 1$	$0 = 0$	$1 \neq 0$	Y_1, Y_2	?	?
4	1	0	0	$1 = 1$	$1 = 1$	$1 = 1$	$1 \neq 0$	Y_0, Y_1, Y_2	?	?
5	1	0	1	$0 = 0$	$1 \neq 0$	$1 \neq 0$	$1 \neq 0$	Y_0	0	0
6	1	1	0	$1 = 1$	$1 \neq 0$	$1 \neq 0$	$1 \neq 0$	Y_0	0	0
7	1	1	1	$0 \neq 1$	$1 \neq 0$	$1 \neq 0$	$1 \neq 0$	$\emptyset$	?	?

(II) Bestimmung der g-Parameter für $\lambda(X_3) = \{Y_1, Y_2\}$ und $\lambda(X_4) = \{Y_0, Y_1, Y_2\}$:

siehe Arbeitsblatt Schaltsysteme "Explizite BOOLEsche Gleichungen - 2/2"

$\Longrightarrow \quad \lambda_1(X_3) = g_0$

$\Longrightarrow \quad \lambda_0(X_3) = \bar{g_0}$

$\Longrightarrow \quad \lambda_1(X_4) = g_2$

$\Longrightarrow \quad \lambda_0(X_4) = \bar{g_2}g_1$

(III) Eintragen der g-Parameter-Ausdrücke in die Wertetabelle:

BI			y_0	0	1	0	1			
			y_1	0	0	1	1	$\lambda(X)$	y_1	y_0
	x_2	x_1	x_0							
0	0	0	0						0	0
1	0	0	1						1	0
2	0	1	0						0	1
3	0	1	1						$\boldsymbol{g_0}$	$\boldsymbol{\overline{g_0}}$
4	1	0	0						$\boldsymbol{g_2}$	$\boldsymbol{\overline{g_2}g_1}$
5	1	0	1						0	0
6	1	1	0						0	0
7	1	1	1						*	*

(IV) Ermittlung der (partiellen) Lösung für y unter Angabe von h^*:

$y_0 \underset{*}{=} \bar{x_2}x_1\bar{x_0} \vee \bar{x_2}x_1x_0\bar{g_0} \vee x_2\bar{x_1}\bar{x_0}\bar{g_2}g_1$ mit $h^* = x_2x_1x_0$

$y_1 \underset{*}{=} \bar{x_2}\bar{x_1}x_0 \vee \bar{x_2}x_1x_0g_0 \vee x_2\bar{x_1}\bar{x_0}g_2$ mit $h^* = x_2x_1x_0$

Minimierungsverfahren

Minimierung

Ermitteln von Repräsentanten h_{min} einer Menge H_i von werteverlausfsgleichen Ausdrücken, die nicht weiter kürzbar sind.

Belegungsindexmengen

- $M_k^0 = \{i \mid \lambda_k(X_i) = 0 \wedge X_i \in X\}$
  Menge der Indizes der Eingangsbelegungsmenge X, für die die Teilfunktion y_k den Wert 0 annimmt.
- $M_k^1 = \{i \mid \lambda_k(X_i) = 1 \wedge X_i \in X\}$
  Menge der Indizes der Eingangsbelegungsmenge X, für die die Teilfunktion y_k den Wert 1 annimmt.
- $M_k^* = \{i \mid \lambda_k(X_i) = * \wedge X_i \in X\}$
  Menge der Indizes der Eingangsbelegungsmenge X, für die die Teilfunktion y_k nicht definiert ist.

Primimplikant

Minimaler Elementarausdruck p_j, der eine Menge P_j kürzbarer Belegungen repräsentiert.

Gegenüberstellung verschiedener Minimierungsverfahren

	Karnaugh	**Quine McCluskey**	**Kasakow**
Variablenzahl	≤ 6	beliebig	beliebig
M^0, M^1	beliebig groß	beliebig groß	möglichst klein
M^*	beliebig groß	beliebig groß	möglichst groß
Einbeziehung von M^*	entsprechend Nachbarschaft	alle in Kürzungstabelle einbezogen; keine in Auswahltabelle einbezogen	erfolgt verdeckt
alle y_{min} gefunden ?	nein	ja, es werden systematisch alle gefunden	nein
Algorithmus	grafisch	für Rechnerimplementierung geeignet	heuristisch

(1) Minimierungsverfahren nach Karnaugh

Ausgangspunkt: Wertetabelle

Idee:

- Grafische Aufstellung der Wertetabelle so, daß benachbarte Belegungen auch in der Tabelle benachbart sind.
  - Zwei Belegungen X_i und X_j heißen **benachbart**, wenn sie sich in genau einem Bit an der r-ten Stelle unterscheiden, d.h. es gilt:
    $$X_i(x_s) = \begin{cases} \overline{X_j(x_s)} & \text{falls} \quad s = r \\ X_j(x_s) & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$
  - Elementarkonjunktionen benachbarter Belegungen sind in der Variablen x_r kürzbar zu Fundamental-Konjunktionen entsprechend folgender Kürzungsregeln:
    $$h_i(x) \underset{\circ}{=} h_i(x)h_j(x) \vee h_i(x)\overline{h_j(x)}$$
    $$h_i(x) \underset{\circ}{=} x_r h_i(x) \vee \bar{x}_r h_i(x)$$
- Grafische Gruppenbildung benachbarter Belegungen

Verfahren:

- zwei im Karnaugh-Plan benachbarte Felder erfüllen die Nachbarschaftsbeziehung (1)
- linker und rechter sowie oberer und unterer Rand des Karnaugh-Planes sind benachbart
- $\Rightarrow$ Minimierung durch Bilden von 2er-, 4er-, 8er-, … Blöcken untereinander benachbarter Felder
- die Variablen, deren Wert innerhalb eines Blockes konstant ist, bilden den (diese Belegungen repräsentierenden) Minimalausdruck

Beispiel

x_3	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	*
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	*
1	1	0	0	0
1	1	0	1	*
1	1	1	0	*
1	1	1	1	1

y	x_0	0	1	1	0
x_3	x_2 \ x_1	0	0	1	1
0	0	1	*	0	1
0	1	0	1	0	0
1	1	0	*	1	*
1	0	1	0	*	1

4er-Block: $\bar{x}_2\bar{x}_0$

2er-Block: $\bar{x}_3\bar{x}_1x_0$

4er-Block: x_3x_1

$*$ zu 0 gewählt $\quad$ $*$ zu 1 gewählt

$$y_{min} \underset{\circ}{=} \bar{x}_2\bar{x}_0 \vee x_3x_2x_1x_0 \vee \bar{x}_3x_2\bar{x}_1x_0$$

$$y_{min} \underset{*}{=} \bar{x}_2\bar{x}_0 \vee x_3x_1 \vee \bar{x}_3\bar{x}_1x_0$$

$$h^* = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee x_3\bar{x}_2x_1x_0 \vee x_3x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_3x_2x_1\bar{x}_0$$

$$h^\bullet = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee x_3\bar{x}_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1\bar{x}_0$$

(2) Minimierungsverfahren nach Quine McCluskey

Ausgangspunkt: Belegungsindexmengen $M^1 \cup M^*$

Idee:

- Benachbarte Belegungen unterscheiden sich in der Anzahl der mit 1 belegten Bits um genau 1
  $\Longrightarrow$ *Indexgruppenbildung*
- Die Differenz der Indizes benachbarter Belegungen ist eine Potenz von 2
  $\Longrightarrow$ *systematische Differenzbildung* zwischen Elementen zweier benachbarter Indexgruppen

Verfahren:

1. Aufstellen der Indexgruppen I_j als **1. Kürzungstabelle**
   $I_j = \{i \mid X_i$ enthält genau j 1-Belegungen; $i \in M^1 \cup M^* \}$
2. Differenzbildung in der 1. Kürzungstabelle zwischen allen Indizes k und l (mit $k \in I_{j+1} \ \wedge \ l \in I_j \ \wedge \ k > l$)
   - $k - l = 2^n$
     $\Longrightarrow$ Eintragen von k, l und der Differenz (2^n) in die Indexgruppe $I_{j/j+1}$ der **2. Kürzungstabelle** und markieren der Belegungen k und l in der 1. Kürzungstabelle
   - $k - l \neq 2^n$
     $\Longrightarrow$ ignorieren
3. Differenzbildung in der 2. Kürzungstabelle zwischen Indizes k, l aus der Indexgruppe $I_{j/j+1}$ und r, s aus $I_{j+1/j+2}$ mit gleicher Differenz (2^n) bei den bisherigen Kürzungen
   - $r - k = s - l = 2^p \qquad (k > l \wedge r > s)$
     $\Longrightarrow$ Eintragen von k, l, r, s und der beiden Differenzen $(2^n, 2^p)$ in **einer weiteren Kürzungstabelle** unter der Indexgruppe $I_{j/j+1/j+2}$ und markieren der Belegungen k, l und r, s
   - $r - k = s - l \neq 2^p$
     $\Longrightarrow$ ignorieren
4. Wiederholung der Differenzbildung, bis keine weitere Kürzungstabelle mehr erzeugbar ist.
5. Die Elemente der letzten Kürzungstabelle sowie alle nicht markierten Indizes der übrigen Kürzungstabellen stehen jeweils für eine Menge P_u nicht weiter kürzbarer Belegungen.
6. Eintragen von P_u und der Elemente von M^1 in eine Auswahltabelle;
   Auswahl solcher P_u, so daß $\bigcup_u P_u = M^1$ gilt.
7. Ermittlung der Primimplikanten p_t aus P_u
8. Aufstellen der expliziten BOOLEschen Gleichung entsprechend der Auswahl unter (6).

Beispiel:

$y = \bar{x}_3\bar{x}_2x_1x_0 \vee \bar{x}_3x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2x_1x_0$

$h^* = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_3x_2x_1x_0 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee x_3x_2x_1x_0$

$\Longrightarrow \qquad M^1 = \{3, 4, 8, 11\} \qquad M^* = \{0, 1, 7, 9, 15\}$

1. Schritt: 1. Kürzungstabelle

Indexgruppe	Index
0	0 ✓
1	1 ✓ 4 ✓ 8 ✓
2	3 ✓ 9 ✓
3	7 ✓ 11 ✓
4	15 ✓

2.Schritt: Differenzbildung und 2. Kürzungstabelle

$k \quad l \quad 2^n$

1-0=1
4-0=4
8-0=8

3-1=2
9-1=8
$\boxed{\text{9-4=5}}$ Ⓐ
9-8=1

7-3=4
11-3=8
11-9=2

15-7=8
15-11=4

Indexgruppe	Index	
0/1	1,0(1) ✓ 4,0(4) 8,0(8) ✓	 P_1
1/2	3,1(2) ✓ 9,1(8) ✓ 9,8(1) ✓	
2/3	7,3(4) ✓ 11,3(8) ✓ 11,9(2) ✓	
3/4	15,7(8) ✓ 15,11(4) ✓	

3. Schritt: Differenzbildung und 3. Kürzungstabelle

Indexgruppe	Index
0/1/2	9,1,8,0(8,1) P_2 9,8,1,0(1,8) Ⓑ
1/2/3	11,3,9,1(8,2) P_3 11,9,3,1(2,8) Ⓑ
2/3/4	15,7,11,3(8,4) P_4 15,11,7,3(4,8) Ⓑ

Anmerkung:

Ⓐ Differenz ergibt keine Zweierpotenz
$\Rightarrow$ wird nicht in Nachfolgetabelle aufgenommen

Ⓑ äquivalent zu P_2 bzw. P_3 bzw. P_4

Ⓒ $P_1 : 4, 0(4)$
P_1 repräsentiert die Belegungen X_4 und X_0
$p_1 = \bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0$ ergibt sich durch Kürzung von $k_4(x)$ bzw. $k_0(x)$ an der Stelle x_2

5. Schritt: Ermittlung von $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ aus den Kürzungstabellen

6. Schritt: Auswahltabelle

P \ M^1	3	4	8	11	
P_1		×			} unverzichtbar
P_2			×		
P_3	×			×	} wählbar
P_4	×			×	

7. Schritt: Ermittlung der Primimplikanten

P_1: 4,0(4) $\quad P_2$: 0,1,8,9(1,8) $\quad P_3$: 1,3,9,11(2,8) $\quad P_4$: 3,7,11,15(4,8)

P_1:

8	4	2	1
0	$\boxed{1}$	0	0
0	$\boxed{0}$	0	0

Ⓒ

$p_1 = \bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0$

P_2:

8	4	2	1
$\boxed{0}$	0	0	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	0	0	$\boxed{1}$
$\boxed{1}$	0	0	$\boxed{0}$
$\boxed{1}$	0	0	$\boxed{1}$

$p_2 = \bar{x}_2\bar{x}_1$

P_3:

8	4	2	1
$\boxed{0}$	0	$\boxed{0}$	1
$\boxed{0}$	0	$\boxed{1}$	1
$\boxed{1}$	0	$\boxed{0}$	1
$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$	1

$p_3 = \bar{x}_2x_0$

P_4:

8	4	2	1
$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	1	1
$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	1	1
$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	1	1
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1	1

$p_4 = x_1x_0$

8. Schritt: Aufstellen der expliziten BOOLEschen Gleichung

- $y_{min_1} \underset{*}{=} p_1 \vee p_2 \vee p_3 = \bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2x_0$ $\quad$ mit $h^\bullet = k_0 \vee k_1 \vee k_9 = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1x_0$
- $y_{min_2} \underset{*}{=} p_1 \vee p_2 \vee p_4 = \bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_0$ $\quad$ mit $h^\bullet = k_0 \vee k_1 \vee k_7 \vee k_9 \vee k_{15} = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_2x_1x_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1x_0$

Anmerkung: $h^\bullet$ enthält die zur Minimierung benutzten Elemente aus h^*

(3) Minimierungsverfahren nach Kasakow

Ausgangspunkt: Belegungsindexmengen M^1 und M^0

Idee: Bei großer M^*- und überschaubarer M^1- oder M^0-Menge lassen sich a priori *Teilbelegungen in* M^1 finden, die nicht in M^0 vorkommen. Aus diesen werden die Primimplikanten der Minimalform gebildet.

