

Technische Informatik (BES) – 3. Vorlesung

- Mathematische Grundlagen (1)
- Boolesche Algebren: BMA, BAA (2,3)
- Kombinatorische Schaltungen (4,5)
- Automaten (6,7)
- Sequentielle Schaltungen (8)
- Programmierbare Strukturen (9)
- Rechneraufbau und ~funktion (10,11)
- Informationskodierung (12,13,14)

BMA, BAA

BMA ... BOOLEsche Mengenalgebra

BAA ... BOOLEsche Ausdrucksalgebra



George Boole

2. November 1815 - 8. Dezember 1864

1847: *The Mathematical Analysis of Logic*

Quelle: Wikipedia.de

Technische Informatik (BES) – bisher

Funktion digitaler Schaltungen:

- Variablen, Belegungen
- BMA, Wertetabellen
- Syntax schaltalgebraischer Ausdrücke
- Semantik, Wertfunktion, Wertberechnung
- Ausdruck => Wertetabelle
- Wertetabelle => Ausdruck
 - Elementarkonjunktion, KDNF
 - Elementardisjunktion, KKNF

Wertetabelle Bezeichnung der Elemente

BMA: $\lambda: X \Rightarrow Y$

BAA: $y = h(x)$

$x = [x_2, x_1, x_0]$				$y = [y_1, y_0]$		
i	x_2	x_1	x_0	y_1	y_0	t
$X_2 = [0, 1, 0]$	0	0	0	1	1	3
	1	0	0	0	1	1
$X_6(x_1) = 1$	2	0	1	0	0	0
	3	0	1	1	0	2
$X_6(x_2) = 1$	4	1	0	1	1	3
	5	1	0	1	0	2
	6	1	1	1	0	2
	7	1	1	0	0	0

$\lambda_1(X_1) = Y_1(y_1) = 0$
 $\lambda_0(X_3) = Y_2(y_0) = 0$
 $\lambda(X_5) = Y_2 = [1, 0]$

Schaltalgebraische Ausdrücke

Bisher: formale Beschreibung der **Funktion** einer digitalen Schaltung über *Wertetabellen*

$\lambda: X \Rightarrow Y \dots$ **BMA**

Für eine *schaltungstechnische Realisierung* ist eine **strukturorientierte Beschreibung** von Interesse

\Rightarrow **schaltalgebraische Ausdrücke**

$y = h(x) \dots$ **BAA**

Wertberechnung (für Ausdrücke)

Wertberechnung für Ausdrücke $W(h_k, X_i)$:

- schrittweise Berechnung des Wertes
 - 1. Belegung der Variablen (Bits)
 - 2. Verknüpfung der Werte
- Variable $x_j \Rightarrow$ Bit der Belegung $X_i(x_j)$

$$\begin{aligned}W(x_2 \vee x_1 x_0, X_6) &= W(x_2, X_6) \vee W(x_1, X_6) \wedge W(x_0, X_6) \\ &= X_6(x_2) \vee X_6(x_1) \wedge X_6(x_0) \\ &= 1 \vee 1 \wedge 0 \text{ bzw. ausführlich } (1 \vee (1 \wedge 0))\end{aligned}$$

Ausdruck => Wertetabelle

- Berechnung der **Werte** eines Ausdrucks für alle Eingangsbelegungen:

=> Notation in Wertetabelle als **Wertverlauf**

=> **Ausdruck repräsentiert Wertetabelle**
(für eine Ausgangsvariable)

$$s_j = \overline{a_j} b_j \vee a_j \overline{b_j} = a_j \neq b_j$$
$$u_j = a_j b_j$$



a_j	b_j	s_j	u_j
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Technische Informatik (BES) – 3. Vorlesung

Funktion digitaler Schaltungen:

- Ausdruck => Wertetabelle
- **Wertetabelle => Ausdruck**
 - Elementarkonjunktion, KDNF
 - Elementardisjunktion, KKNF
- Überführung der Normalformen
- Minimierung schaltalgebraischer Ausdrücke
 - über Umformungsregeln
 - mittels Karnaugh/Veitch-Diagramm (grafisch)

