

## Technische Informatik (Teil RO)

**Zahlensysteme, Digitale Systeme (1)**

**Boolesche Algebren: BMA, BAA (2,3)**

**Kombinatorische Schaltungen (4,5)**

**Automaten (6)**

**Sequentielle Schaltungen (7)**

**Ablaufsteuerung (8)**

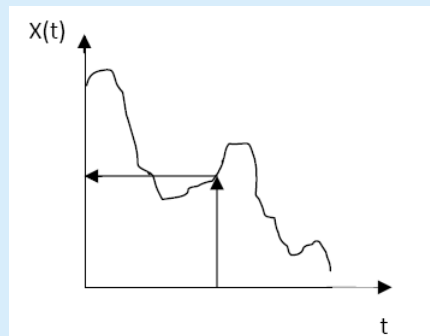
**Fortsetzung Teil Rechnerarchitektur,**

**Prof. Fengler Dezember 2018**

# Begriff „digitales Signal“

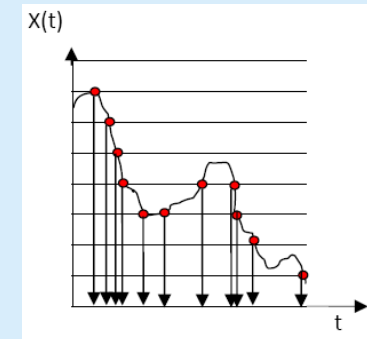
Zeit-  
konti-  
nuierlich

Wert-  
kontinuierlich



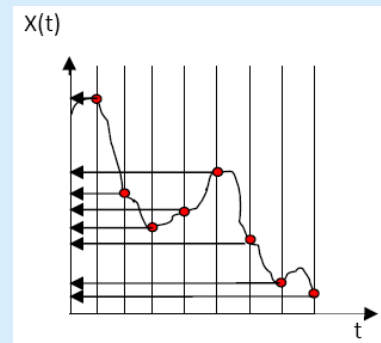
analog

Wert-  
diskret

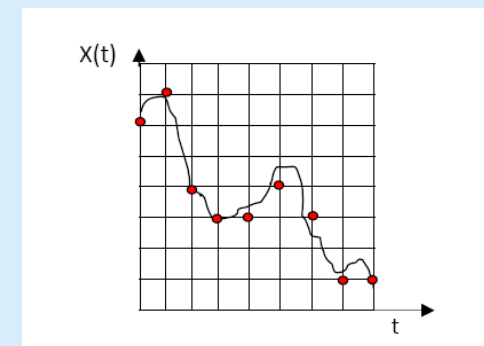


quantisiert

Zeit-  
diskret



abgetastet



digital



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
ILMENAU

# Übergang zwischen Zahlensystemen

**Zahlenwert der Dualzahl 0110 1010:**

## 2. Funktion digitaler Schaltungen:

**Variablen, Belegungen**

**BMA, Wertetabellen**

**Syntax schaltalgebraischer Ausdrücke**

**Semantik, Wertfunktion**

**BAA, Wertberechnung**

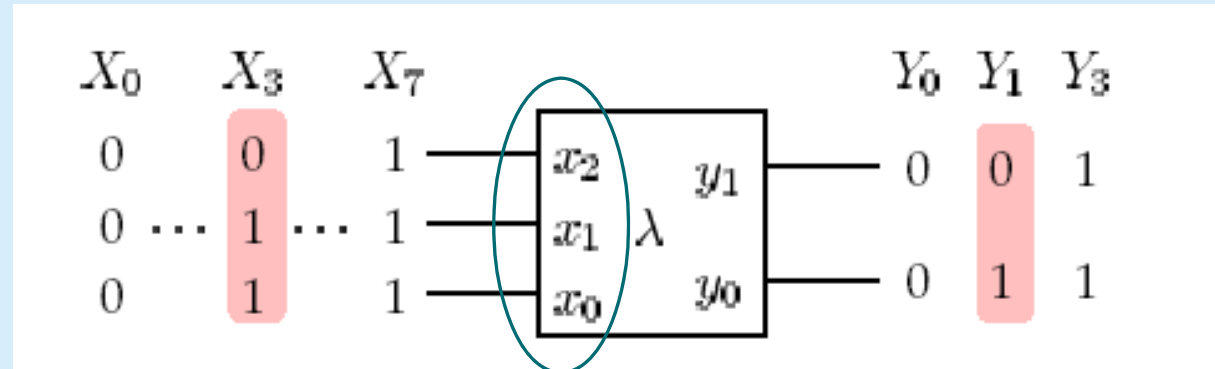
**Ausdruck  $\Rightarrow$  Wertetabelle**