Beispiel 1:

$M^1 = \{27, 42, 116, 120\}$ $\qquad M^0 = \{96, 109, 110\}$ $\qquad M^* = M \backslash (M^1 \cup M^0)$

		x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	
M^1	27	0	0	1	1	0	1	1	$p_1 = x_4$
	42	0	1	0	1	0	1	0	$p_2 = \bar{x}_6$
	116	1	1	1	0	1	0	0	p_1
	120	1	1	1	1	0	0	0	p_1
M^0	96	1	1	0	0	0	0	0	
	109	1	1	0	1	1	0	1	
	110	1	1	0	1	1	1	0	
M^*	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\Longrightarrow y_{min} \underset{*}{=} p_1 \vee p_2 = x_4 \vee \bar{x}_6$$

Beispiel 2:

$$y = \bar{x}_3\bar{x}_2x_1x_0 \vee \bar{x}_3x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2x_1x_0$$

$$h^* = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3x_2x_1x_0 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee x_3x_2x_1x_0$$

$\Longrightarrow \qquad M^1 = \{3, 4, 8, 11\} \qquad M^0 = \{2, 5, 6, 10, 12, 13, 14\} \qquad M^* = \{0, 1, 7, 9, 15\}$

		x_3	x_2	x_1	x_0	
M^1	3	0	0	1	1	$p_3 = \bar{x}_2x_0$
	4	0	1	0	0	$p_1 = \bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0$
	8	1	0	0	0	$p_2 = \bar{x}_2\bar{x}_1$
	11	1	0	1	1	p_3
M^0	2	0	0	1	0	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	10	1	0	1	0	
	12	1	1	0	0	
	13	1	1	0	1	
	14	1	1	1	0	
M^*	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

oder

		x_3	x_2	x_1	x_0	
M^1	3	0	0	1	1	$p_4 = x_1x_0$
	4	0	1	0	0	p_1
	8	1	0	0	0	p_2
	11	1	0	1	1	p_4
M^0	2	0	0	1	0	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	10	1	0	1	0	
	12	1	1	0	0	
	13	1	1	0	1	
	14	1	1	1	0	
M^*	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$y_{min_1} \underset{*}{=} p_1 \vee p_2 \vee p_3 = \bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2x_0$

$y_{min_2} \underset{*}{=} p_1 \vee p_2 \vee p_4 = \bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_1x_0$

Struktur $\boldsymbol{S = [M, x, p, y, \kappa]}$

mit:

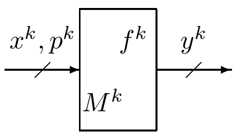
- M Menge von Modulen $M^k = [x^k, p^k, y^k, f^k] \in M$
- x Eingangsvektor; x^k … Eingangsvektor des Moduls M^k
- p Programmiervektor; p^k … Programmiervektor des Moduls M^k
- y Ausgangsvektor; y^k … Ausgangsvektor des Moduls M^k
- κ Koppelfunktion $\bigcup\limits_k x^k \cup \bigcup\limits_k p^k \cup y \Rightarrow \bigcup\limits_k y^k \cup x \cup p$

Koppelfunktion Die Koppelfunktion κ beschreibt die eindeutige Abbildung der Eingänge und Programmiereingänge der Module und der Strukturausgänge auf Modulausgänge sowie auf Eingänge oder Programmiereingänge der Struktur.

Schnittstelle Eingangsvektor x, Programmiervektor p und Ausgangsvektor y bilden die Schnittstelle der Struktur.

Kombinatorische Strukturen bestehen aus kombinatorischen Modulen und enthalten keine Rückführungen von Ausgängen auf Eingänge.

Modul M^k



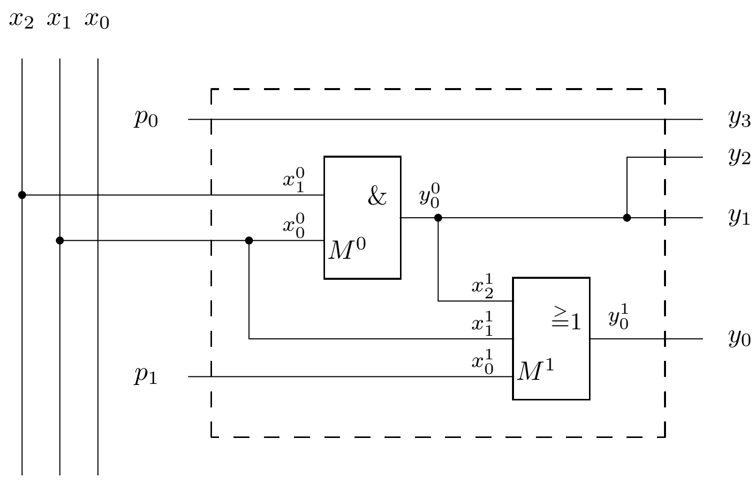
M^k … Modulbezeichner
x^k … Eingangsvektor des Moduls M^k
p^k … Programmiervektor des Moduls M^k
y^k … Ausgangsvektor des Moduls M^k
f^k … Funktionsbezeichner des Moduls M^k

Beispiel: $x = [x_2, x_1, x_0]$, $y = [y_3, y_2, y_1, y_0]$, $p = [p_1, p_0]$, $M = \{M^0, M^1\}$

$\kappa: \quad \{x_1^0, x_0^0\} \cup \{x_2^1, x_1^1, x_0^1\} \cup \{y_3, y_2, y_1, y_0\} \Rightarrow \{y_0^0\} \cup \{y_1^1, y_0^1\} \cup \{x_2, x_1, x_0\} \cup \{p_1, p_0\}$

$\kappa(x_1^0) = x_2$ sprich: *"Die Eingangsvariable x_1 des Moduls M^0 ist gekoppelt mit der Eingangsvariablen x_2 des Eingangsvektors x"*

$\kappa(x_0^0) = x_1$
$\kappa(x_2^1) = y_0^0$
$\kappa(x_1^1) = x_1$
$\kappa(x_0^1) = p_1$
$\kappa(y_2) = y_0^0$
$\kappa(y_1) = y_0^0$
$\kappa(y_0) = y_0^1$
$\kappa(y_3) = p_0$



Modulverkettung $\vdash$

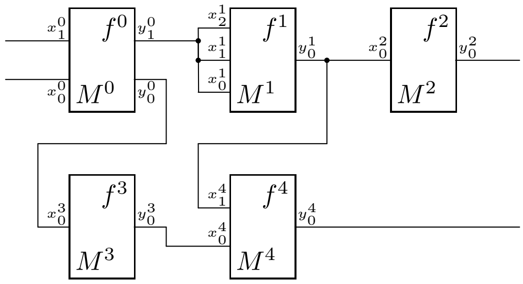
Zwei Module M^k und M^l heißen *verkettet*, wenn mindestens eine Koppelrelation der Form:

- $\kappa(x_i^l) = y_j^k$ mit $k \neq l$ und $x_i^l \in x^l$ und $y_j^k \in y^k$

existiert.

Die Verkettungsrelation ist irreflexiv und asymmetrisch.
Die transitive Hülle der Kopplung zweier Module M^k, M^l soll mit $M^k \vdash^* M^l$ beschrieben werden; eine dabei auftretende Folge von Kopplungen durch $\kappa^*(x_i^l) = y_j^k$.

Beispiel:



Es gilt: $M^0 \vdash M^1,\ M^0 \vdash M^3,\ M^1 \vdash M^2,\ M^1 \vdash M^4,\ M^3 \vdash M^4,$
$M^0 \vdash M^1 \vdash M^4,\ M^0 \vdash M^3 \vdash M^4,$
$M^0 \vdash^* M^2,\ \ M^0 \vdash^* M^4$

aber nicht: $M^1 \vdash^* M^3$

weiter gilt: $\kappa(x_2^1) = y_1^0,\ \kappa(x_1^4) = y_0^1,\ \kappa^*(x_1^4) = y_1^0$

Kombinatorische Struktur

Verkettete Module bilden eine *kombinatorische Struktur*, wenn für alle k, l gilt:

- $M^k \vdash^* M^l \rightarrow\ \nexists k, l(M^l \vdash^* M^k)$

SequentielleStruktur

Eine *sequentielle Struktur* enthält mindestens eine *Rückkopplung* κ_R der Form:

- $\exists k, l(M^k \vdash^* M^l \wedge M^l \vdash^* M^k)$

Modulhierarchie

Module können mittels *Vergröberung* und *Verfeinerung* hierarchisch strukturiert werden.

Vergröberung

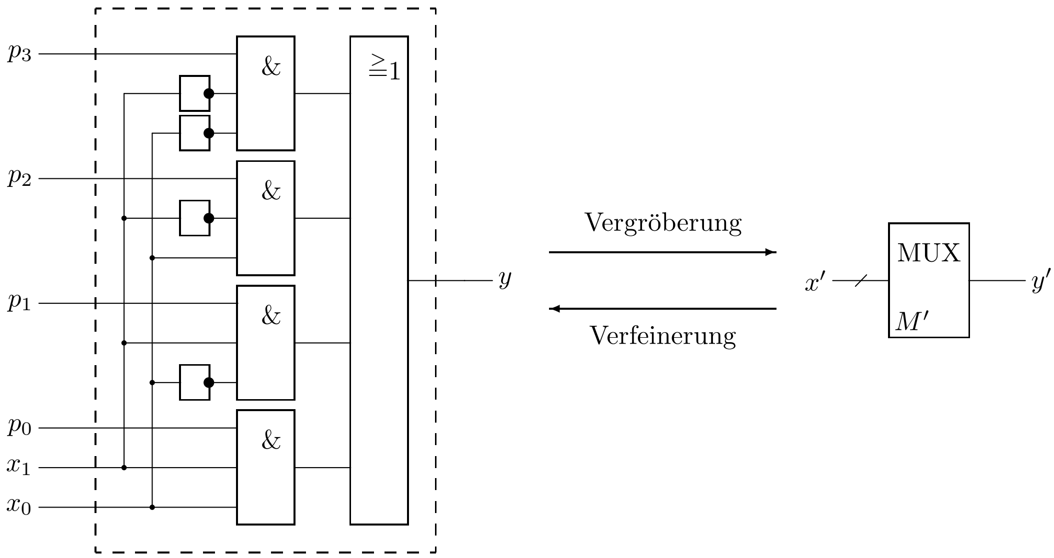
Bei der Vergröberung werden ausgewählte Eingangs- und Ausgangsvariable x^k, y^k einer Modulmenge $\{M^0, \ldots, M^{n-1}\}$ mit der Schnittstelle (Eingangs- und Ausgangsvariable x', y') **eines** Moduls M' gekoppelt.
Die Ein/Ausgangs-Abbildung der Belegungen dieser Variablen werden als *Funktion* f' des übergeordneten Moduls, ggf. unter Nutzung interner Zustandsvariabler z, definiert.

- $M' = [x', y', f']$
- $\kappa_{Vergröberung} : \; x^k \Rightarrow x', \; y^k \Rightarrow y' \qquad$ mit $0 \leq k \leq n-1$
- $y' = f'(x', z)$

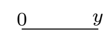
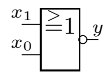
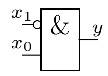
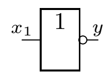
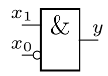
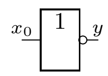
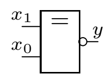
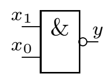
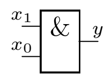
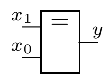
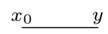
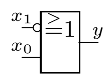
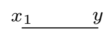
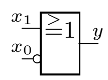
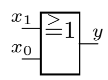
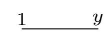
Verfeinerung

Die Verfeinerung eines Moduls M' ist die Umkehroperation der Vergröberung.
Bei nicht bekannter Modulmenge $\{M^0, \ldots, M^{n-1}\}$ ist eine *Dekomposition* der Modulfunktion λ' und deren Zuordnung zu Modulen $M^k \in \{M^0, \ldots, M^{n-1}\}$ erforderlich.

Beispiel: 4-auf-1-Multiplexer



Beispiele für Repräsentanten h_i der Mengen H^i für Ausdrücke mit 2 Variablen x_0, x_1 in unterschiedlichen Normalformen

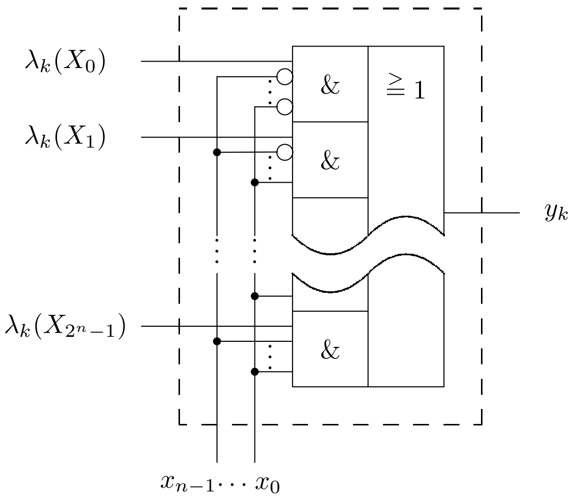
x_1 x_0	1 1 0 0 1 0 1 0	Funktionsname	DNF	KNF	weitere NF	Schalt-symbol
y_0	0 0 0 0	Null	0	0	0	
y_1	0 0 0 1	NOR (not or)	$\bar{x}_1\bar{x}_0$	$\bar{x}_1\bar{x}_0$	$\overline{x_1 \vee x_0}$	
y_2	0 0 1 0	Inhibition von x_0 auf x_1	$\bar{x}_1 x_0$	$\bar{x}_1 x_0$	$\overline{x_0 \rightarrow x_1}$	
y_3	0 0 1 1	NOT (Negation von x_1)	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	
y_4	0 1 0 0	Inhibition von x_1 auf x_0	$x_1\bar{x}_0$	$x_1\bar{x}_0$	$\overline{x_1 \rightarrow x_0}$	
y_5	0 1 0 1	NOT (Negation von x_0)	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_0$	
y_6	0 1 1 0	Antivalenz (XOR,Exklusiv-Oder)	$x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0$	$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(x_1 \vee x_0)$	$x_1 \not\sim x_0$	
y_7	0 1 1 1	NAND (not and)	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	$\overline{x_1 x_0}$	
y_8	1 0 0 0	AND (Konjunktion, Und)	$x_1 x_0$	$x_1 x_0$	$x_1 x_0$	
y_9	1 0 0 1	Äquivalenz	$x_1 x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0$	$(\bar{x}_1 \vee x_0)(x_1 \vee \bar{x}_0)$	$x_1 \sim x_0$	
y_{10}	1 0 1 0	Identität von x_0	x_0	x_0	x_0	
y_{11}	1 0 1 1	Implikation von x_1 auf x_0	$\bar{x}_1 \vee x_0$	$\bar{x}_1 \vee x_0$	$x_1 \rightarrow x_0$	
y_{12}	1 1 0 0	Identität von x_1	x_1	x_1	x_1	
y_{13}	1 1 0 1	Implikation von x_0 auf x_1	$x_1 \vee \bar{x}_0$	$x_1 \vee \bar{x}_0$	$x_0 \rightarrow x_1$	
y_{14}	1 1 1 0	OR (Disjunktion, Oder)	$x_1 \vee x_0$	$x_1 \vee x_0$	$x_1 \vee x_0$	
y_{15}	1 1 1 1	Eins	1	1	1	

