TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
ILMENAU

Technische Informatik (RO)

Informationskodierung (1)

Boolesche Algebren: BMA, BAA (2,3)

Kombinatorische Schaltungen (4)

Sequentielle Schaltungen (6,7)

Informationskodierung (8)

Fortsetzung Teil Rechnerarchitektur,

Prof. Fengler Dezember 2018

Technische Informatik, Wdh. 2. Vorlesung

Funktion digitaler Schaltungen:

Variablen, Belegungen

BMA, Wertetabellen

Syntax schaltalgebraischer Ausdrücke

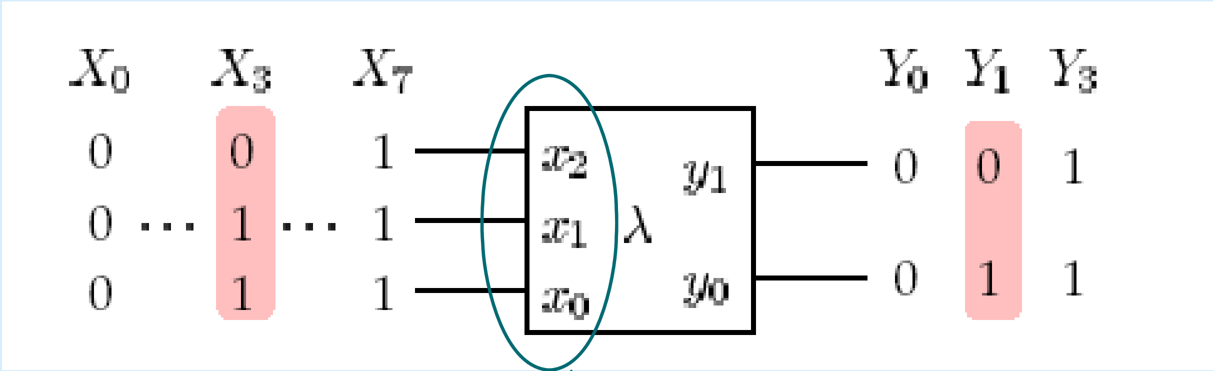
Semantik, Wertfunktion

BAA, Wertberechnung

Ausdruck => Wertetabelle

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
ILMENAU

Variablen, Belegungen



Eingangsvektor	$x=[x_2, x_1, x_0]$
Eingangsbelegung	$X_3=[\ 0,\ 1,\ 1]$
Belegungsindex	$i = 0*2^2+1*2^1+1*2^0=3$
Ausgangsvektor	$y = [y_1, y_0]$
Ausgangsbelegung	$Y_1=[\ 0,\ 1]$
Belegungsindex	$t = 0*2^1+1*2^0=1$

Bezeichnung der Elemente

$x = [x_2, x_1, x_0]$

$y = [y_1, y_0]$

i	x_2	x_1	x_0	y_1	y_0	t
0	0	0	0	1	1	3
1	0	0	1	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	2
4	1	0	0	1	1	3
5	1	0	1	1	0	2
6	1	1	0	1	0	2
7	1	1	1	0	0	0

$X_2 = [0, 1, 0]$

$X_6(x_1) = 1$

$X_6(x_2) = 1$

$\lambda_1(X_1) = Y_1(y_1) = 0$

$\lambda_0(X_3) = Y_2(y_0) = 0$

$\lambda(X_5) = Y_2 = [1, 0]$

Schaltalgebraische Ausdrücke

Syntax (gültige Zeichenreihen)

schaltalgebraischer Ausdruck *Def. 3.48*

1. Konstanten 0 und 1 sind schaltalgebraische Ausdrücke;
2. binäre Variablen x_r eines n-stelligen Vektors x sind schaltalgebraische Ausdrücke;
3. wenn $h_i(x)$ und $h_j(x) \in H$ Ausdrücke sind, so auch:

$$\begin{array}{ll} \overline{h_i(x)}, & (h_i(x) \rightarrow h_j(x)), \\ (h_i(x) \wedge h_j(x)), & (h_i(x) \sim h_j(x)), \\ (h_i(x) \vee h_j(x)), & (h_i(x) \not\sim h_j(x)) \end{array}$$

4. andere Zeichenketten sind keine schaltalgebraischen Ausdrücke.