**Wertetabelle  $\Rightarrow$  Ausdruck**

**Elementarkonjunktion, KDNF**

**Elementardisjunktion, KKNF**

# Variablen, Belegungen



Eingangsvektor

$$\mathbf{x} = [x_2, x_1, x_0]$$

Eingangsbelegung

$$X_3 = [0, 1, 1]$$

Belegungsindex

$$i = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$$

Ausgangsvektor

$$\mathbf{y} = [y_1, y_0]$$

Ausgangsbelegung

$$Y_1 = [0, 1]$$

Belegungsindex

$$t = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1$$

# Variablen, Belegungen

**Binäre Variable  $x_i, y_j$ :**

**2 Werte: 0,1**

**Bezeichnung mit Kleinbuchstaben**

**Belegungen  $X_i, Y_j$ :**

**$2^n$  Kombinationen:**

**$[0,0,0,\dots,0]$  bis  $[1,1,1,\dots,1]$**

**Bezeichnung mit Großbuchstaben**

**Bit einer Belegung  $X_i, Y_j$**

**z.B.  $X_3(x_1)=1$   $X_3=[0,1,1]$ ,  $x=[x_2,x_1,x_0]$**

## Bezeichnung der Elemente

### Bit einer Belegung $X_i, Y_t$

z.B.  $X_3(x_1) = 1$      $X_3 = [0, 1, 1]$ ,  $x = [x_2, x_1, x_0]$

$Y_2(y_1) = 1$      $Y_2 = [1, 0]$ ,  $y = [y_1, y_0]$

$$x = [x_2, x_1, x_0]$$

**BMA:  $\lambda: X \Rightarrow Y$**

$$y = [y_1, y_0]$$

**BAA:  $y = h(x)$**

	$i$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y_1$	$y_0$	$t$	
$X_2 = [0, 1, 0]$	0	0	0	0	1	1	3	$\lambda_1(X_1) = Y_1(y_1) = 0$
	1	0	0	1	0	1	1	$\lambda_0(X_3) = Y_2(y_0) = 0$
$X_6(x_1) = 1$	2	0	1	0	0	0	0	
	3	0	1	1	1	0	2	$\lambda(X_5) = Y_2 = [1, 0]$
$X_6(x_2) = 1$	4	1	0	0	1	1	3	
	5	1	0	1	1	0	2	
	6	1	1	0	1	0	2	
	7	1	1	1	0	0	0	





TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
ILMENAU

# Angebot zum Selbststudium

The screenshot shows a web browser window displaying a Moodle course page. The browser's address bar shows the URL <https://moodle2.tu-ilmenau.de/course/view.php?id=1576>. The page header includes the TU Ilmenau logo and navigation tabs for 'Dashboard', 'Meine Kurse', and 'Technische Informatik / Rechnerorganisation'. The main content area is titled 'Technische Informatik / Rechnerorganisation' and features a sidebar with icons for home, user, books, and calendar. The main content is organized into sections: 'Ankündigungen' (Announcements), 'Praktikum Technische Informatik / Rechnerorganisation' (Practicals), 'Einführung' (Introduction), and 'Kombinatorische Schaltungen' (Combinatorial Circuits). Under 'Praktikum', there are two items: 'Eingangstest Praktikum Technische Informatik / Rechnerorganisation' and 'Eingangstest Praktikum EMU8086', each with a checkbox. Under 'Einführung', there is a document icon for 'Mathematische Grundlagen' and a paragraph of text: 'In diesem Abschnitt werden Ihnen mathematische Grundlagen vermittelt, die für das weitere Verständnis der im Kurs verwendeten Formeln und Symbolik von Bedeutung sind. Dazu zählen Grundlagen zu **Zahlensystemen, Aussagen, Prädikaten, Mengen, Relationen und Abbildungen**. Diese Grundlagen werden Ihnen auch in anderen Gebieten der Informatik begegnen, z.B. in der Theoretischen Informatik und der Künstlichen Intelligenz, dort allerdings viel ausführlicher.' Below this is a document icon for 'Umrechnung von Zahlensystemen'. Under 'Kombinatorische Schaltungen', there is a document icon for 'Einführung' and another for 'Mengenorientie'.