Beispiele für kombinatorische Strukturen

(1) Schaltsymbole auf Seite 22

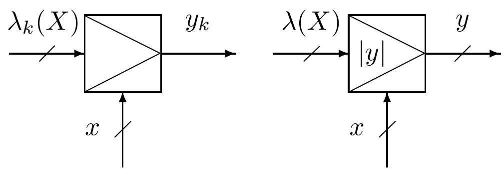
(2) Multiplexer

interne Struktur



interne Struktur des Multiplexers k

Symbol

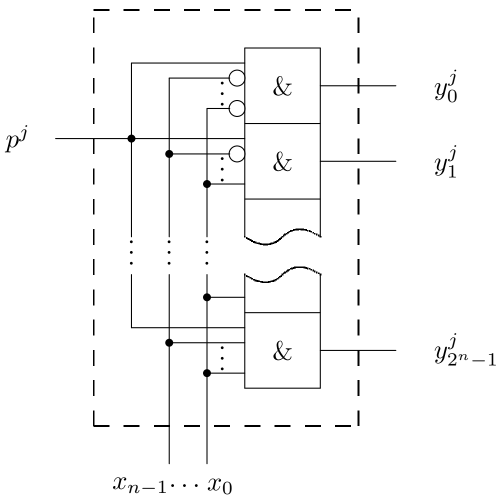


Multiplexer k

Multiplexerblock
aus $|y|$ Multiplexern

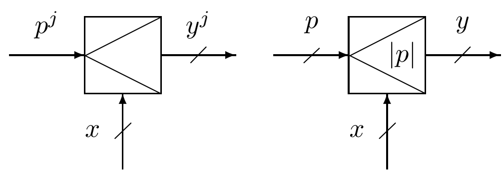
(3) Demultiplexer

interne Struktur



interne Struktur des Demultiplexers j

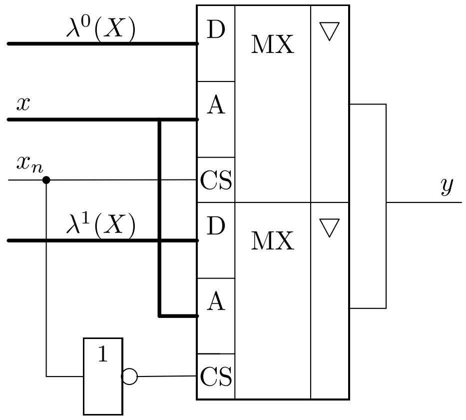
Symbol

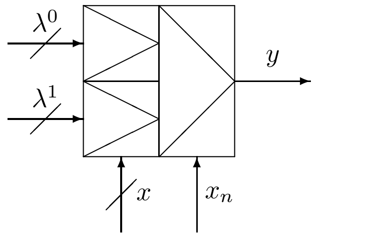


Demultiplexer j

Demultiplexerblock
aus $|p|$ Demultiplexern

(4) Multiplexer-Kaskade



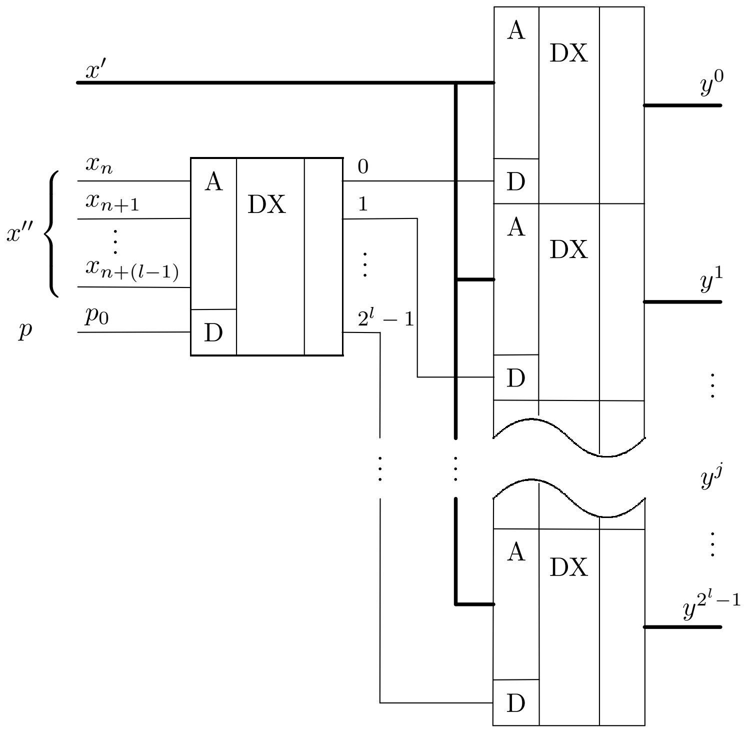


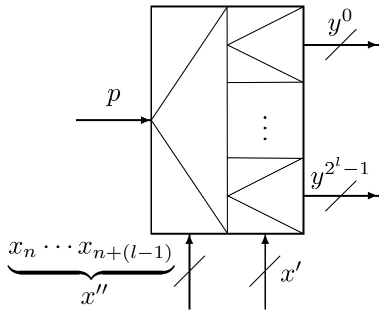
$\triangledown$ . . . Tri-state-Ausgänge

CS . . . Chip Select

ohne Tri-state-Ausgänge

(5) Demultiplexer-Kaskade

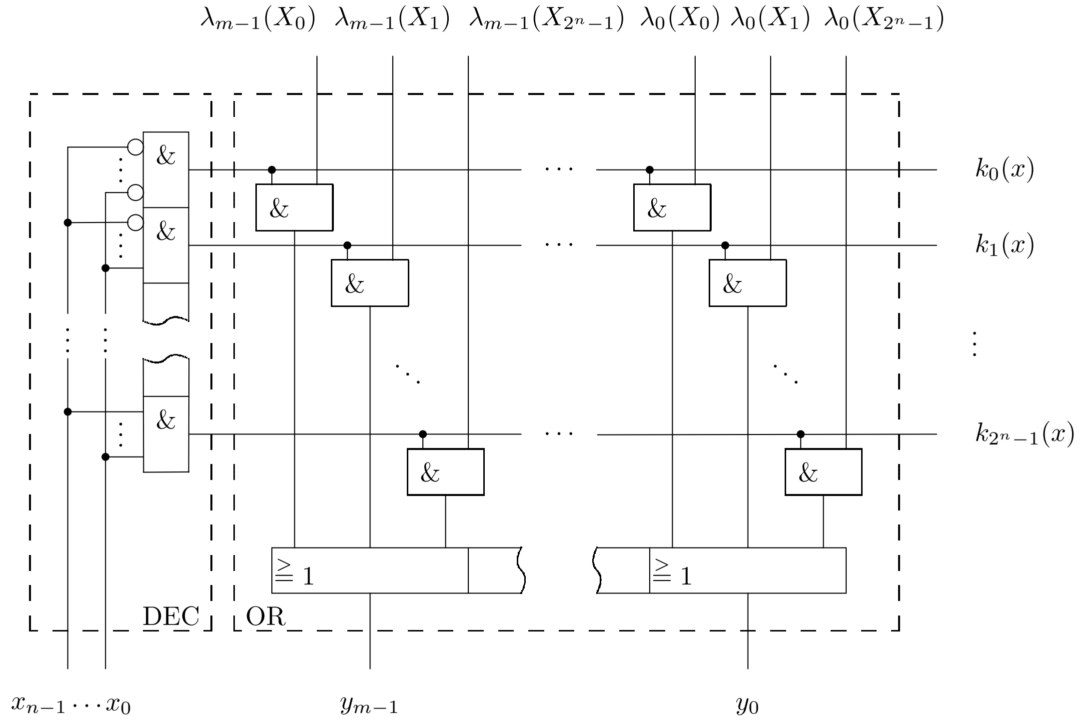




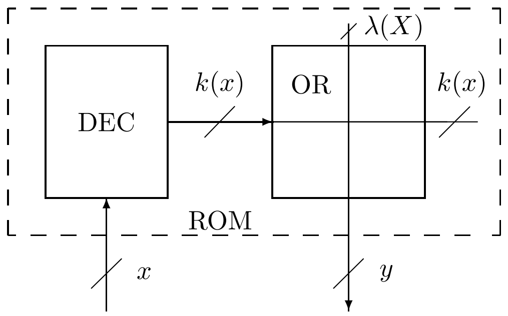
$x = [x'', x']$

Beispiel mit $n = 2$ und $l = 3$
$|y^j| = 2^n = 4$ Elemente
$y^0 = [y_3, y_2, y_1, y_0]$
$\vdots$
$y^7 = [y_{31}, y_{30}, y_{29}, y_{28}] = y^{2^l-1}$
$x' = [x_1, x_0]$ $\quad$ $x'' = [x_4, x_3, x_2]$
$p = [p_0]$

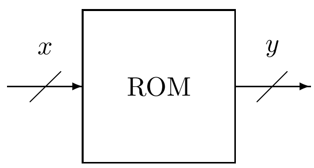
(6) ROM-Struktur



kombinatorische Ersatzstruktur

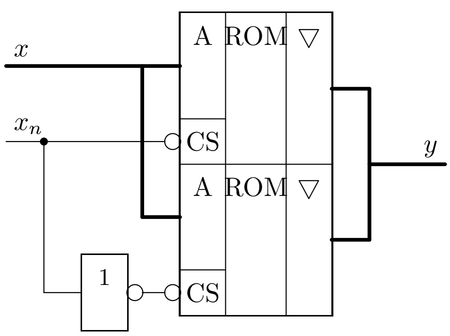


Blockstruktur

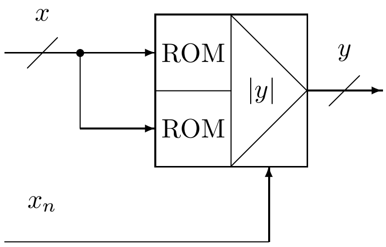


Blocksymbol

(7) ROM-Kaskade



▽ . . . Tri-state-Ausgänge



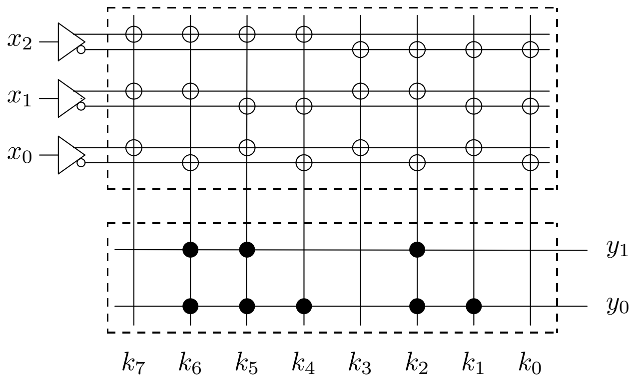
ohne Tri-state-Ausgänge

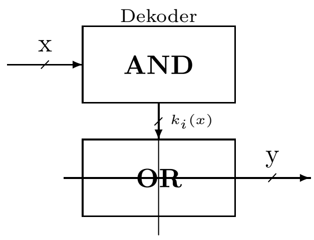
Programmierbare Strukturen

(Hinweis: AND- und OR-Matritzen können auch als NOR-Matritzen realisiert sein)

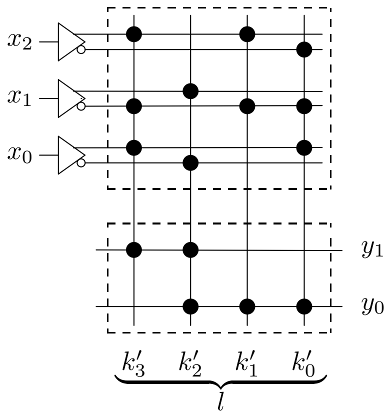
Beispiel: $y_1 = x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_1\bar{x}_0 \quad y_0 = x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee x_1\bar{x}_0$

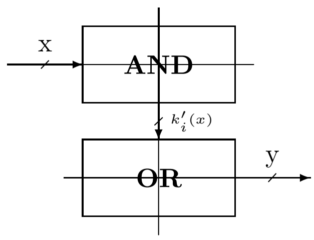
ROM Ausgangspunkt: Elementarkonjunktionen $k_i(x)$ bzw. KDNF



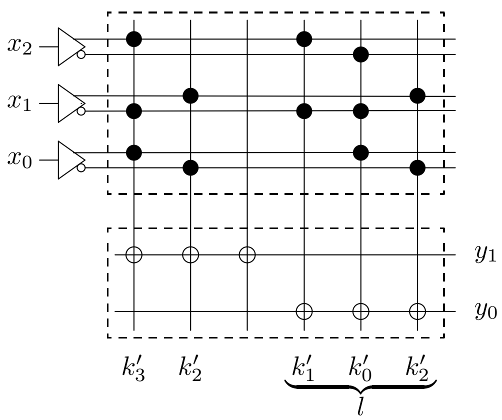


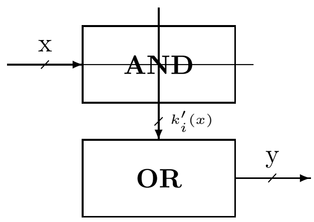
PLA Ausgangspunkt: Gleichungen in DNF mit max. l unterschiedlichen Fundamentalkonjunktionen für alle Gleichungen

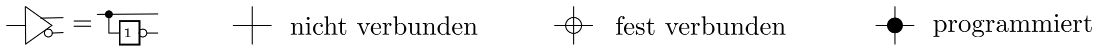




PAL/GAL Ausgangspunkt: Gleichungen in DNF mit max. l Fundamentalkonjunktionen je Gleichung





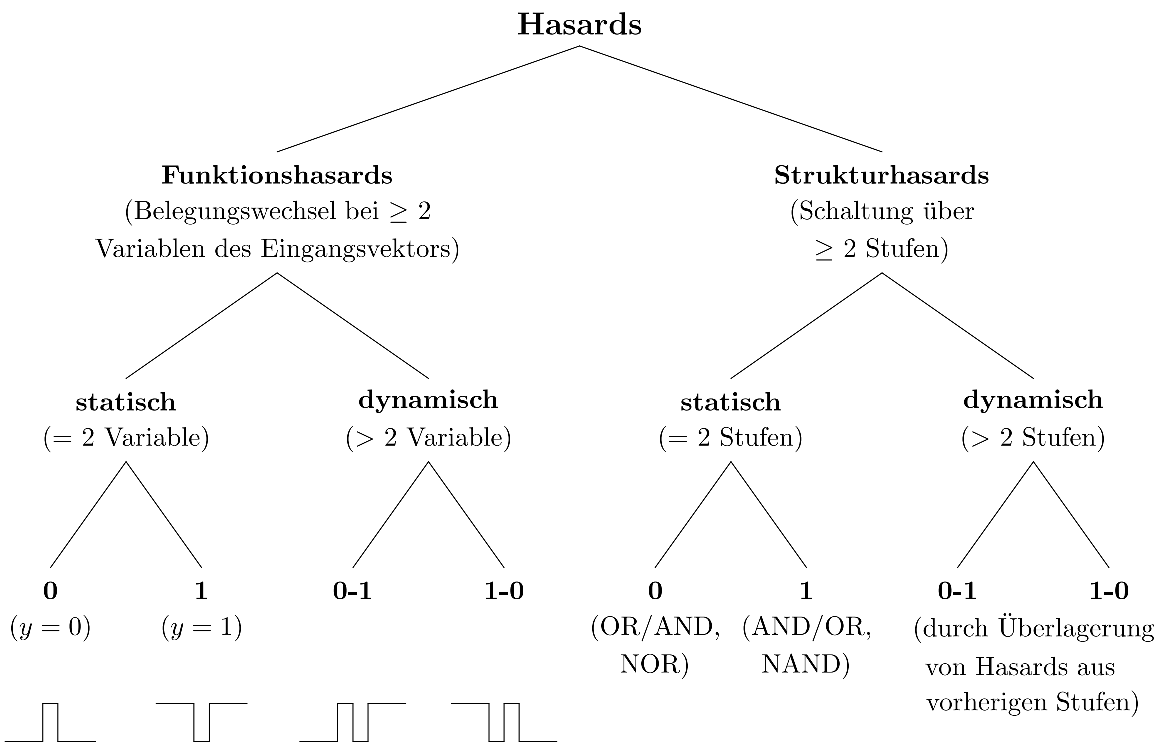


æ

Hasards

Hasards sind Störungen der Ausgangsbelegung, die beim Wechsel der Eingangsbelegung (bedingt durch unterschiedliche Signallaufzeiten) auftreten können.
Bei sequentiellen Schaltungen können Hasards in der Rückführung (Races) zu fehlerhaften Folgezuständen führen.