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
ILMENAU

Semantik: Wertberechnung

Wertberechnung: BAA

Rechenregeln für Konstante:

Negation: $\overline{1}=0 \quad \overline{0}=1$

Konjunktion: $1\wedge1=1;\ 0\wedge1=0\wedge0=0$

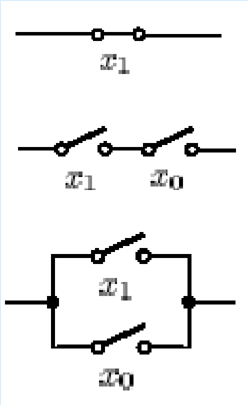
Disjunktion: $0\vee0=0;\ 0\vee1=1\vee1=1$

für Variable x_1, x_0 Werte einsetzen

Negation:

Konjunktion:

Disjunktion:



x_1	x_0	$\wedge$	$\vee$	$/x_1$
0	0	0	0	I
0	I	0	I	I
I	0	0	I	0
I	I	I	I	0

Rechenregeln: BAA

Wertberechnung für Ausdrücke $W(h_i, X_k)$:

Schrittweise Berechnung des Wertes

1. Belegung der Variablen (Bits)

2. Verknüpfung der Werte

Variable x_j => Bit der Belegung $X_k(x_j)$

$$
\begin{aligned}
W(x_2 \vee x_1 x_0, X_6) &= W(x_2, X_6) \vee W(x_1, X_6) \wedge W(x_0, X_6) \\
&= X_6(x_2) \vee X_6(x_1) \wedge X_6(x_0) \\
&= 1 \vee 1 \wedge 0 \ \text{ bzw. ausführlich } \ (1 \vee (1 \wedge 0))
\end{aligned}
$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
ILMENAU

Ausdruck => Wertetabelle

Berechnung der Werte aller Belegungen:

Wertverlauf

Notation in Wertetabelle

=> Ausdruck repräsentiert Wertetabelle

(für eine Ausgangsvariable)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Normalformen

Minimierung über Kürzungsregeln

Minimierung über Karnaugh-Diagramm

Elementarkonjuktion k_3 => KDNF

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Beispiel: Ausdruck für Übertrag

$$X_3 = [0\ ,\dots,\ 0,\ 1,\ 1]$$

$$k_3 = \overline{x}_{n-1} \wedge \dots \wedge x_1 \wedge x_0$$

$$h_i = y_1 = k_3 \vee k_5 \vee k_6 \vee k_7$$ **h_i in KDNF**

KDNF = Disjunktion von Elementarkonjunktionen

Elementardisjuktion d_2 => KKNF

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

$$\overline{1} \vee 0 \vee 0 = 0$$

$$X_2 = [0, \ldots, 0, 1, 0]$$

$$d_2 = x_{n-1} \vee \ldots \vee \overline{x_1} \vee x_0$$

$h_i = d_0 \wedge d_1 \wedge d_2 \wedge d_4$ $\qquad$ h_i in **KKNF**

KKNF = Konjunktion von Elementardisjunktionen

Überführung Normalformen (Arbbl. S. 7)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

De Morgan:

$$\overline{h_i \vee h_j} = \overline{h_i} \wedge \overline{h_j}$$

$$\overline{h_i \wedge h_j} = \overline{h_i} \vee \overline{h_j}$$

KDNF => KNANF $\quad \overline{\overline{k_i \vee k_j}} = \overline{\overline{k_i} \wedge \overline{k_j}}$

KKNF => KNONF $\quad \overline{\overline{d_i \wedge d_j}} = \overline{\overline{d_i} \vee \overline{d_j}}$

Technische Informatik (RO) 3. Vorlesung

Normalformen

Minimierung über Kürzungsregeln

Minimierung über Karnaugh-Diagramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Wdhlg.: Kürzungsregeln (Arbbl. S. 5,6)

Kommutativität	$h_i \vee h_j = h_j \vee h_i$
	$h_i \wedge h_j = h_j \wedge h_i$
Assoziativität	$h_i \vee (h_j \vee h_k) = (h_i \vee h_j) \vee h_k = h_i \vee h_j \vee h_k$
	$h_i \wedge (h_j \wedge h_k) = (h_i \wedge h_j) \wedge h_k = h_i \wedge h_j \wedge h_k$
Distributivität	$h_i \vee (h_j \wedge h_k) = (h_i \vee h_j) \wedge (h_i \vee h_k)$
	$h_i \wedge (h_j \vee h_k) = (h_i \wedge h_j) \vee (h_i \wedge h_k)$
Idempotenz	$h_i \vee h_i = h_i$
	$h_i \wedge h_i = h_i$
Adjunktivität	$h_i \wedge (h_i \vee h_j) = h_i$
	$h_i \vee (h_i \wedge h_j) = h_i$
Negation	$h_i \vee \overline{h_i} = 1$
	$h_i \wedge \overline{h_i} = 0$
	$\overline{\overline{h_i}} = h_i$
	$\overline{0} = 1$
	$\overline{1} = 0$