# Technische Informatik (Teil RO)

## 2. Funktion digitaler Schaltungen:

Variablen, Belegungen

BMA, Wertetabellen

**Syntax schaltalgebraischer Ausdrücke**

**Semantik Wertfunktion,**

**BAA, Wertberechnung**

**Ausdruck  $\Rightarrow$  Wertetabelle**

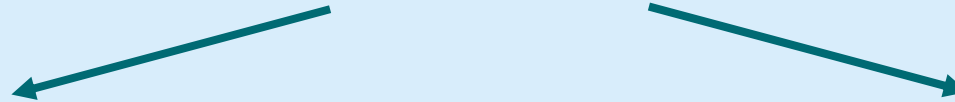
**Wertetabelle  $\Rightarrow$  Ausdruck**

**Elementarkonjunktion, KDNF**

**Elementardisjunktion, KKNF**

# Digitales System

## Architektur



### Funktion

#### Wertetabelle

$$Y = \lambda(X)$$

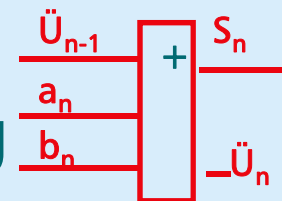
Ausgangsbelegung  $Y_t$

Eingangsbelegung  $X_i$

Belegungsmengen  $X^1$

### Struktur

#### Schaltung



$$y = x_1 \wedge x_2$$

Ausg.variable  $y_j$

Eing.variable  $x_i$

Ausdrücke  $h_k$

# schaltalgebraische Ausdrücke

Bisher: formale Beschreibung der **Funktion** einer digitalen Schaltung über *Wertetabellen*

$$\lambda: \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{Y}$$

Für eine *schaltungstechnische Realisierung* ist eine **strukturorientierte Beschreibung** von Interesse

=> schaltalgebraische Ausdrücke

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

# Schaltalgebraische Ausdrücke

## Syntax (gültige Zeichenreihen)

*schaltalgebraischer Ausdruck*

*Def. 3.48*

1. Konstanten 0 und 1 sind schaltalgebraische Ausdrücke;

# Schaltalgebraische Ausdrücke

## Syntax

**Vereinfachte Schreibweise:  
ohne äußere Klammern**

## Priorität

## Beispiel

Regel	ausführlich	verkürzt
äußere Klammern weglassen	$(x_2 \vee (x_1 \wedge x_0))$	$x_2 \vee (x_1 \wedge x_0)$
Konjunktion vor Disjunktion	$x_2 \vee (x_1 \wedge x_0)$	$x_2 \vee x_1 \wedge x_0$
Konjunktionsoperator weglassen	$x_2 \vee x_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee x_1 x_0$

# Umformungsregeln (Arbbl. S. 5,6)

*Kommutativität*

$$h_i \vee h_j = h_j \vee h_i$$

$$h_i \wedge h_j = h_j \wedge h_i$$

*Assoziativität*

$$h_i \vee (h_j \vee h_k) = (h_i \vee h_j) \vee h_k = h_i \vee h_j \vee h_k$$

$$h_i \wedge (h_j \wedge h_k) = (h_i \wedge h_j) \wedge h_k = h_i \wedge h_j \wedge h_k$$