Klassifikation:



Vermeidung:
- geeignete Belegungswechsel (Gray-Codierung)
- Verzögerung durch RC-Glieder am Ausgang
- Taktung

Vermeidung:
- Realisierung redundanter Primkonjunktionen (überlappende Blöcke im Karnaugh-Plan)
- Taktung

Funktionshasards

Ursache: Belegungswechsel von Eingangsvariablen

- eine Eingangsvariable:
  $\Longrightarrow$ keine Funktionshasards möglich
- genau zwei Eingangsvariable:
  $\Longrightarrow$ statische Funktionshasards möglich
- mehr als zwei Eingangsvariable:
  $\Longrightarrow$ dynamische Funktionshasards möglich

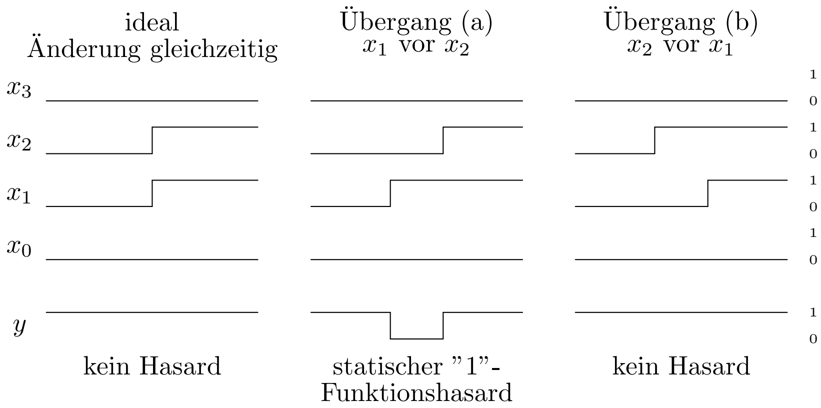
abhängig vom Funktionswert der Zwischenbelegungen (a), (b), (c), (d), (e) und (f).

	x_0	0	0	1	1
	x_1	0	1	1	0
x_3	x_2				
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1

Statische Funktionshasards

Änderung

	x_3	x_2	x_1	x_0	y	
von	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	
über	0	0	1	0	0	(a)
bzw.	0	1	0	0	1	(b)
auf	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	

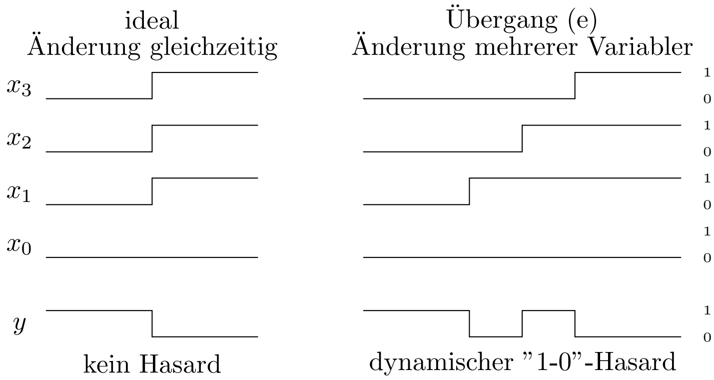


Die Übergänge (c) und (d) verursachen jeweils statische "0"-Hasards.

Dynamische Funktionshasards

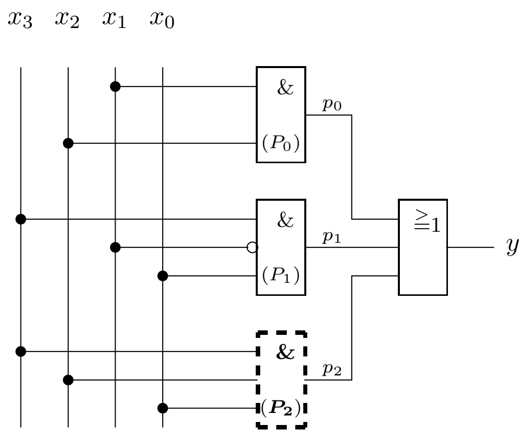
Änderung

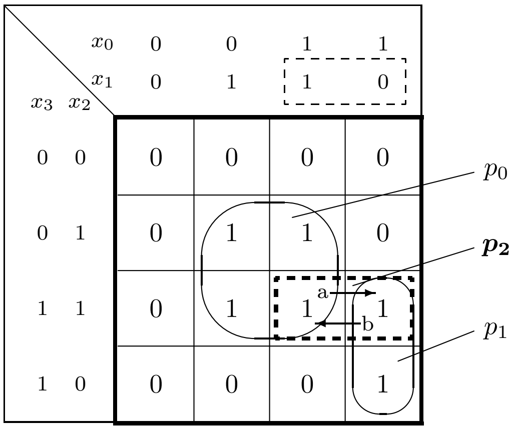
	x_3	x_2	x_1	x_0	y	
von	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	
über	0	0	1	0	0	(e)
und	0	1	1	0	1	
auf	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	



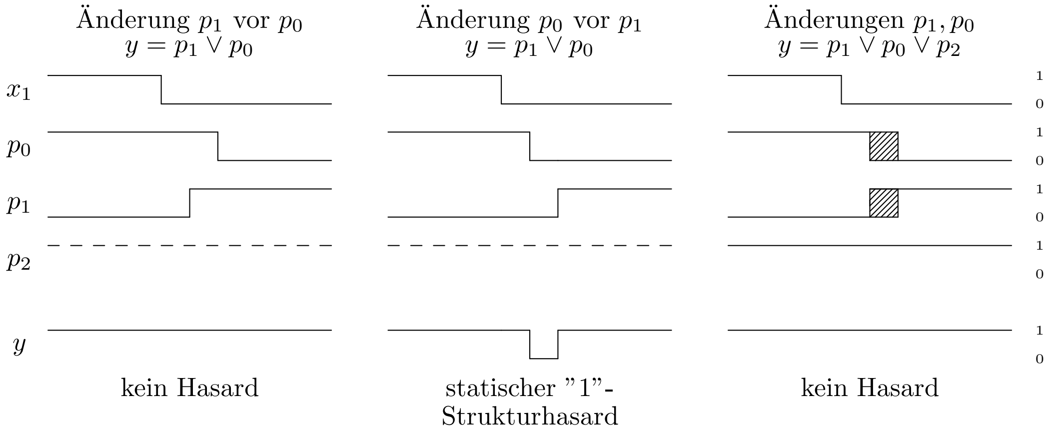
Der Übergang (f) verursacht keinen Hasard.

Statische Strukturhasards und deren Vermeidung

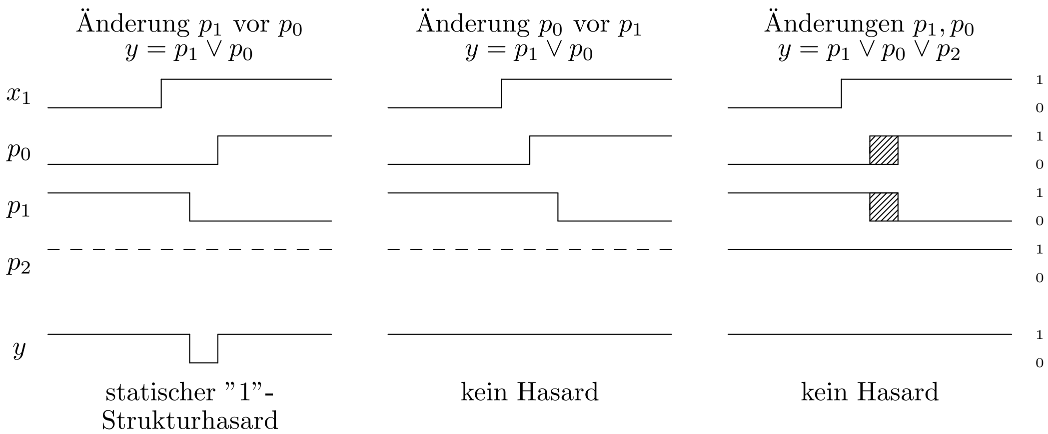




(a) beim Wechsel der Variablen x_1 von 1 auf 0 wechselt p_0 auf 0 und p_1 auf 1

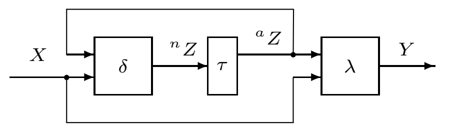
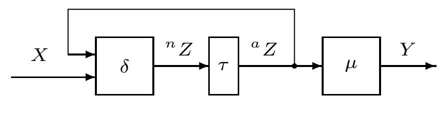
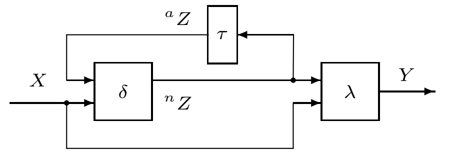
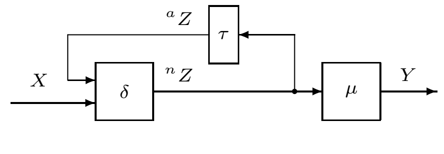


(b) beim Wechsel der Variablen x_1 von 0 auf 1 wechselt p_0 auf 1 und p_1 auf 0



Sequentielle Automaten

Automatentypen

	Mealy-Automat $\boldsymbol{A_\lambda = [X, Y, Z, \delta, \lambda]}$	**Moore-Automat** $\boldsymbol{A_\mu = [X, Y, Z, \delta, \mu]}$
Typ a	 $\lambda :\ {}^aZ \times X \Rightarrow Y$	 $\mu :\ {}^aZ \Rightarrow Y$
Typ n	 $\lambda :\ {}^nZ \times X \Rightarrow Y$	 $\mu :\ {}^nZ \Rightarrow Y$

X ... Eingangsbelegungsmenge des Eingangsvektors $x = [x_{n-1}, \ldots, x_r, \ldots, x_0]$

Y ... Ausgangsbelegungsmenge des Ausgangsvektors $y = [y_{m-1}, \ldots, y_k, \ldots, y_0]$

Z ... Zustandsbelegungsmenge z.B. $Z_1(z) = [0, 0, \ldots, 0, 1] \in Z$ mit $z = [z_{p-1}, \ldots, z_s, \ldots, z_0]$ als p-stelliger Zustandsvektor z aus p binären Zustandsvariablen

^nZ ... neuer Zustand
^aZ ... alter Zustand

τ ... Verzögerung

δ ... Zustandsüberführungsfunktion $\quad \delta : Z \times X \Rightarrow Z$

λ/μ ... Mealy-/Moore-Ausgabefunktion

Automatentabelle für einen Mealy-Automaten vom Typ a

Belegungsindex						0	$\cdots$	i	$\cdots$	2^n-1
					x_0	0	$\cdots$	$X_i(x_0)$	$\cdots$	1
					$\vdots$					
					x_r	0	$\cdots$	$X_i(x_r)$	$\cdots$	1
					$\vdots$					
					x_{n-1}	0	$\cdots$	$X_i(x_{n-1})$	$\cdots$	1
	z_{p-1}	$\cdots$	z_s	$\cdots$	z_0					
0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0					
$\vdots$										
j	$^aZ_j(z_{p-1})$	$\cdots$	$^aZ_j(z_s)$	$\cdots$	$^aZ_j(z_0)$			$^nZ_u := \delta(^aZ_j, X_i)$ $Y_t = \lambda(^aZ_j, X_i)$		
$\vdots$										
2^p-1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1					

Zustands- und Automatengraphen

Zustandsgraph	$G_\delta = [Z, K, \omega_\delta]$
Mealy-Automatengraph	$G_\lambda = [Z, K, \omega_\delta, \omega_\lambda]$
Moore-Automatengraph	$G_\mu = [Z, K, \omega_\delta, \omega_\mu]$

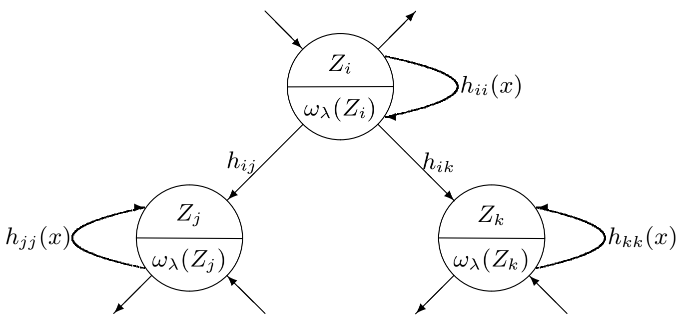
mit:

- $Z \ldots$ Knotenmenge
- $K \ldots$ Kantenmenge   mit $K \subseteq Z \times Z$
- $\omega_\delta \ldots$ Kantengewichtsfunktion (Zustandsüberführungsbedingung)
- ω_λ bzw. $\omega_\mu \ldots$ Knotengewichtsfunktionen (Ausgabe)

wobei im einzelnen für Zustände und Kanten gilt:

- $[Z_i, Z_j] \in K \leftrightarrow \overline{h_{ij}(x) = 0}$ $(h_{ij} \neq 0)$
- $\omega_\delta([Z_i, Z_j]) = h_{ij}(x)$
  $h_{ij}(x) \ldots$ Übergangsausdruck (Kantengewicht der Kante $[Z_i, Z_j]$)
- $\omega_\lambda(Z_i) = \{y_k = h_{ik}(x) \quad | \quad 0 \leq k \leq m-1\}$ (Mealy)
- $\omega_\mu(Z_i) = \{y_k = h_{ik}(0,1) \quad | \quad 0 \leq k \leq m-1\}$ (Moore)
  $h_{ik}(x) \ldots$ Ausgabeausdruck der y_k-Komponente in $Z_i,\ m = |y|$

Allgemeine graphische Notationsform für G_λ



Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit

Vollständigkeit $\forall i(\bigvee_{j=0}^{2^p-1} h_{ij}(x) = 1)$

Widerspruchsfreiheit $\forall i(\bigvee_{\substack{j,k=0 \\ j \neq k}}^{2^p-1} h_{ij}(x) \wedge h_{ik}(x) = 0)$

Für die schaltalgebraische Realisierung von Automaten kann jeder Zustand Z_i als Belegung Z_i des Zustandsvektors $z = [z_{p-1}, \ldots, z_0]$ interpretiert und durch eine Elementarkonjunktion von Zustandsvariablen $k_i(z)$ repräsentiert werden.

Aus dem Automatengraph lassen sich ableiten:

1. die Zustandsüberführungsfunktion δ

- **als Gleichungen für die Elementarkonjunktionen k_j der Zustände Z_j**

$$k_j(z) := \bigvee_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \wedge h_{ij}(x)$$

Anmerkung: h_{ij} ist ein Ausdruck in x-Variablen, der die Menge aller Eingangsbelegungen X_k repräsentiert, für die ein Zustandsübergang von Z_i nach Z_j erfolgt.

$\mathcal{W}(h_{ij}, X_k) = 1 \Leftrightarrow \delta(Z_i, X_k) = Z_j$

Sie werden zur Schaltungs*analyse* benutzt.

- **oder als Gleichungen für die Zustandsvariablen z_k**

$$z_k := \bigvee_{j \in M_k} \left(\bigvee_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \wedge h_{ij}(x) \right) \qquad \text{mit} \quad j \in M_k \leftrightarrow Z_j(z_k) = 1$$

Diese dienen als Ausgangspunkt der Schaltungs*synthese*.

2. die Ausgabefunktion λ (bzw. μ)

- **für Mealy-Automaten**

$$y_k = \bigvee_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \wedge h_{ik}(x)$$

- **für Moore-Automaten**

$$y_k = \bigvee_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \wedge h_{ik}(0,1)$$

Funktionsbeschreibung

1. A ist **nichtdeterminiert**, wenn gilt: δ bzw. λ/μ sind für bestimmte *Situationen* (Z_i, X_k) mehrdeutig bestimmt:

   - $\exists (Z_i, X_k) \big(\delta(Z_i, X_k) = Z^j \;$ mit $Z^j \subseteq Z$ und $|Z^j| \geq 2\big)$ — In der Literatur auch als "nichtdeterministisch" bezeichnet.
   - $\exists (Z_i, X_k) \big(\lambda(Z_i, X_k) = Y^j \;$ mit $Y^j \subseteq Y$ und $|Y^j| \geq 2\big)$ — In der Literatur auch als "nichtdeterminiert" bezeichnet.