Priorität

- Negation
- Konjunktion
- Disjunktion
- alle weiteren

Wdhlg.: Kürzungsregeln (Arbbl. S. 5,6)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

*Disjunktions*regel	$h_i \vee 0 = h_i$
	$h_i \vee 1 = 1$
*Konjunktions*regel	$h_i \wedge 0 = 0$
	$h_i \wedge 1 = h_i$
*deMORGAN*sche Regel	$\overline{h_i \vee h_j} = \overline{h_i} \wedge \overline{h_j}$
	$\overline{h_i \wedge h_j} = \overline{h_i} \vee \overline{h_j}$
Implikationsregel	$h_i \rightarrow h_j = \overline{h_i} \vee h_j$
Äquivalenzregel	$h_i \sim h_j = h_i h_j \vee \overline{h_i}\,\overline{h_j}$
Antivalenzregel	$h_i \not\sim h_j = \overline{h_i \sim h_j} = h_i \overline{h_j} \vee \overline{h_i} h_j$

Wdhlg.: Kürzungsregeln (Arbbl. S. 5,6)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Wichtige Kürzungsregeln

1. $h_i h_j \vee \overline{h_i} h_j \;=\; (h_i \vee h_j)(\overline{h_i} \vee h_j) \;=\; h_j$
2. $h_i \vee h_i h_j \;=\; h_i(h_i \vee h_j) \;=\; h_i$
3. $h_i \vee \overline{h_i} h_j \;=\; h_i \vee h_j$
4. $h_i(\overline{h_i} \vee h_j) \;=\; h_i h_j$
5. $h_i h_j \vee h_i \overline{h_k} \vee h_j h_k \;=\; h_i \overline{h_k} \vee h_j h_k$
6. $(h_i \vee h_j)(h_i \vee \overline{h_k})(h_j \vee h_k) \;=\; (h_i \vee \overline{h_k})(h_j \vee h_k)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Normalformen

Minimierung über Kürzungsregeln

<u>Minimierung über Karnaugh-Diagramm</u>

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Kürzen ⇔ Erweitern

Kürzen

$$h(x) = k_{10} \vee k_{11} \vee k_{15} \vee k_{13} \vee k_9 \vee k_7 \vee k_6 \vee k_{14}$$

$$\begin{aligned} &= x_3\,\overline{x_2}\,x_1\,\overline{x_0} \vee x_3\,\overline{x_2}\,x_1\,x_0 \\ &\vee x_3\,x_2\,x_1\,x_0 \vee \boxed{x_3\,x_2\,\overline{x_1}\,x_0} \\ &\vee \boxed{x_3\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,x_0} \vee \boxed{\overline{x_3}\,x_2\,x_1\,x_0} \\ &\vee \boxed{\overline{x_3}\,x_2\,x_1\,\overline{x_0}} \vee x_3\,x_2\,x_1\,\overline{x_0} \end{aligned}$$

$$h(x) = x_3\,\overline{x_2}\,x_1 \vee x_3\,x_2\,x_0 \vee x_2\,x_1\,\overline{x_0} \vee \boxed{x_3\,\overline{x_1}\,x_0} \vee \boxed{\overline{x_3}\,x_2\,x_1}$$

$$h(x) = x_3\,x_0 \vee x_3\,x_1 \vee x_2\,x_1$$

x3*x0+x3*x1+x2*x1

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Karnaugh-Veith-Diagramme

Kürzungsregel

benachbarte Belegungen

… unterscheiden sich in genau 1Bit

Xi=[1,1,1] Xj=[0,1,1]

s= 0,1,…, n-1

r=s=2, n=3

benachbarte Ausdrücke

x2*x1*/x0+x2*x1*x0

in genau einer Variablen (negiert)

Karnaugh-Veith-Diagramme

Kürzungsregel

benachbarte Belegungen

[1,1,1][0,1,1]