Elementarkonjunktion $k_3 \Rightarrow$ KDNF

- $\overline{0} \wedge 1 \wedge 1 = 1$

- $X_3 = [0, \dots, 0, 1, 1]$

- $k_3 = \overline{x_{n-1}} \wedge \dots \wedge x_1 \wedge x_0$

- $h_i = y_1 = k_3 \vee k_5 \vee k_6 \vee k_7$

h_i in KDNF

- KDNF = Disjunktion von Elementarkonjunktionen

$$W(k_3, X_i) = 1 \text{ falls } i = 3$$

$$W(k_3, X_i) = 0 \text{ falls } i \neq 3$$

Elementardisjunktion $d_2 \Rightarrow$ KKNF

- $0 \vee \overline{1} \vee 0 = 0$
- $\mathbf{X}_2 = [0, \dots, 0, 1, 0]$
- $d_2 = \mathbf{x}_{n-1} \vee \dots \vee \overline{\mathbf{x}}_1 \vee \mathbf{x}_0$

$$W(d_2, X_i) = 0 \text{ falls } i = 2$$

$$W(d_2, X_i) = 1 \text{ falls } i \neq 2$$

- $h_i = d_0 \wedge d_1 \wedge d_2 \wedge d_4$ h_i in KKNF
- KKNF = Konjunktion von Elementardisjunktionen

Technische Informatik (BES) – 3. Vorlesung

Funktion digitaler Schaltungen:

- Ausdruck => Wertetabelle
- Wertetabelle => Ausdruck
 - Elementarkonjunktion, KDNF
 - Elementardisjunktion, KKNF
- **Überführung der Normalformen**
- Minimierung schaltalgebraischer Ausdrücke
 - über Umformungsregeln
 - mittels Karnaugh/Veitch-Diagramm (grafisch)

KKNF => KDNF

- Für vollständig bestimmte Funktionen gilt:

$$\overline{|^0} = |^1$$

- Index für $d: \in |^0 \longrightarrow$ (Ausgang $y=0$)

$$h_i = d_0 \wedge d_1 \wedge d_2 \wedge d_4$$

- Index für $k: \in |^1 \longrightarrow$ (Ausgang $y=1$)

$$h_i = k_3 \vee k_5 \vee k_6 \vee k_7$$

i	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Überführung Normalformen

De Morgan:

$$\overline{h_i \vee h_j} = \overline{h_i} \wedge \overline{h_j}$$

$$\overline{h_i \wedge h_j} = \overline{h_i} \vee \overline{h_j}$$

$$KDNF \Rightarrow KNANF \quad (\text{NAND})$$

$$KKNF \Rightarrow KNONF \quad (\text{NOR})$$

$$\overline{\overline{k_i \vee k_j}} = \overline{\overline{k_i} \wedge \overline{k_j}}$$

$$\overline{\overline{d_i \wedge d_j}} = \overline{\overline{d_i} \vee \overline{d_j}}$$

Technische Informatik (BES) – 3. Vorlesung

Funktion digitaler Schaltungen:

- Ausdruck => Wertetabelle
- Wertetabelle => Ausdruck
 - Elementarkonjunktion, KDNF
 - Elementardisjunktion, KKNF
- Überführung Normalformen
- **Minimierung schaltalgebraischer Ausdrücke**
 - über Umformungsregeln
 - mittels Karnaugh/Veitch-Diagramm (grafisch)

Technische Informatik (BES) – 3. Vorlesung

Minimierung schaltalgebraischer Ausdrücke:

- über Umformungsregeln
- mittels Karnaugh/Veitch-Diagramm (grafisch)

Minimierung:

- Vereinfachung schaltalgebraischer Ausdrücke in einen minimalen logischen Ausdruck und somit
- die Realisierung einer Schaltung mit der kleinstmöglichen Anzahl von Gattern

Minimierung über Umformungsregeln

Kommutativität

$$h_i \vee h_j = h_j \vee h_i$$

$$h_i \wedge h_j = h_j \wedge h_i$$

Arbeitsblätter S. 7, 8

Assoziativität

$$h_i \vee (h_j \vee h_k) = (h_i \vee h_j) \vee h_k = h_i \vee h_j \vee h_k$$

$$h_i \wedge (h_j \wedge h_k) = (h_i \wedge h_j) \wedge h_k = h_i \wedge h_j \wedge h_k$$