   Mehrdeutige Folgezustände bzw. Ausgaben werden in der Automatentabelle durch g-Parameter-Ausdrücke gekennzeichnet.

2. A ist **partiell und nichtdeterminiert**, wenn gilt: δ bzw. λ/μ definieren für bestimmte *verbotene Situationen* $(Z_i, X_k) \in (Z \times X)^*$ nicht, welcher Zustand $Z_j \in Z$ bzw. welche Ausgabe $Y_t \in Y$ erzeugt wird:

   - $\exists (Z_i, X_k) \left(\delta(Z_i, X_k) = Z\right)$
   - $\exists (Z_i, X_k) \left(\delta(Z_i, X_k) = Y\right)$

   Die Menge der *verbotenen Situationen* $(Z \times X)^* \subset (Z \times X)$ wird in der Automatentabelle durch $*$ gekennzeichnet und in den Zustands- und Ausgabegleichungen durch den Ausdruck h^* repräsentiert.

3. **verallgemeinerte Automatenfunktion:**

   - $\delta: \quad Z \times X \Rightarrow P(Z) \backslash \emptyset$
   - $\lambda: \quad Z \times X \Rightarrow P(Y) \backslash \emptyset$
   - $\mu: \quad Z \qquad \Rightarrow P(Y) \backslash \emptyset$

4. **verallgemeinerte Zustandsgleichungen:**
   jeder Zustand Z_j wird durch eine Elementarkonjunktion $k_j(z)$ repräsentiert:

   - $k_j(z) := \bigvee\limits_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \wedge h_{ij}(x, g)$
   - $h^* = \bigvee\limits_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \;\wedge\; h_i^*(x)$

     mit $\mathcal{W}\big((h^*{}_i, (Z_i, X_k)\big) = 1 \leftrightarrow (\delta(Z_i, X_k) = Z \wedge \lambda(Z_i, X_k) = Y)$

5. **verallgemeinerte z- und y-Gleichungen:**

   - $z_k := \bigvee\limits_{j \in M_k} \Big(\bigvee\limits_{i=0}^{2^p-1} \big(k_i(z) \wedge h_{ij}(x, g)\big)\Big) \qquad$ mit $\quad j \in M_k \leftrightarrow Z_j(z_k) = 1$
   - $y_k = \bigvee\limits_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \wedge h_{ik}(x, g) \qquad$ (für Mealy-Automaten)
   - $y_k = \bigvee\limits_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \wedge h_{ik}(g) \qquad$ (für Moore-Automaten)
   - $h^* = \bigvee\limits_{i=0}^{2^p-1} k_i(z) \;\wedge\; h_i^*(x)$

     mit $\mathcal{W}\big((h^*{}_i, (Z_i, X_k)\big) = 1 \leftrightarrow (\delta(Z_i, X_k) = Z \wedge \lambda(Z_i, X_k) = Y)$

6. **verallgemeinerte Bedingungen für Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit:**

Vollständigkeit $\qquad \forall i(\bigvee_{j=0}^{2^p-1} h_{ij}(x,g) \underset{*}{=} 1)$

Widerspruchsfreiheit $\qquad \forall i(\bigvee_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{2^p-1} h_{ij}(x,g) \wedge h_{ik}(x,g) \underset{*}{=} 0)$

Aus der Analyse der Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit ist ein $h^\bullet$ mit $h^\bullet \rightarrow h^* = 1$ ermittelbar:

$$h_i^\bullet = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^p-1} h_{ij}(x,g)} \quad \vee \quad \bigvee_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{2^p-1} h_{ij}(x,g) \wedge h_{ik}(x,g)$$

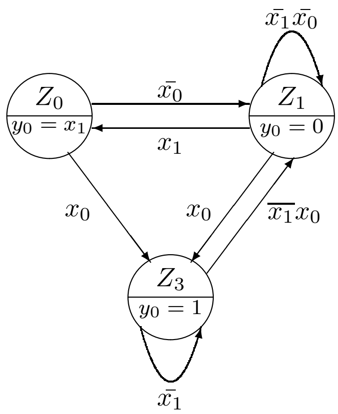
h^* kann noch weitere, systematisch nicht ableitbare Komponenten enthalten.

Automatengraphen partieller und nichtdeterminierter Automaten

- $G_\lambda = [Z, K, \omega_\delta, \omega_\lambda, \omega_*]$

enthalten gegenüber determinierten Automaten zusätzlich eine Knotengewichtsfunktion ω_*, die jedem Knoten Z_i einen Ausdruck $h_i^*(x)$ zuordnet, der verbotene Belegungen in Z_i beschreibt.

Beispiel:



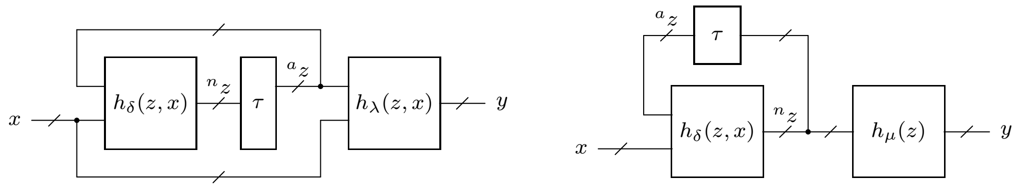
Ermittlung von $h^\bullet$:

Z_i	Vollständigkeit	Widerspruchsfreiheit	$h_i^\bullet(x)$
Z_0	$\overline{x_0} \vee x_0 = 1$	$\overline{x_0} \wedge x_0 = 0$	$h_0^\bullet = \overline{1} \vee 0 = 0$
Z_1	$x_1 \vee \overline{x_1}\ \overline{x_0} \vee x_0 = 1$	$(x_1 \wedge \overline{x_1}\ \overline{x_0}) \vee (x_0 \wedge \overline{x_1}\ \overline{x_0}) \vee (x_1 \wedge x_0) = \underline{x_1 x_0 \neq 0}$	$h_1^\bullet = \overline{1} \vee x_1 x_0 = x_1 x_0$
Z_2	$\underline{0 \neq 1}$	0	$h_2^\bullet = \overline{0} \vee 0 = 1$
Z_3	$\overline{x_1} x_0 \vee \overline{x_1} = \underline{\overline{x_1} \neq 1}$	$\overline{x_1} x_0 \wedge \overline{x_1} = \underline{\overline{x_1} x_0 \neq 0}$	$h_3^\bullet = \overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_1} x_0 = x_1 \vee x_0$

$$\Longrightarrow h^\bullet(z,x) = k_0(z) h_0^\bullet(x) \vee k_1(z)\ h_1^\bullet(x) \vee k_2(z)\ h_2^\bullet(x) \vee k_3(z)\ h_3^\bullet(x)$$
$$= \overline{z_1}\ \overline{z_0}\ 0 \vee \overline{z_1}\ z_0\ x_1 x_0 \vee z_1\ \overline{z_0}\ 1 \vee z_1\ z_0(x_1 \vee x_0)$$
$$= \overline{z_1} z_0 x_1 x_0 \vee z_1 \overline{z_0} \vee z_1 z_0 (x_1 \vee x_0)$$

Struktursynthese sequentieller Automaten

Die direkte Strukturinterpretation der Zustands- und Ausgabegleichungen (siehe Seite 32) liefert sogenannte **asynchrone** sequentielle Schaltungen mit folgender Grobstruktur:



Mealy Moore

Eine sequentielle Struktur heißt **synchron**, wenn alle Belegungswechsel ihrer Eingangs-/Ausgangs- und Zustandsvariablen nur zu definierten – über einen zentralen Takt steuerbaren – Zeitpunkten (oder -intervallen) funktionsrelevant sind und für mindestens eine halbe Taktperiode gespeichert bleiben.

Die Taktfrequenz in synchronen Strukturen ist so zu wählen, daß alle Hasards sicher beendet sind.

Die Synchronisation und Zwischenspeicherung "alter" Belegungen erfolgt bitweise in bistabilen Kippschaltungen, sogenannten Flop-Flips, die die symbolische Verzögerung τ in den oben gezeigten Strukturbildern ersetzen.

Struktursynthese mit Flip-Flops:

1. binäre Zustandskodierung
   - $|z| = n = \lceil ld|Z| \rceil \quad \Rightarrow \quad z = [z_{n-1}, \ldots, z_i, \ldots, z_0]$ als n-stelliger Zustandsvariablenvektor
2. Ermittlung der Ansteuergleichungen für Flip-Flops durch
   (a) Aufstellen der z-Gleichungen (siehe Seite 32)
   (b) Umformen der z-Gleichungen in Form der charakteristischen Gleichung der Ziel-Flip-Flops
   $z_i := z_i\overline{h_{10}}(x, z\backslash z_i) \vee \overline{z_i}h_{01}(x, z\backslash z_i)$
   (c) Ermitteln der Ansteuergleichungen durch Gleichsetzen der Koeffizienten $\overline{h_{10}}$ bzw. h_{01} der z_i-Variablen mit den Koeffizienten der Q-Variablen der charakteristischen Gleichung (z.B.: $J = h_{01},\ K = \overline{h_{10}}$ – siehe Seite 41)

   oder direktes Auslesen aus dem Graph:
   - Disjunktionen der Kantengewichte der $0-1$-Übergänge von z_i für h_{01} und der $1-0$-Übergänge für h_{10}
3. Ermittlung der Ausgabegleichungen
   - siehe Seite 32

Beispiel: Ermittlung der Ansteuergleichungen für D- und JK-Flip-Flops für den Automatengraphen auf Seite 34

1. binäre Zustandskodierung für $Z = \{Z_0, Z_1, Z_3\}$

   $|z| = n = \lceil ld|Z|\rceil = \lceil ld|3|\rceil = 2$ und somit $z = [z_1, z_0]$

2. Ermittlung der Ansteuergleichungen $z_k := h_\delta(z, x)$ durch:

   - Aufstellen der z-Gleichungen und Koeffizientenvergleich

FF-Typ	**D-FF**	**JK-FF**
char. Gleichung	$Q := D$	$Q := J\overline{Q} \vee \overline{K}Q$
z_0	$z_0 := \bar{z_1}\bar{z_0}\bar{x_0} \vee \bar{z_1}z_0\bar{x_1}\bar{x_0} \vee z_1z_0\bar{x_1}x_0 \vee \bar{z_1}z_0x_0 \vee \bar{z_1}\bar{z_0}x_0 \vee z_1z_0\bar{x_1}$ $\underset{*}{:=} \bar{z_0} \vee z_0\bar{x_1}$	
z_{0min}	$z_0 \underset{*}{:=} \underbrace{\bar{z_0} \vee \bar{x_1}}_{D_0}$	$z_0 \underset{*}{:=} \underbrace{1}_{J_0}\bar{z_0} \vee \underbrace{\bar{x_1}}_{\overline{K_0}}z_0$
Ansteuergleichung	$D_0 \underset{*}{=} \bar{z_0} \vee \bar{x_1}$	$J_0 \underset{*}{=} 1$ $\quad K_0 \underset{*}{=} x_1$
z_1	$z_1 := \bar{z_1}z_0x_0 \vee \bar{z_1}\bar{z_1}x_0 \vee z_1z_0\bar{x_1}$ $\underset{*}{:=} \bar{z_1}x_0 \vee z_1$	
z_{1min}	$z_1 \underset{*}{:=} \underbrace{z_1 \vee x_0}_{D_1}$	$z_1 \underset{*}{:=} \underbrace{x_0}_{J_1}\bar{z_1} \vee \underbrace{1}_{\overline{K_1}}z_1$
Ansteuergleichung	$D_1 \underset{*}{=} z_1 \vee x_0$	$J_1 \underset{*}{=} x_0$ $\quad K_1 \underset{*}{=} 0$

   - direktes Auslesen der (0→1)-, (1→0)- bzw. (1→1)-Übergänge aus dem Graph

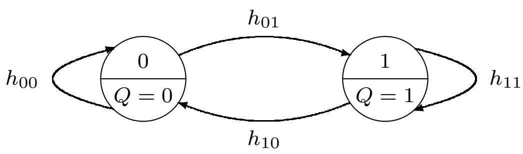
FF-Eingang	D	J	K
Übergang	$0 \rightarrow 1$ und $1 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$
z_0	$z_0 =$ siehe z_0 oben	$J_0 = \bar{z_1}\bar{x_0} \vee \bar{z_1}x_0$	$K_0 = \bar{z_1}x_1$
Ansteuergleichung	$D_0 \underset{*}{=} \bar{z_0} \vee \bar{x_1}$	$J_0 \underset{*}{=} 1$	$K_0 \underset{*}{=} x_1$
z_1	$z_1 =$ siehe z_1 oben	$J_1 = \bar{z_0}x_0$	$K_1 = z_0\bar{x_1}x_0$
Ansteuergleichung	$D_1 \underset{*}{=} z_1 \vee x_0$	$J_1 \underset{*}{=} x_0$	$K_1 \underset{*}{=} 0$

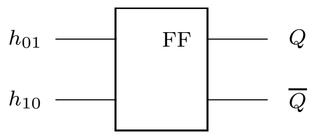
3. Ermittlung der Ausgabegleichungen $y_k = h_\lambda(z, x)$

   $y_0 = \bar{z_1}\bar{z_0}x_1 \vee z_1z_0 \underset{*}{=} \bar{z_0}x_1 \vee z_1z_0$

Flip-Flops

Flip-Flops sind elementare sequentielle Strukturen, deren Funktion abstrahiert mit zwei stabilen Zuständen beschreibbar ist:





Falls δ vollständig und widerspruchsfrei ist, gilt:

- $h_{00} = \overline{h_{01}}$ und $h_{11} = \overline{h_{10}}$

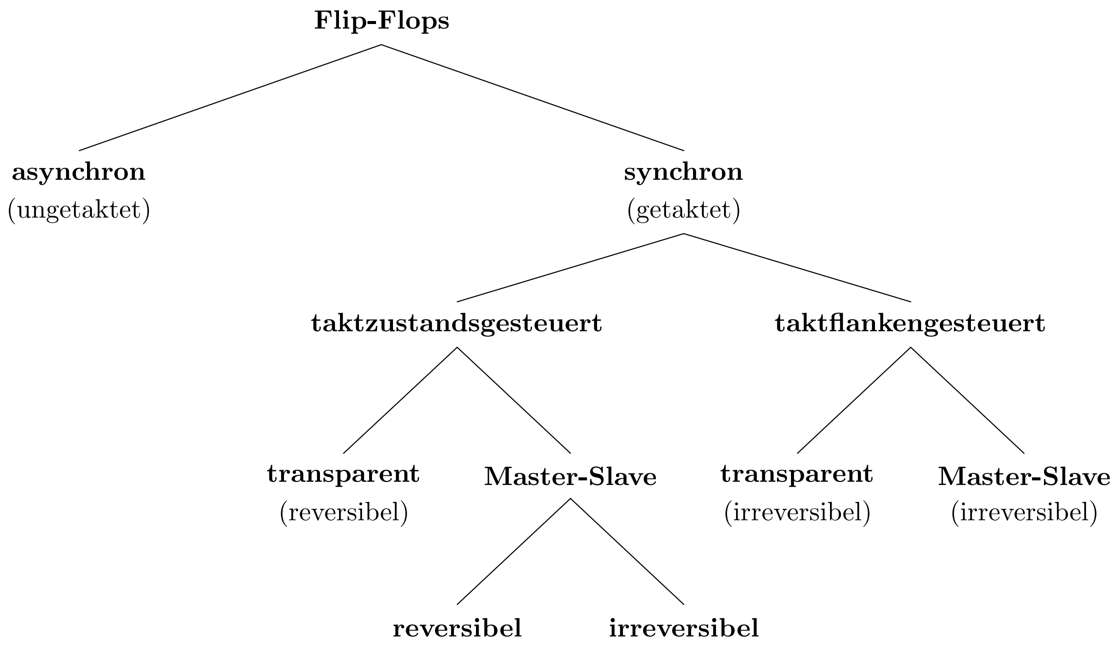
und somit:

- $\delta: \quad z := z\,\overline{h_{10}} \;\vee\; \overline{z}\,h_{01}$
- $\mu: \quad Q = z$

Das Ein-/Ausgangsverhalten eines Flip-Flops läßt sich mit folgender Gleichung charakterisieren:

- $Q := Q\,\overline{h_{10}} \;\vee\; \overline{Q}\,h_{01}$ (charakteristische Gleichung)

Klassifikation der Flip-Flops:

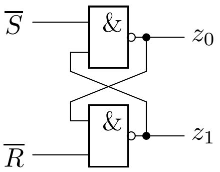


(I) Basis-FF (asynchron)

Für das RS-Flip-Flop mit

- $h_{01} = S$ und $h_{10} = R$

ist folgende vereinfachte Schaltung praxisrelevant, bei der die beiden Gatterausgänge Q und $\overline{Q}$ als Zustandsvariablen z_0 und z_1 betrachtet werden:

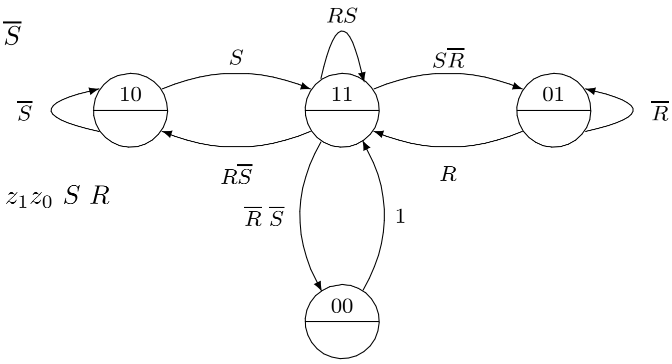


Daraus ergeben sich die z-Gleichungen:

- $z_0 := \overline{\overline{S} \wedge z_1}$
- $z_1 := \overline{\overline{R} \wedge z_0}$

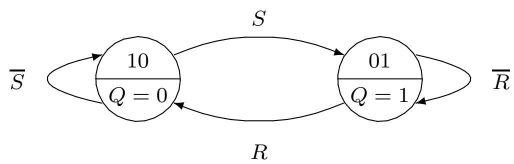
und daraus die Zustandsgleichungen für den **resultierenden Automatengraphen**:

- $\overline{z_1}\ \overline{z_0} := \overline{\overline{\overline{R} \wedge z_0}} \wedge \overline{\overline{\overline{S} \wedge z_1}} = z_1 z_0\ \overline{R}\ \overline{S}$
- $\overline{z_1}\ z_0 := \overline{z_1} z_0\ \overline{R} \vee z_1 z_0\ S\ \overline{R}$
- $z_1\ \overline{z_0} := z_1 \overline{z_0}\ \overline{S} \vee z_1 z_0\ \overline{S}\ R$
- $z_1\ z_0 := \overline{z_1}\ \overline{z_0} \vee \overline{z_1} z_0\ R \vee z_1 \overline{z_0}\ S \vee z_1 z_0\ S\ R$



Über folgende Abstraktion läßt sich der **abstrahierte Automatengraph** ableiten:
Da $Q \neq \overline{Q}$ gelten soll, müssen Z_0 und Z_3 und damit die Eigenschleife von Z_3 verboten werden. Daraus folgt $h^* = R\ S$ und:

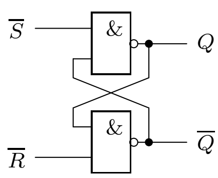
- für $S = 1$ ein Wechsel von Z_2 nach Z_1
- für $R = 1$ ein Wechsel von Z_1 nach Z_2



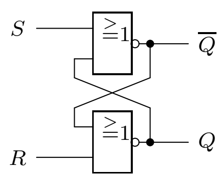
char. Gleichung: $Q := Q\ \overline{R} \ \vee\ \overline{Q}\ S$

Schaltung:

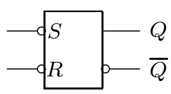
RS-NAND-FF

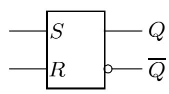


RS-NOR-FF

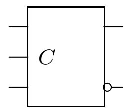


Symbol:





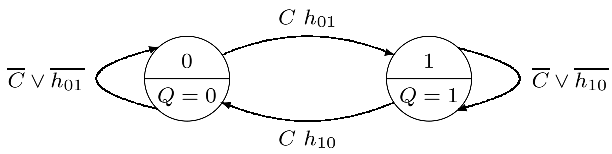
+++ Datei: arbbl-38.ss +++ Datum: 30. März 2014 +++



(II) Zustandsgesteuertes, transparentes FF (Latch)

- akzeptiert jede Eingangsflanke während des "1"-Zustandes des Taktsignals
- sofortiges Schalten des Ausgangs entsprechend der Eingangsänderungen
- Ausgang bleibt konstant während des "0"-Zustandes des Taktsignals

Automatengraph:

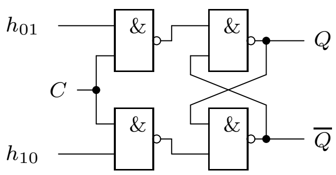


Schaltbedingung:

C	h_{01}	h_{10}	Q
1	$\uparrow$	-	$\uparrow$
1	-	$\uparrow$	$\downarrow$

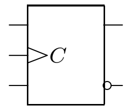
$\uparrow$ 0-1-Flanke
1 1-Zustand
- nicht relevant

Schaltung:



Beispiele:

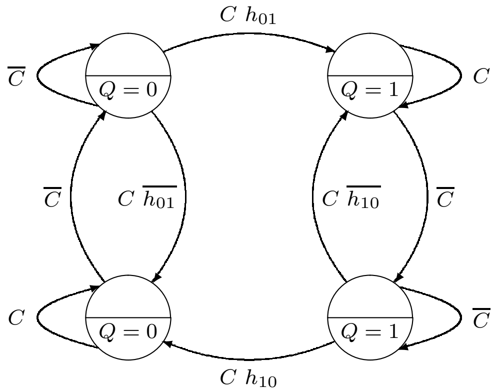
1. **zustandsgesteuertes RS-Flip-Flop (RS-Latch)**
   - $h_{01} = S$
   - $h_{10} = R$
   - Charakteristische Gleichung: $Q := S\,\overline{Q} \;\vee\; \overline{R}\,Q$
   - praktisch relevant:
     z.B. 74279 (4 RS-Latches mit C als Freigabeeingang)
2. **zustandsgesteuertes D-Flip-Flop (D-Latch)**
   - $h_{01} = D$
   - $h_{10} = \overline{D}$
   - Charakteristische Gleichung: $Q := D$
   - praktisch relevant:
     z.B. 7475 (4 D-Latches mit C als Freigabeeingang)



(V) Flankengesteuertes, transparentes FF

- akzeptiert das Eingangssignal nur zum Zeitpunkt der Taktflanke
- schaltet den Ausgang sofort und hält ihn mindestens bis zur nächsten Taktflanke konstant

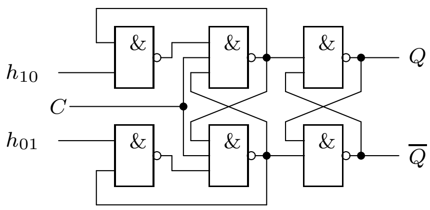
Automatengraph:
(abstrahiert)



Schaltbedingung:

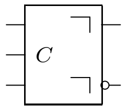
C	h_{01}	h_{10}	Q
$\uparrow$	1	-	$\uparrow$
$\uparrow$	-	1	$\downarrow$

Schaltung:



Beispiele:

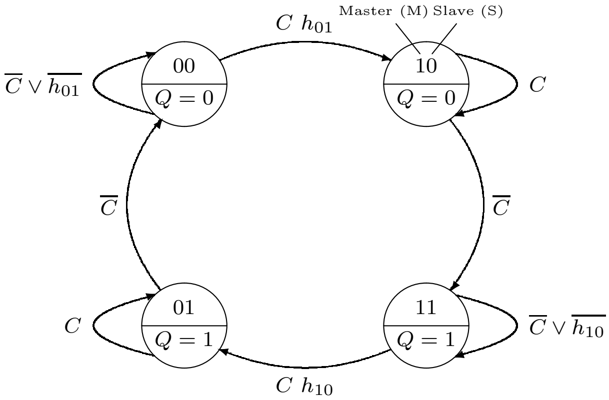
1. **taktflankengesteuertes RS-Flip-Flop**
   - $h_{01} = S$
   - $h_{10} = R$
   - Charakteristische Gleichung: $Q := S\,\overline{Q} \;\vee\; \overline{R}\,Q$
2. **taktflankengesteuertes D-Flip-Flop**
   - $h_{01} = D$
   - $h_{10} = \overline{D}$
   - Charakteristische Gleichung: $Q := D$
   - praktisch relevant: z.B. 7474 (2 D-FF's)



(IV) Zustandsgesteuertes Master-Slave-FF (irrevers.)

- akzeptiert im Master *genau eine* Eingangsflanke während des "1"-Zustandes des Taktsignals
- schaltet den Slave (abhängig vom Master) mit entgegengesetzter Taktflanke
- Ausgang entspricht Slave und ist konstant für mindestens eine Taktperiode

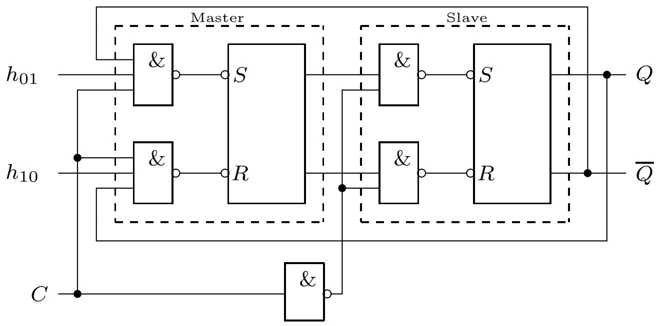
Automatengraph:



Schaltbedingung:

C	h_{01}	h_{10}	M	M	S	Q
1	↑	-	0	↑	0	0
↓	-	-	1	1	↑	↑
1	-	↑	1	↓	1	1
↓	-	-	0	0	↓	↓

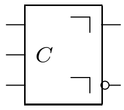
Schaltung:



Beispiele:

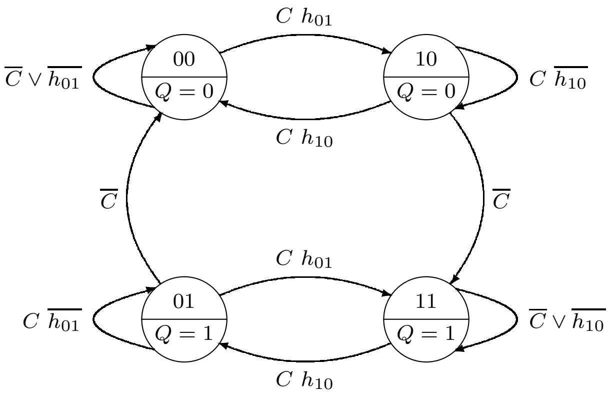
1. **JK-Master-Slave-Flip-Flop**
   - $h_{01} = J$
   - $h_{10} = K$
   - Charakteristische Gleichung: $Q := J\,\overline{Q} \;\vee\; \overline{K}\,Q$
   - praktisch relevant: z.B. 7472 (1 JK-MS-FF)
2. **Toggle-Flip-Flop** (Binärteiler, Frequenzhalbierer)
   - $h_{01} = h_{10} = 1$
   - Charakteristische Gleichung: $Q := 1\,\overline{Q} \vee \overline{1}\,Q = \overline{Q}$

(III) Zustandsgesteuertes Master-Slave-FF (reversibel)



- akzeptiert im Master alternierend *jede* Eingangsflanke während des "1"-Zustandes des Taktsignals
- schaltet den Slave (abhängig vom Master) mit entgegengesetzter Taktflanke
- Ausgang entspricht Slave und ist konstant für mindestens eine Taktperiode

Automatengraph:



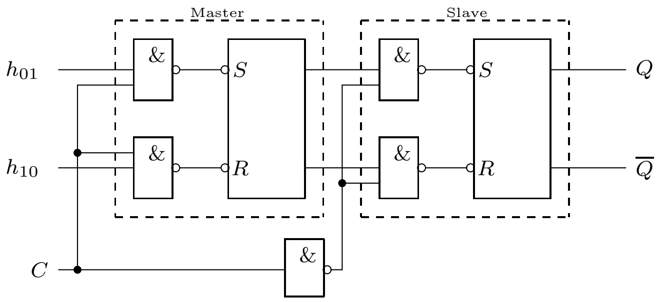
Schaltbedingung:

C	h_{01}	h_{10}	M	M	S	Q
1	1	-	0	$\uparrow$	0/1	0/1
$\downarrow$	-	-	1	1	$\uparrow$ /1	$\uparrow$ /1
1	-	1	1	$\downarrow$	1/0	1/0
$\downarrow$	-	-	0	0	$\downarrow$ /0	$\downarrow$ /0

0/1 Belegung bleibt erhalten

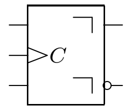
$\uparrow$ /1 schaltet auf bzw. bleibt auf 1

Schaltung:



Beispiele:

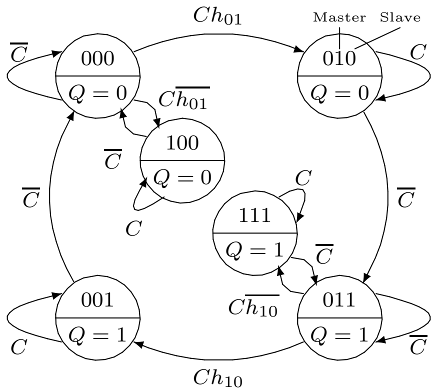
1. **RS-Master-Slave-Flip-Flop**
   - $h_{01} = S$
   - $h_{10} = R$
   - Charakteristische Gleichung: $Q := S\,\overline{Q} \;\vee\; \overline{R}\,Q$



(VI) Flankengesteuertes Master-Slave-FF

- akzeptiert das Eingangssignal nur zum Zeitpunkt der Taktflanke
- schaltet den Slave (abhängig vom Master) mit entgegengesetzter Taktflanke
- Ausgang entspricht Slave und ist konstant für mindestens eine Taktperiode

Automatengraph:



Schaltbedingung:

C	h_{01}	h_{10}	M	M	S	Q
↑	1	-	0	↑	0	0
↓	-	-	1	1	↑	↑
↑	-	1	1	↓	1	1
↓	-	-	0	0	↓	↓

Beispiele:

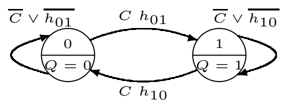
1. **JK-Master-Slave-Flip-Flop**
   - $h_{01} = J$
   - $h_{10} = K$
   - Charakteristische Gleichung: $Q := J\,\overline{Q} \;\vee\; \overline{K}\,Q$
   - praktisch relevant: z.B. 74111 (2 JK-FF's)