... unterscheiden sich in genau 1Bit

benachbarte Ausdrücke (r=2)

hi=x2*x1*x0+/x2*x1*x0

$$h_i(x) \underset{0}{=} x_r\, h_i(x) \vee \overline{x_r}\, h_i(x)$$

= x1*x0

... in genau einer Variablen

(negiert/unnegiert)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Karnaugh-Veith-Diagramme

benachbarte Belegungen grafisch so anordnen, dass Nachbarn nebeneinander liegen, Matrix, Nachbarschaft je Spalte

und je Zeile

Funktionswerte

y_k	x_0	0	1	1	0
	x_1	0	0	1	1
x_3	x_2				
0	0	$\lambda(X_0)$	$\lambda(X_1)$	$\lambda(X_3)$	$\lambda(X_2)$
0	1	$\lambda(X_4)$	$\lambda(X_5)$	$\lambda(X_7)$	$\lambda(X_6)$
1	1	$\lambda(X_{12})$	$\lambda(X_{13})$	$\lambda(X_{15})$	$\lambda(X_{14})$
1	0	$\lambda(X_8)$	$\lambda(X_9)$	$\lambda(X_{11})$	$\lambda(X_{10})$

H.- D. Wuttke ,
K. Henke

Karnaugh-Veith-Diagramme

Andere Randbezeichnung

y_k	x_0	0	1	1	0
	x_1	0	0	1	1
x_3	x_2				
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1

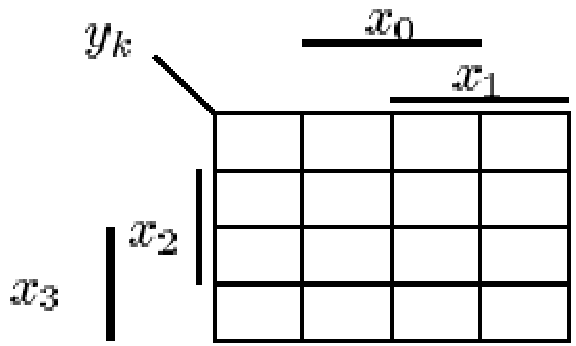
y_k	x_0	0	0	1	1
	x_1	1	0	0	1
x_3	x_2				
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1

y_k	x_0	0	0	1	1
	x_1	1	0	0	1
x_3	x_2				
1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Andere Darstellungen, (nur für DNF)

y_k	x_0	0	1	1	0
	x_1	0	0	1	1
x_3	x_2				
0	0	$\lambda(X_0)$	$\lambda(X_1)$	$\lambda(X_3)$	$\lambda(X_2)$
0	1	$\lambda(X_4)$	$\lambda(X_5)$	$\lambda(X_7)$	$\lambda(X_6)$
1	1	$\lambda(X_{12})$	$\lambda(X_{13})$	$\lambda(X_{15})$	$\lambda(X_{14})$
1	0	$\lambda(X_8)$	$\lambda(X_9)$	$\lambda(X_{11})$	$\lambda(X_{10})$

y_k		$\overline{x_0}$	x_0	x_0	$\overline{x_0}$
		$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	x_1	x_1
$\overline{x_3}$	$\overline{x_2}$				
$\overline{x_3}$	x_2				
x_3	x_2				
x_3	$\overline{x_2}$				



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
ILMENAU

Karnaugh-Veith-Diagramme

Gleiches Beispiel - andere Kürzung

y_k	x_0	0	1	1	0
	x_1	0	0	1	1
x_3	x_2				
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1

$k_{14} \vee k_{15}$

$\boldsymbol{k_{11} \vee k_{10}}$

(a)

x3*x2*x1*/x0+x3*x2*x1*x0=x3*x2*x1

x3*/x2*x1*x0+x3*/x2*x1*/x0=x3*/x2*x1

x3*x2*x1+x3*/x2*x1*x0= x3*x1

Karnaugh-Veith-Diagramme

benachbarte Belegungen

können gekürzt werden.

