SS18

AKKTA: Hashverfahren

0. Kapitel: Einführung, Beispiele

Hashverfahren

Martin Dietzfelbinger

Mai 2018

0.1 Grundbegriffe

Gegeben:

Universum U (auch ohne Ordnung) und Wertebereich R.

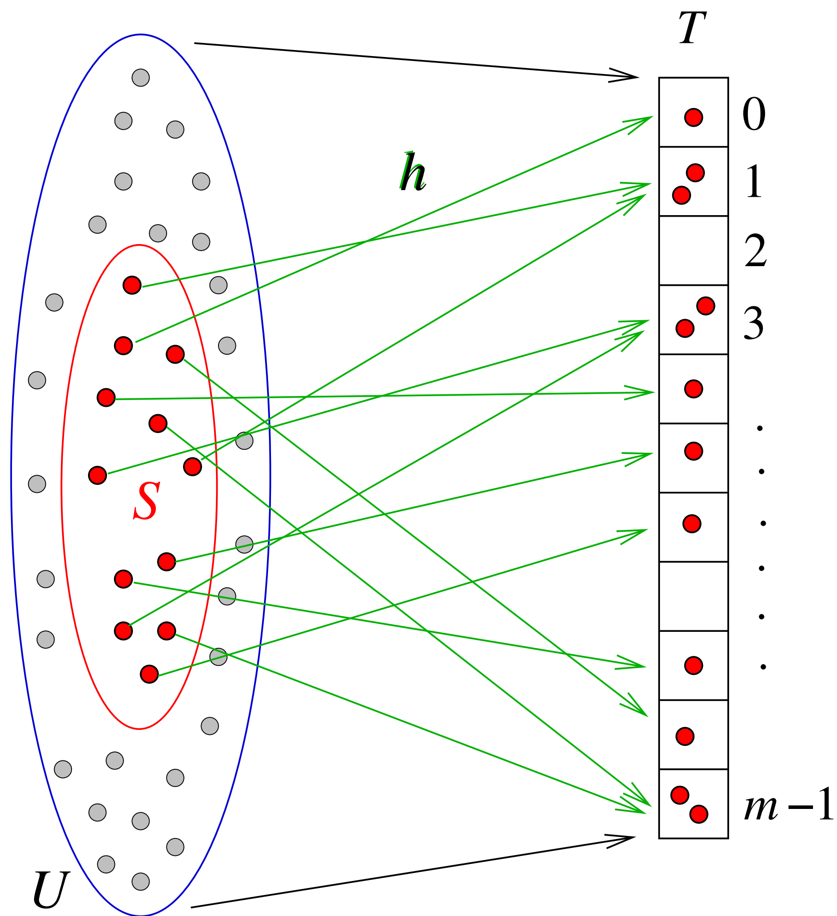
Hashverfahren (oder **Schlüsseltransformationsverfahren**) implementieren **Wörterbuch** oder **dynamische Abbildung**

$$f : S \to R, \text{ mit } S \subseteq U \text{ endlich.}$$

Ziel:

Zeit $O(1)$ pro Operation
„im Durchschnitt“
unabhängig vom Umfang der Datenstruktur!

Gegensatz **Suchbäume:** Zeit $O(\log(n))$ pro Operation.



Hashfunktion*

$\boldsymbol{h\colon U \to [m]}$

$\boldsymbol{U}$: Universum der Schlüssel

$\boldsymbol{[m] = \{0, \ldots, m-1\}}$: Indexbereich für Tabelle $\boldsymbol{T}$

$S \subseteq U$, $|S| = n$

* to hash (*engl.*): kleinhacken, kleinschneiden

Grundansatz:

Speicherung von $f\colon S \to R$ in m Tabelle `T[`0`..`$m-1$`]`.

Aus Schlüssel $x \in U$ wird ein Index $h(x) \in [m]$ **berechnet**.

„x wird in $h(x)$ umgewandelt/**transformiert**."

Idealvorstellung:

Speichere Paar $(x, f(x))$ in Zelle `T[`$h(x)$`]`.