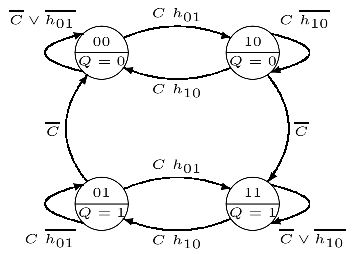
TU Ilmenau
Institut TII
FG IKS

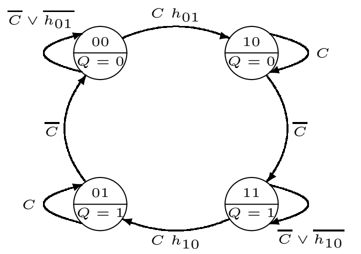
synchrone Flip-Flops

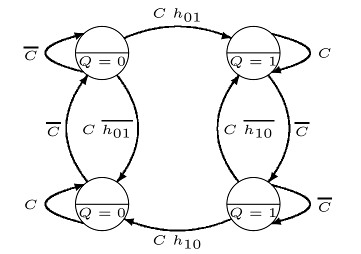
8/8

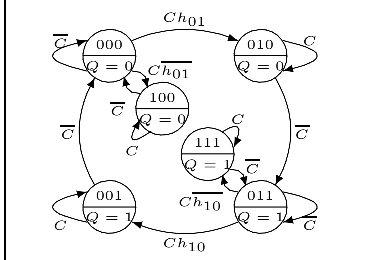
zustandsgesteuerte Flip-Flops			flankengesteuerte Flip-Flops	
transparent	**Master-Slave**		**transparent**	**Master-Slave**
reversibel	**reversibel**	**irreversibel**	**irreversibel**	**irreversibel**

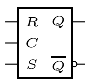
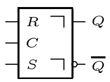
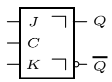
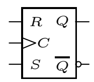
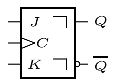


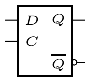
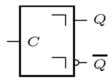
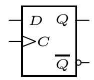








zustandsgesteuertes RS-FF (RS-Latch)	**RS-Master-Slave-FF**	**JK-Master-Slave-FF**	**flankengesteuertes RS-FF**	**JK-Master-Slave-FF**
$h_{01} = S$ $h_{10} = R$	$h_{01} = S$ $h_{10} = R$	$h_{01} = J$ $h_{10} = K$	$h_{01} = S$ $h_{10} = R$	$h_{01} = J$ $h_{10} = K$
$Q := Q\,\overline{R} \vee \overline{Q}\,S$	$Q := Q\,\overline{R} \vee \overline{Q}\,S$	$Q := Q\,\overline{K} \vee \overline{Q}\,J$	$Q := Q\,\overline{R} \vee \overline{Q}\,S$	$Q := Q\,\overline{K} \vee \overline{Q}\,J$
				
z.B. 74279		z.B. 7472		z.B. 74111

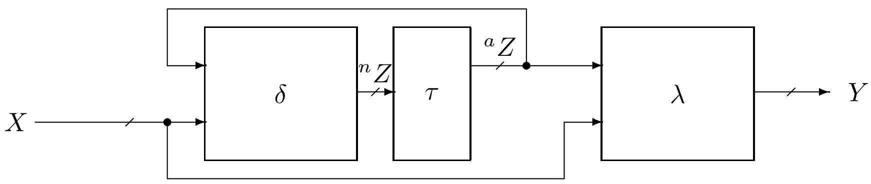
zustandsgesteuertes D-FF (D-Latch)		**Toggle-FF**	**flankengesteuertes D-FF**	
$h_{01} = D$ $h_{10} = \overline{D}$		$h_{01} = h_{10} = 1$	$h_{01} = D$ $h_{10} = \overline{D}$	
$Q := D$		$Q = \overline{Q}$	$Q := D$	
				
z.B. 7475			z.B. 7474	

Schaltzeichen nach DIN 40 900 Teil 12

Entwurf paralleler Automaten

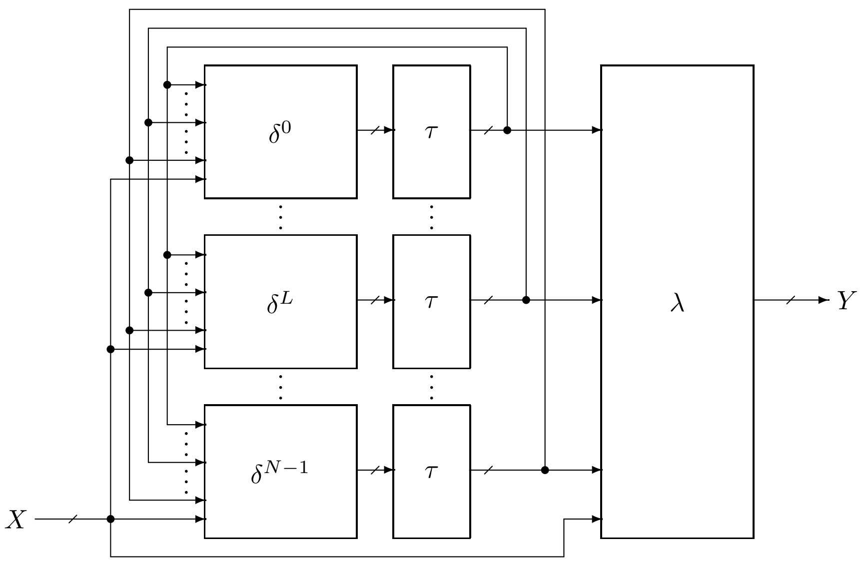
(I) Funktionelle Dekomposition

Gegeben: Automat $A = (X, Z, Y, \delta, \lambda, Z^\bullet)$ $\qquad$ $Z^\bullet \in Z$, Initialzustand



Automat A

Gesucht: Dekomposition in N Teilautomaten $A^0, A^1, \ldots, A^L, \ldots, A^{N-1}$
nach semantischen Kriterien entsprechend der angestrebten Teilfunktionen



Lösungsweg:

1. **Kodierung der Zustände des Automaten *A***

   (a) Kodierung K der Zustände $Z_i \in Z$ des Automaten A in Zustände $Z'_i \in Z'$ des Automaten A' durch N-Tupel von Zuständen $Z^L_{i^L} \in Z^L$ der Teilautomaten A^L

   - $K(Z_i) = Z'_i = [Z^0_{i^0},\ \ldots,\ Z^L_{i^L},\ \ldots,\ Z^{N-1}_{i^{N-1}}]$ mit $0 \leq i^L \leq |Z^L|$

     i^L : Zustandsindex der L-ten Komponente in der Kodierung K des Zustandes Z_i

   (b) Markieren der Initialzustände $Z^L_{i^L}$ der Teilautomaten A^L

2. **Separierung der Teilautomaten A^L**

   Hinweis: Es ist sinnvoll, bei der Herleitung der Teilautomaten A^L zunächst nur Gewichte von Übergangskanten zu betrachten, da sich die Eigenschleifengewichte als komplementäre Ausdrücke nach den Regeln der Vollständigkeit implizit ergeben.

   (a) Ermittlung der je Teilautomat A^L notwendigen Zustandsvariablen z^L

   - $|z^L| = \lceil\ ld|Z^L|\ \rceil$

   (b) Zustandsrepräsentation durch Elementarkonjunktionen $k^L_{i^L} \in k^L(z^L)$ $\qquad |k^L| = 2^{|z^L|}$

   Für die Ermittlung der Zustands-, z- und y-Gleichungen werden

   - die Zustände $Z^L_{i^L}$ der Teilautomaten A^L durch die Elementarkonjunktionen $k^L_{i^L}(z^L)$,
   - die Zustände Z'_i des Automaten A' durch Elementarkonjunktionen $k'_i(z')$

     $$- \ k'_i(z') = \bigwedge_{L=0}^{N-1} k^L_{i^L}(z^L)$$

   repräsentiert.

   (c) Nicht benötigte Elementarkonjunktionen bzw. Kombinationen davon werden dem h^*-Ausdruck zugeordnet.

   (d) Ermittlung der Zustandsgleichungen (vgl. auch Arbeitsblatt "Partielle, nichtdeterminierte Automaten 1/2", Punkt 4)

   - $$k^L_{j^L}(z^L) := \underbrace{\bigvee_{j \in M^L_{j^L}} \underbrace{\bigvee_{i=0}^{2^p-1} \Big(k'_i(z') \wedge h_{ij}(x,g)\Big)}_{\text{alle zu } Z'_j \text{ führenden Kanten}}}_{\text{für alle Knoten } Z'_j \text{, in denen } Z^L_{j^L} \text{ vorkommt}} \qquad \text{mit } j \in M^L_{j^L} \Leftrightarrow Z^L_{j^L} \in Z'_j$$

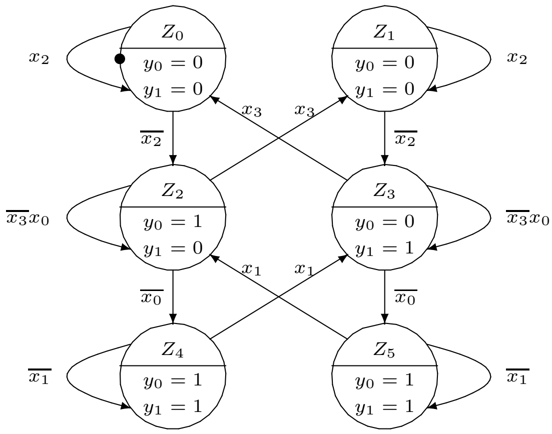
   (e) Zuordnung der y-Gleichungen zu den Zuständen der Teilautomaten A^L nach semantischen Gesichtspunkten

3. **Ermittlung der verallgemeinerten z- und y-Gleichungen**

   gemäß Arbeitsblatt "Partielle, nichtdeterminierte Automaten 1/2", Punkt 5

Beispiel

Gegeben:
Gegeben sei nebenstehender Automatengraph (Pumpensteuerung; vgl. Übungsaufgabe 5.3).
Der Initialzustand $Z^\bullet$ sei Z_0.



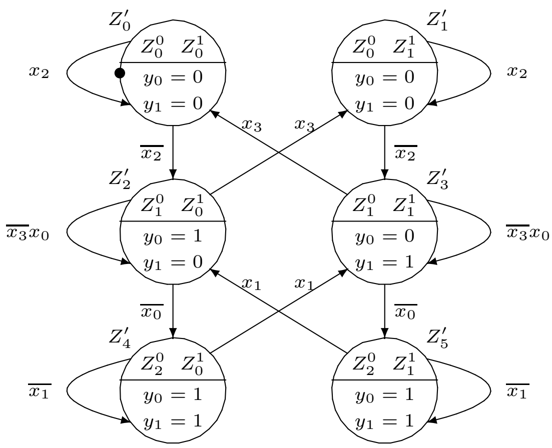
Gesucht:
Gesucht ist eine Dekomposition in Teilautomaten, so daß

- ein Automat die Anzahl der zu steuernden Pumpen in Abhängigkeit vom jeweiligen Druckpegel überwacht (Automat A^0),
- der zweite Automat die "gerechte" Verteilung der Pumpenaufträge (Schalthäufigkeit) steuert (Automat A^1).

1. Kodierung der Zustände

(a) Zustandskodierung

$$K(Z_0) = Z'_0 = [Z^0_{0^0}, Z^1_{0^1}] = [Z^0_0, Z^1_0]$$
$$K(Z_1) = Z'_1 = [Z^0_{1^0}, Z^1_{1^1}] = [Z^0_0, Z^1_1]$$
$$K(Z_2) = Z'_2 = [Z^0_{2^0}, Z^1_{2^1}] = [Z^0_1, Z^1_0]$$
$$K(Z_3) = Z'_3 = [Z^0_{3^0}, Z^1_{3^1}] = [Z^0_1, Z^1_1]$$
$$K(Z_4) = Z'_4 = [Z^0_{4^0}, Z^1_{4^1}] = [Z^0_2, Z^1_0]$$
$$K(Z_5) = Z'_5 = [Z^0_{5^0}, Z^1_{5^1}] = [Z^0_2, Z^1_1]$$



(b) Markieren der Initialzustände der Teilautomaten

- markieren von Z^0_0 im Teilautomat A^0 und Z^1_0 im Teilautomat A^1 als Initialzustände

2. Separierung der Teilautomaten

(a) Ermittlung der Zustandsvariablen

- $A^0: \quad Z^0 = \{Z^0_0, Z^0_1, Z^0_2\} \qquad |z^0| = \lceil ld3 \rceil = 2 \qquad \Rightarrow \quad z^0 = [z^0_1, z^0_0]$
- $A^1: \quad Z^1 = \{Z^1_0, Z^1_1\} \qquad |z^1| = \lceil ld2 \rceil = 1 \qquad \Rightarrow \quad z^1 = [z^1_0]$
- $\Rightarrow \quad z' = [z^0_1, z^0_0, z^1_0]$

(b) Zustandsrepräsentation durch Elementarkonjunktionen

- $Z_0^0: \quad k_0^0 = \overline{z_1^0}\ \overline{z_0^0}$
- $Z_1^0: \quad k_1^0 = \overline{z_1^0}\ z_0^0$
- $Z_2^0: \quad k_2^0 = z_1^0\ \overline{z_0^0}$

- $Z_0^1: \quad k_0^1 = \overline{z_0^1}$
- $Z_1^1: \quad k_1^1 = z_0^1$

- $Z_0': \quad k_0' = k_0^0\ k_0^1$
- $Z_1': \quad k_1' = k_0^0\ k_1^1$
- $Z_2': \quad k_2' = k_1^0\ k_0^1$
- $Z_3': \quad k_3' = k_1^0\ k_1^1$
- $Z_4': \quad k_4' = k_2^0\ k_0^1$
- $Z_5': \quad k_5' = k_2^0\ k_1^1$

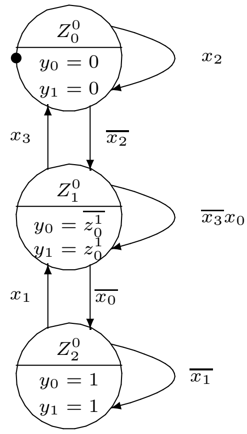
(c) Ergänzung von h^*

- $k^0 = \{k_0^0, k_1^0, k_2^0, k_3^0\}, \quad k^1 = \{k_0^1, k_1^1\}$

$\Rightarrow$ h^* ergänzt um $k_3^0\ k_0^1 \vee k_3^0\ k_1^1 = k_3^0 = z_1^0\ z_0^0 \quad \Rightarrow \quad h^* = x_3\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_1} \vee x_1\overline{x_0} \vee k_3^0$

(d) Ermittlung der Zustandsgleichungen ($ES \ldots$ Eigenschleifen)

Für den Teilautomaten A^0



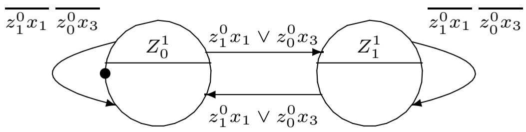
- $k_0^0 := k_3'x_3 \vee k_2'x_3 \vee ES$
  $:= k_1^0\ k_1^1\ x_3 \vee k_1^0\ k_0^1\ x_3 \vee ES$

  $k_0^0 := k_1^0 x_3 \vee ES$
- $k_1^0 := k_0'\overline{x_2} \vee k_5'x_1 \vee k_1'\overline{x_2} \vee k_4'x_1 \vee ES$
  $:= k_0^0\ k_0^1\ \overline{x_2} \vee k_2^0\ k_1^1\ x_1 \vee k_0^0\ k_1^1\overline{x_2} \vee k_2^0\ k_0^1\ x_1 \vee ES$

  $k_1^0 := k_0^0\overline{x_2} \vee k_2^0 x_1 \vee ES$
- $k_2^0 := k_2'\overline{x_0} \vee k_3'\overline{x_0} \vee ES$
  $:= k_1^0\ k_0^1\overline{x_0} \vee k_1^0\ k_1^1\overline{x_0} \vee ES$

  $k_2^0 := k_1^0\overline{x_0} \vee ES$

Für den Teilautomaten A^1



- $k_0^1 := k_3'x_3 \vee k_5'x_1 \vee ES$
  $:= k_1^0\ k_1^1\ x_3 \vee k_2^0\ k_1^1\ x_1 \vee ES$

  $k_0^1 := k_1^1\ (z_0^0 x_3 \vee z_1^0 x_1) \vee ES$
- $k_1^1 := k_2'x_3 \vee k_4'x_1 \vee ES$
  $:= k_1^0\ k_0^1\ x_3 \vee k_2^0\ k_0^1\ x_1 \vee ES$

  $k_1^1 := k_0^1\ (z_0^0 x_3 \vee z_1^0 x_1) \vee ES$

(e) Zuordnung der Ausgabefunktion zu den Teilautomaten

Die Ausgabe soll in diesem Beispiel dem Teilautomaten A^0 zugeordnet werden.