*Distributivität*

$$h_i \vee (h_j \wedge h_k) = (h_i \vee h_j) \wedge (h_i \vee h_k)$$

$$h_i \wedge (h_j \vee h_k) = (h_i \wedge h_j) \vee (h_i \wedge h_k)$$

*Idempotenz*

$$h_i \vee h_i = h_i$$

$$h_i \wedge h_i = h_i$$

*Adjunktivität*

$$h_i \wedge (h_i \vee h_j) = h_i$$

$$h_i \vee (h_i \wedge h_j) = h_i$$

*Negation*

$$h_i \vee \bar{h}_i = 1$$

$$h_i \wedge \bar{h}_i = 0$$

$$\overline{\bar{h}_i} = h_i$$

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

## Priorität



Negation

Konjunktion

Disjunktion

alle weiteren

## Umformungsregeln (Arbbl. S. 5,6)

*Disjunktionsregel*

$$h_i \vee 0 = h_i$$

$$h_i \vee 1 = 1$$

*Konjunktionsregel*

$$h_i \wedge 0 = 0$$

$$h_i \wedge 1 = h_i$$

*deMORGANsche Regel*

$$\overline{h_i \vee h_j} = \overline{h_i} \wedge \overline{h_j}$$

$$\overline{h_i \wedge h_j} = \overline{h_i} \vee \overline{h_j}$$

*Implikationsregel*

$$h_i \rightarrow h_j = \overline{h_i} \vee h_j$$

*Äquivalenzregel*

$$h_i \sim h_j = h_i h_j \vee \overline{h_i} \overline{h_j}$$

*Antivalenzregel*

$$h_i \not\sim h_j = \overline{h_i \sim h_j} = h_i \overline{h_j} \vee \overline{h_i} h_j$$



# Umformungsregeln (Arbbl. S. 5,6)

## Wichtige Kürzungsregeln

$$1. h_i h_j \vee \overline{h_i} h_j = (h_i \vee h_j)(\overline{h_i} \vee h_j) = h_j$$

$$2. h_i \vee h_i h_j = h_i(h_i \vee h_j) = h_i$$

$$3. h_i \vee \overline{h_i} h_j = h_i \vee h_j$$

$$4. h_i(\overline{h_i} \vee h_j) = h_i h_j$$

$$5. h_i h_j \vee h_i \overline{h_k} \vee h_j h_k = h_i \overline{h_k} \vee h_j h_k$$

$$6. (h_i \vee h_j)(h_i \vee \overline{h_k})(h_j \vee h_k) = (h_i \vee \overline{h_k})(h_j \vee h_k)$$

# Technische Informatik (Teil RO)

## 2. Funktion digitaler Schaltungen:

**Variablen, Belegungen**

**BMA, Wertetabellen**

**Syntax schaltalgebraischer Ausdrücke**

**Semantik Wertfunktion,**

**BAA, Wertberechnung**

**Ausdruck  $\Rightarrow$  Wertetabelle**

**Wertetabelle  $\Rightarrow$  Ausdruck**

**Elementarkonjunktion, KDNF**

**Elementardisjunktion, KKNF**

**E: Menge syntaktisch korrekter Ausdrücke**

**X: Menge der Eingangsbelegungen**

**Semantik**

**$W: E \times X \Rightarrow \{0,1\}$**

**Ausdruck  $h_i \in E$**

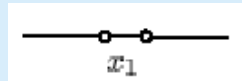
**hat bei bestimmter Belegung  $X_k \in X$**

**bestimmten Wert  $W(h_i, X_k) = 1$  bzw.  $= 0$**

## Wertberechnung: BAA

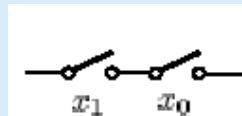
### Rechenregeln für Konstante:

**Negation:**



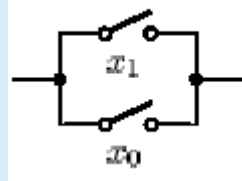
$$\bar{1} = 0 \quad \bar{0} = 1$$

**Konjunktion:**



$$1 \wedge 1 = 1; \quad 0 \wedge 1 = 0 \wedge 0 = 0$$

**Disjunktion:**



$$0 \vee 0 = 0; \quad 0 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$$

$x_1$	$x_0$	$\wedge$	$\vee$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

## Rechenregeln: BAA

**Wertberechnung für Ausdrücke  $W(h_i, X_k)$ :**

**Schrittweise Berechnung des Wertes**

**1. Belegung der Variablen (Bits)**

**2. Verknüpfung der Werte**

**Variable  $x_j \Rightarrow$  Bit der Belegung  $X_k(x_j)$**

$$\begin{aligned}
 W(x_2 \vee x_1 x_0, X_6) &= W(x_2, X_6) \vee W(x_1, X_6) \wedge W(x_0, X_6) \\
 &= X_6(x_2) \vee X_6(x_1) \wedge X_6(x_0) \\
 &= 1 \vee 1 \wedge 0 \text{ bzw. ausführlich } (1 \vee (1 \wedge 0))
 \end{aligned}$$