Kürzung:

1 Variable => 2er Block

2 Variable => 4er Block

3 Variable => 8er Block

4 Variable =>16er Block

...

	y_k	x_0	0	1	1	0
		x_1	0	0	1	1
x_3	x_2					
0	0		$\lambda(X_0)$	$\lambda(X_1)$	$\lambda(X_3)$	$\lambda(X_2)$
0	1		$\lambda(X_4)$	$\lambda(X_5)$	$\lambda(X_7)$	$\lambda(X_6)$
1	1		$\lambda(X_{12})$	$\lambda(X_{13})$	$\lambda(X_{15})$	$\lambda(X_{14})$
1	0		$\lambda(X_8)$	$\lambda(X_9)$	$\lambda(X_{11})$	$\lambda(X_{10})$

x_3

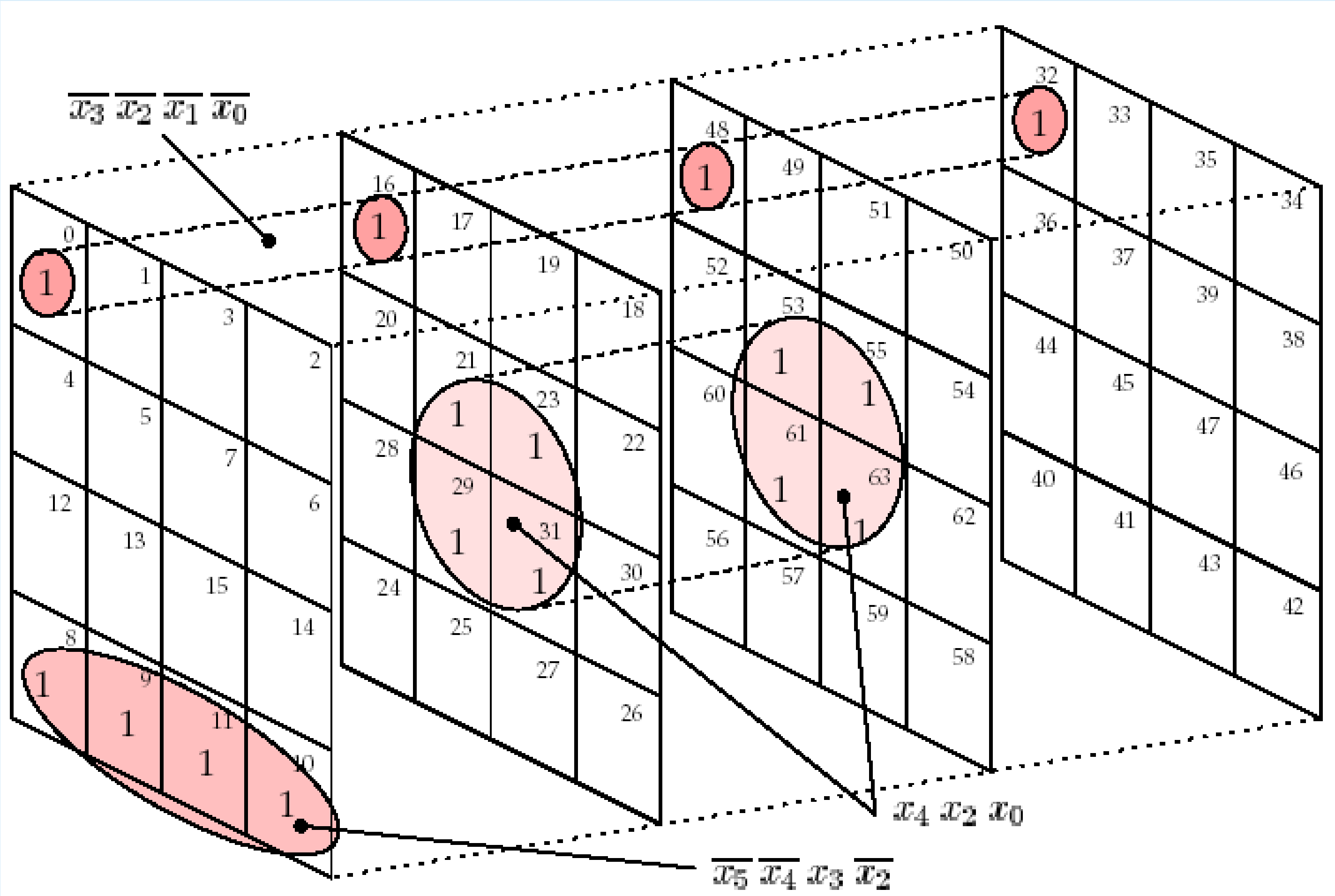
$/x_2 /x_1$

Applet

Karnaugh-Veith-Diagramme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Bei 6 Variablen: Applet zum Üben



Das war‘s für heute

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Viel Spaß beim Wiederholen!

Kap. 3.2.3, 3.3.1, 3.6.1 - 3.6.3, 4.1, 4.2

Bis nächsten Dienstag um 15.00 ...