3. Ermittlung der verallgemeinerten z- und y-Gleichungen

- $z_0^0 := k_0^0\overline{x_2} \vee k_1^0\overline{x_3}x_0 \vee k_2^0 x_1 := \overline{z_1^0}\ \overline{z_0^0}\ \overline{x_2} \vee z_0^0\overline{x_3}x_0 \vee z_1^0 x_1$
- $z_1^0 := k_1^0\overline{x_0} \vee k_2^0\overline{x_1} := z_0^0\overline{x_0} \vee z_1^0\overline{x_1}$
- $z_0^1 := k_0^1(z_0^0 x_3 \vee z_1^0 x_1) \vee k_1^1\overline{(z_0^0 x_3 \vee z_1^0 x_1)}$
- $y_0 = k_1^0\overline{z_0^1} \vee k_2^0 = z_0^0\overline{z_0^1} \vee z_1^0$
- $y_1 = k_1^0 z_0^1 \vee k_2^0 = z_0^0 z_0^1 \vee z_1^0$

Anhang

Mathematische Grundlagen

Aussagen

Definitionen

elementare Aussagen — sind Sätze zur Beschreibung von Eigenschaften (Prädikaten) p, q, ... von Individuen $x_0, x_1, \ldots$ aus einem bestimmten Individuenbereich $x = \{x_0, x_1, \ldots\}$.
z.B.: x_0 hat die Eigenschaft p.
Aussagen sind entweder $wahr(w)$ oder $falsch(f)$.

Aussagenvariable — $A, B, \ldots$ sind Symbole für Aussagen.

aussagenlogische Ausdrücke — sind folgendermaßen induktiv definiert:

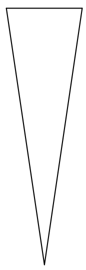
1. die Aussagenvariablen $A, B, \ldots$ und die Wahrheitswerte w und f sind Ausdrücke,
2. wenn A und B Ausdrücke sind, so sind auch $\overline{A}$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ und $(A \leftrightarrow B)$ Ausdrücke,
3. nur die nach (1) und (2) gebildeten Zeichenketten sind Ausdrücke.

Elementare und zusammengesetzte Aussagen lassen sich mit Hilfe aussagenlogischer Ausdrücke beschreiben.

Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen

		Negation (A nicht)	Negation (B nicht)	Konjunktion (A und B)	Disjunktion (A oder B)	Implikation (wenn A dann B)	Äquivalenz (A genau dann wenn B)
A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
f	f	w	w	f	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w	f
w	f	f	w	f	w	f	f
w	w	f	f	w	w	w	w

Priorität



Negation

Konjunktion

Disjunktion

alle weiteren

Wichtige *Äquivalenzen* aussagenlogischer Ausdrücke:

$A \rightarrow B$	äquivalent	$\overline{A} \vee B$
$A \leftrightarrow B$	äquivalent	$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
$\overline{A \wedge B}$	äquivalent	$\overline{A} \vee \overline{B}$
$\overline{A \vee B}$	äquivalent	$\overline{A} \wedge \overline{B}$

Kontradiktion ist ein aussagenlogischer Ausdruck, welcher nach beliebiger Wertzuweisung zu Aussagevariablen immer den Wert f hat.
Beispiele:

- $A \wedge \overline{A}$
- $A \wedge f$
- $(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge \overline{B})$

Tautologie ist ein aussagenlogischer Ausdruck, welcher nach beliebiger Wertzuweisung zu Aussagenvariablen immer den Wert w hat.
Beispiele:

- $A \vee \overline{A}$
- $A \vee w$
- $(A \rightarrow B) \vee A$

HORN – Klauseln sind aussagenlogische Ausdrücke der Form:

- $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n \rightarrow B$ "Regel"
- $w \rightarrow B$ "Fakt"

Notizen

Prädikate

Prädikat	Teil einer Aussage, der eine klassifizierende Eigenschaft $(p, q, \ldots)$ beinhaltet.
abhängige Aussage	Der Wahrheitswert abhängiger Aussagen (z.B. $p(x), q(y), \ldots$) kann erst bestimmt werden, wenn die Individuensymbole (z.B. $x, y, \ldots$) durch konkrete Individuen eines Individuenbereiches ersetzt werden.

	abhängige Aussage	*Individuenbereich von x,y*
$p(x)$	x ist durch 25 teilbar	ganze Zahlen
$q(y)$	y ist ein Sommertag	alle Tage des Dezember
$r(x, y)$	x ist Hauptstadt von y	alle Städte > 1Mio. EW

wobei z.B. p das Symbol für das Prädikat ”*ist durch 25 teilbar*“ darstellt

Prädikatenlogische Ausdrücke und deren Sprechweise

Durch Einbeziehung der Individuensymbole in den Wirkungsbereich von Quantifikatoren (Allquantor $\forall$, *Existenzquantor* $\exists$) können prädikatenlogische Ausdrücke formuliert werden.

(a) $\exists x(r(x))$ — es existiert (mindestens) ein Element im Individuenbereich von x, für das gilt, das Prädikat r ist für x *wahr* (sprich: ”*r von x ist wahr*“).

(b) $\overline{\forall x\overline{(r(x))}}$ — es gilt nicht, daß für alle Elemente aus dem Individuenbereich von x $r(x)$ nicht *wahr* ist – gleicher Sachverhalt wie unter (a);

(c) $\forall y(s(y)) = \overline{\exists y\overline{(s(y))}}$ — für alle Elemente des Individuenbereiches von y gilt, die Aussage $s(y)$ ist *wahr* bzw.: es gibt kein y, für das $s(y)$ nicht wahr ist;

(d) $\forall y \exists x(t(x, y))$ — für alle Elemente des Individuenbereiches von y existiert (mindestens) ein Element aus dem Individuenbereich von x, für welches gilt, daß $t(x, y)$ *wahr* ist;

(e) $\exists y \forall x(r(x) \to s(y))$ — es existiert (mindestens) ein Element im Individuenbereich von y, für das gilt, daß für alle Elemente des Individuenbereiches von x die Implikation $r(x) \to s(y)$ (sprich: ”*aus* $r(x)$ *folgt* $s(y)$“) *wahr* ist.

In allen gezeigten Beispielen für prädikatenlogische Ausdrücke kommen die Individuensymbole x und y *gebunden* vor, da sie im Wirkungsbereich des *Allquantors* $\forall$ bzw. des *Existenzquantors* $\exists$ stehen. Ansonsten sind die Individuensymbole *frei*.

Definitionen

Term es gilt:

1. die Wahrheitswerte w und f und alle Individuensymbole $x, \ldots$ sind Terme;
2. wenn f ein n-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term;
3. andere Terme existieren nicht.

Elementarausdruck es gilt:

1. wenn p ein n-stelliges Prädikatensymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist auch $p(t_1, \ldots, t_n)$ ein elementarer Ausdruck;
2. wenn t_1 und t_2 Terme sind, so ist auch $t_1 = t_2$ ein elementarer Ausdruck.

prädikatenlogischer Ausdruck es gilt:

1. jeder Elementarausdruck ist Ausdruck;
2. sind A und B Ausdrücke, so sind auch $\overline{A}, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$ und $A \leftrightarrow B$ Ausdrücke;
3. wenn $A(x)$ Ausdruck und x ein in $A(x)$ vorkommendes Individuensymbol ist, wobei in $A(x)$ keine Symbolfolge der Art $\forall x$ oder $\exists x$ vorkommt, so sind auch $\forall x A(x)$ oder $\exists x A(x)$ Ausdrücke;
4. nur die nach (1) bis (3) gebildeten Zeichenreihen sind prädikatenlogische Ausdrücke.

Zusammenhang zwischen Aussagen und prädikatenlogischen Ausdrücken

Prädikatenlogische Ausdrücke, in denen nur gebundene Individuensymbole vorkommen, stellen Aussagen dar.
Im folgenden werden diese als Mittel zur Definition genutzt.

Mengen

Mengendefinition	$\forall a(a \in A \leftrightarrow p_A(a))$ sprich: Für alle a gilt: a ist Element der Menge A genau dann, wenn $p_A(a)$ gilt (d.h. die Aussage *"Für a gilt $p_A(a)$"* ist *wahr*) oder $A = \{a \mid p_A(a)\}$ oder $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$
Mengenmächtigkeit	$\lvert A \rvert = m \leftrightarrow A$ enthält m Elemente
speziell	$\lvert\emptyset\rvert = 0$ $\emptyset$: die leere Menge
disjunkte Menge	A disjunkt $B \leftrightarrow \overline{\exists a(a \in A \land a \in B)}$ $A \cap B = \emptyset$
Teilmenge	$A \subseteq B \leftrightarrow \forall a(a \in A \rightarrow a \in B) \lor A = \emptyset$
echte Teilmenge	$A \subset B \leftrightarrow \forall a(a \in A \rightarrow a \in B) \land \exists a(\overline{a \in A} \land a \in B)$
Mengengleichheit	$A = B \leftrightarrow \forall a(a \in A \leftrightarrow a \in B)$
$n-Tupel$	$C = [c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0]$ (geordnete Menge)
Mengenprodukt (*Kreuzprodukt*)	$\forall a, b([a, b] \in A \times B \leftrightarrow a \in A \land b \in B)$ $A \times B$ (sprich: *"A kreuz B"*)
Mengenpotenz	$A^m = A^{m-1} \times A$ mit: $A^1 = A$
Potenzmenge	$\forall B(B \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \subseteq A)$
Mengenvereinigung	$\forall a(a \in A \cup B \leftrightarrow a \in A \lor a \in B)$
Mengenschnitt	$\forall a(a \in A \cap B \leftrightarrow a \in A \land a \in B)$
allgemein	$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \cup A_m$ bzw. $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \bigcap_{i=1}^{m-1} A_i \cap A_m$
Mengendifferenz	$\forall a(a \in B \setminus A \leftrightarrow a \in B \land \overline{a \in A})$
Komplement	$\mathcal{K}_M(A) = M \setminus A$ Komplement der Menge A bzgl. Grundmenge M
kurz	$\mathcal{K}_M(A) = \bar{A}$ bei allgemein bekannter Grundmenge
Partition	Für $\Pi(A)$ gilt: 1. $\lvert\Pi(A)\rvert > 1$ 2. $\forall M, N(M, N \in \Pi(A) \land M \neq N \rightarrow \overline{M = \emptyset} \land \overline{N = \emptyset} \land M \cap N = \emptyset)$ 3. $\forall a(a \in A \rightarrow \exists M(M \in \Pi(A) \land a \in M))$

Relationen

n − stellige Relation	$\mathcal{R} \subseteq A^n, \quad \forall t(t \in \mathcal{R} \leftrightarrow t \in A^n \wedge r(t))$
Infixnotation	$a\ r\ b$ sprich *"a ist in Relation r zu b"*

Eigenschaften zweistelliger Relationen $r \in \mathcal{R}$ mit $\mathcal{R} \subseteq A^2$; $\quad a, b, c \in A$

Reflexivität	$\forall a(a\ r\ a)$
Irreflexivität	$\forall a\overline{(a\ r\ a)}$
Transitivität	$\forall a, b, c(a\ r\ b \wedge b\ r\ c \rightarrow a\ r\ c)$
Symmetrie	$\forall a, b(a\ r\ b \rightarrow b\ r\ a)$
Antisymmetrie	$\forall a, b(a\ r\ b \wedge b\ r\ a \rightarrow a = b)$
Asymmetrie	$\forall a, b(a\ r\ b \rightarrow \overline{b\ r\ a})$
Linearität	$\forall a, b(a\ r\ b \vee b\ r\ a)$
Konnexität	$\forall a, b(a\ r\ b \vee a = b \vee b\ r\ a)$

Abbildungen

Abbildung $\mathcal{A}$	$\forall m, n([m, n] \in \mathcal{A} \leftrightarrow [m, n] \in M \times N \wedge p_A([m, n]))$
Vorbereich(Vb)	$\forall m(m \in Vb(\mathcal{A}) \leftrightarrow m \in M \wedge \exists n([m, n] \in \mathcal{A}))$
Nachbereich(Nb)	$\forall n(n \in Nb(\mathcal{A}) \leftrightarrow n \in N \wedge \exists m([m, n] \in \mathcal{A}))$
partielle Abbildung	$\mathcal{A}$ ist partiell $\leftrightarrow \exists m(m \in M \wedge \overline{m \in Vb(\mathcal{A})})$
Funktion($\mathcal{F}$)	eindeutige Abbildung, d.h. es gilt zusätzlich: $\forall m, n([m, n] \in \mathcal{F} \rightarrow \overline{\exists l(n \neq l \wedge [m, l] \in \mathcal{F})})$
symbolisch	$\mathcal{F} : M \Rightarrow N$ bzw. $n = \mathcal{F}(m)$ mit $n \in N$ und $m \in M$
Operation($\mathcal{O}$)	Funktion mit $Vb = M^n$ und $Nb = M$
symbolisch	$\mathcal{O} : M^n \Rightarrow M$ bzw. $m = \mathcal{O}[m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_0]$
Kodierung($\mathcal{K}$)	eindeutige Funktion, d.h. es gilt zusätzlich: $\forall m, n([m, n] \in \mathcal{K} \rightarrow \overline{\exists l(m \neq l \wedge [l, n] \in \mathcal{K})})$
symbolisch	$\mathcal{K} : M \Leftrightarrow N$ bzw. $n = \mathcal{K}(m)$ und $m = \mathcal{K}^{-1}(n)$
Transformation($\mathcal{T}$)	Kodierung mit $Vb = Nb = M$
symbolisch	$\mathcal{T} : M \Leftrightarrow M$

Literaturliste zur Lehrveranstaltung

"Integrierte Hard- und Softwaresysteme 1"

H.-D. Wuttke; K. Henke	Schaltsysteme – Eine automatenorientierte Einfühung, Pearson-Education Deutschland, 1. Auflage, München 2003
H.-J. Zander	Logischer Entwurf binärer Systeme, Verlag Technik, Berlin 1992
S. Hentschke	Grundzüge der Digitaltechnik, Teubner-Verlag, Stuttgart 1988
Informatik-Duden	Duden-Verlag, Mannheim, Wien, Zürich 2002
H.-D. Wuttke; K. Henke	Arbeitsblätter zur Lehrveranstaltung "Rechnerorganisation", TU Ilmenau, Fakultät IA, Ilmenau 2013, http://www.tu-ilmenau.de/iks
H.-D. Wuttke; K. Henke	Arbeitsblätter zur Lehrveranstaltung "Integrierte Hard- und Softwaresysteme 1", TU Ilmenau, Fakultät IA, Ilmenau 2014, http://www.tu-ilmenau.de/iks