# Technische Informatik (Teil RO)

## 2. Funktion digitaler Schaltungen:

**Variablen, Belegungen**

**BMA, Wertetabellen**

**Syntax schaltalgebraischer Ausdrücke**

**Semantik, Wertfunktion**

**BAA, Wertberechnung**

**Ausdruck => Wertetabelle**

**Wertetabelle => Ausdruck**

**Elementarkonjunktion, KDNF**

**Elementardisjunktion, KKNF**

# Ausdruck $\Rightarrow$ Wertetabelle

**Berechnung der Werte aller Belegungen:**

**Wertverlauf**

**Notation in Wertetabelle**

**$\Rightarrow$  Ausdruck repräsentiert Wertetabelle  
(für eine Ausgangsvariable)**

# Technische Informatik (Teil RO)

## 2. Funktion digitaler Schaltungen:

**Variablen, Belegungen**

**BMA, Wertetabellen**

**Syntax schaltalgebraischer Ausdrücke**

**Semantik, Wertfunktion**

**BAA, Wertberechnung**

**Ausdruck  $\Rightarrow$  Wertetabelle**

**Wertetabelle  $\Rightarrow$  Ausdruck**

**Elementarkonjunktion, KDNF**

**Elementardisjunktion, KKNF**



# Wertetabelle $\Rightarrow$ Ausdruck

## Wertetabelle $\Rightarrow$ Ausdruck

### Zerlegung des Problems:

wegen  $0 \vee 1 = 1$  je „1“ ein Ausdruck

gesucht: Elementar - Ausdruck

$$1 \wedge 1 = 1, 1 \wedge 0 = 0$$

**Elementarkonjunktion**

**kanonisch** (alle Variablen von  $x$ )

# Elementarkonjunktion

$$1 \wedge 1 = 1, 0 \vee 1 = 1$$

$$X_3 = [0, 0, \dots, 0, 1, 1]$$

$$W(k_3, X_i) = 1 \text{ falls } i = 3$$

$$W(k_3, X_i) = 0 \text{ falls } i \neq 3$$

$$X_3 = [0, 0, \dots, 0, 1, 1]$$

$$k_3 = \overline{x_{n-1}} \wedge \dots \wedge x_1 \wedge x_0$$

## Elementarkonjunktion $k_2 \Rightarrow$ KDNF

$$1 \wedge 1 = 1, 0 \vee 1 = 1$$

$$X_2 = [0, \dots, 0, 1, 0]$$

$$k_2 = \overline{x_{n-1}} \wedge \dots \wedge x_1 \wedge \overline{x_0}$$

$$h_i = k_1 \vee k_2 \vee k_5 \vee k_6 \vee k_7 \quad h_i \text{ in KDNF}$$

**KDNF = Disjunktion von  
Elementarkonjunktionen**

## Elementardisjunktion $d_2 \Rightarrow$ KKNF

$$0 \vee 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0$$

$$\mathbf{x}_2 = [0, \dots, 0, 1, 0]$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{x}_{n-1} \vee \dots \vee \overline{\mathbf{x}_1} \vee \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{d}_0 \wedge \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_4 \quad \mathbf{h}_i \text{ in KKNF}$$

**KKNF = Konjunktion von  
Elementardisjunktionen**

# Überführung Normalformen (Arbbl. S. 7)

## De Morgan:

$$h_i \vee h_j = \overline{h_i \wedge h_j}$$

$$h_i \wedge h_j = \overline{h_i \vee h_j}$$

$$\mathbf{KDNF} \Rightarrow \mathbf{KNANF} \quad k_i \vee k_j = \overline{k_i \wedge k_j}$$

$$\mathbf{KKNF} \Rightarrow \mathbf{KNONF} \quad d_i \wedge d_j = \overline{d_i \vee d_j}$$

Das war's für heute

**Viel Spaß beim Wiederholen!**



**Kap. 3.1.1, 3.2.1, 3.2.5.1, 3.2.5.2**

**Bis nächsten Dienstag um 15.00 ...**