Distributivität

$$h_i \vee (h_j \wedge h_k) = (h_i \vee h_j) \wedge (h_i \vee h_k)$$

$$h_i \wedge (h_j \vee h_k) = (h_i \wedge h_j) \vee (h_i \wedge h_k)$$

Idempotenz

$$h_i \vee h_i = h_i$$

$$h_i \wedge h_i = h_i$$

Adjunktivität

$$h_i \wedge (h_i \vee h_j) = h_i$$

$$h_i \vee (h_i \wedge h_j) = h_i$$

Negation

$$h_i \vee \overline{h_i} = 1$$

$$h_i \wedge \overline{h_i} = 0$$

$$\overline{\overline{h_i}} = h_i$$

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

Priorität



Negation

Konjunktion

Disjunktion

alle weiteren

Minimierung über Umformungsregeln

Arbeitsblätter S. 7, 8

Disjunktionsregel

$$h_i \vee 0 = h_i$$

$$h_i \vee 1 = 1$$

Konjunktionsregel

$$h_i \wedge 0 = 0$$

$$h_i \wedge 1 = h_i$$

deMORGANsche Regel

$$\overline{h_i \vee h_j} = \overline{h_i} \wedge \overline{h_j}$$

$$\overline{h_i \wedge h_j} = \overline{h_i} \vee \overline{h_j}$$

Implikationsregel

$$h_i \rightarrow h_j = \overline{h_i} \vee h_j$$

Äquivalenzregel

$$h_i \sim h_j = h_i h_j \vee \overline{h_i} \overline{h_j}$$

Antivalenzregel

$$h_i \not\sim h_j = \overline{h_i \sim h_j} = h_i \overline{h_j} \vee \overline{h_i} h_j$$

Minimierung über Umformungsregeln

Arbeitsblätter S. 7, 8

Wichtige Kürzungsregeln

$$1. h_i h_j \vee \overline{h_i} h_j = (h_i \vee h_j)(\overline{h_i} \vee h_j) = h_j$$

$$2. h_i \vee h_i h_j = h_i(h_i \vee h_j) = h_i$$

$$3. h_i \vee \overline{h_i} h_j = h_i \vee h_j$$

$$4. h_i(\overline{h_i} \vee h_j) = h_i h_j$$

$$5. h_i h_j \vee h_i \overline{h_k} \vee h_j h_k = h_i \overline{h_k} \vee h_j h_k$$

$$6. (h_i \vee h_j)(h_i \vee \overline{h_k})(h_j \vee h_k) = (h_i \vee \overline{h_k})(h_j \vee h_k)$$

Minimierung über Umformungsregeln

Kürzungsregel:

$$x_2 x_1 \mathbf{x_0} \vee x_2 x_1 \overline{\mathbf{x_0}} \quad \dots \text{disjunktive Form}$$

$$(x_2 \vee x_1 \vee \mathbf{x_0})(x_2 \vee x_1 \vee \overline{\mathbf{x_0}}) \quad \dots \text{konjunktive Form}$$



Anwendung der Kürzungsregel

$$\begin{aligned}
 h(x) &= k_{10} \vee k_{11} \vee k_{15} \vee k_{13} \vee k_9 \vee k_7 \vee k_6 \vee k_{14} \\
 &= x_3 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1 x_0 \\
 &\vee x_3 x_2 x_1 x_0 \vee x_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \\
 &\vee x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 \\
 &\vee \bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_3 x_2 x_1 \bar{x}_0
 \end{aligned}$$

$$h(x) = x_3 \bar{x}_2 x_1 \vee x_3 x_2 x_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1$$

$$h(x) = x_3 x_0 \vee x_3 x_1 \vee x_2 x_1$$

=> Auflösung mit Karnaugh-Veitch !

Das war's für heute

Viel Spaß beim Wiederholen!



Kap. 3.2.3, 3.2.5.

Bis nächsten Donnerstag ...