$h(c_1 \dots c_r) = \mathsf{num}(c_3) \bmod 13$

j	$(x, f(x))$ mit $h(x) = j$
0	$(\texttt{Januar}, 31)$; $(\texttt{Juni}, 30)$
1	$(\texttt{Februar}, 28)$
2	$(\texttt{September}, 30)$
3	
4	$(\texttt{Maerz}, 31)$; $(\texttt{April}, 30)$
5	
6	$(\texttt{August}, 31)$; $(\texttt{Oktober}, 31)$
7	
8	$(\texttt{Mai}, 31)$; $(\texttt{November}, 30)$
9	
10	
11	$(\texttt{Juli}, 31)$
12	$(\texttt{Dezember}, 31)$

Kollisionen bei $j = 0, 3, 6, 8$.

Definition 0.1.1

Eine Funktion $h\colon U \to [m]$ heißt eine **Hashfunktion**.

Wenn $S \subseteq U$ gegeben ist (oder ein $f\colon S \to R$), verteilt h die Schlüssel in S auf $[m]$.

$\boldsymbol{B_j} := \{x \in S \mid h(x) = j\}$. „Behälter“ („bucket“)

Idealfall: Die Einschränkung $h \upharpoonright S$ ist **injektiv**, d. h. für jedes $j \in [m]$ existiert höchstens ein $x \in S$ mit $h(x) = j$.

Beispiel: Auf

$S_1 = \{\texttt{Februar}^{(1)}, \texttt{Maerz}^{(4)}, \texttt{Mai}^{(8)}, \texttt{Juni}^{(0)}, \texttt{Juli}^{(11)}, \texttt{Dezember}^{(12)}\}$

ist obiges h injektiv,

nicht aber auf $S_2 = \{\texttt{Januar}^{(0)}, \texttt{Mai}^{(8)}, \texttt{Juli}^{(11)}, \texttt{November}^{(8)}\}$.

Sprechweise: h **perfekt für** S $:\Leftrightarrow$ $h{\restriction}S$ injektiv.

Falls h perfekt für S:
Speichere x bzw. (x, r) in Tabellenplatz `T[`$h(x)$`]`, für $x \in S$.

$\rightarrow$ Konstante Zugriffszeit.

Kollision: $x, y \in S$, $x \neq y$, $h(x) = h(y)$.

Bei zufälligen Hashwerten sind Kollisionen „praktisch unvermeidlich".

Fall: h „rein zufällig“, $|S| = n$, $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. D. h.:

Uniformitätsannahme (UF*):

Werte $h(x_1), \ldots, h(x_n)$ in $[m]^n$ sind „rein zufällig“, d. h.:
jeder der m^n Vektoren $(j_1, \ldots, j_n) \in [m]^n$
kommt mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/m^n$
als $(h(x_1), \ldots, h(x_n))$ vor.

Mit (UF*): **Pr**(keine Kollision) =

$$= \textbf{Pr}(h \text{ ist injektiv auf } \{x_1, \ldots, x_n\}) =$$

$$= \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \cdots \cdot \frac{m-n+1}{m} = \ldots$$

(Für $i = 1, \ldots, n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass $h(x_i)$ in $[m] - \{h(x_1), \ldots, h(x_{i-1})\}$ liegt, genau $\frac{m-i+1}{m}$.)

$$\ldots = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)$$

$$< e^0 \cdot e^{-\frac{1}{m}} \cdot e^{-\frac{2}{m}} \cdot \cdots \cdot e^{-\frac{n-1}{m}} = e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}.$$

(denn für $x \neq 0$ ist $1 + x < e^x$), also . . .

$$\boxed{\textbf{Pr}(h \text{ injektiv auf } S) < e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}.}$$

Wunsch: Linearer Platzverbrauch, also

$$\text{„\textbf{Auslastungsfaktor}"} \quad \alpha = \frac{n}{m}$$

nicht kleiner als eine Konstante α_0, z. B. $\alpha \geq \frac{1}{2}$ stets. Dann:

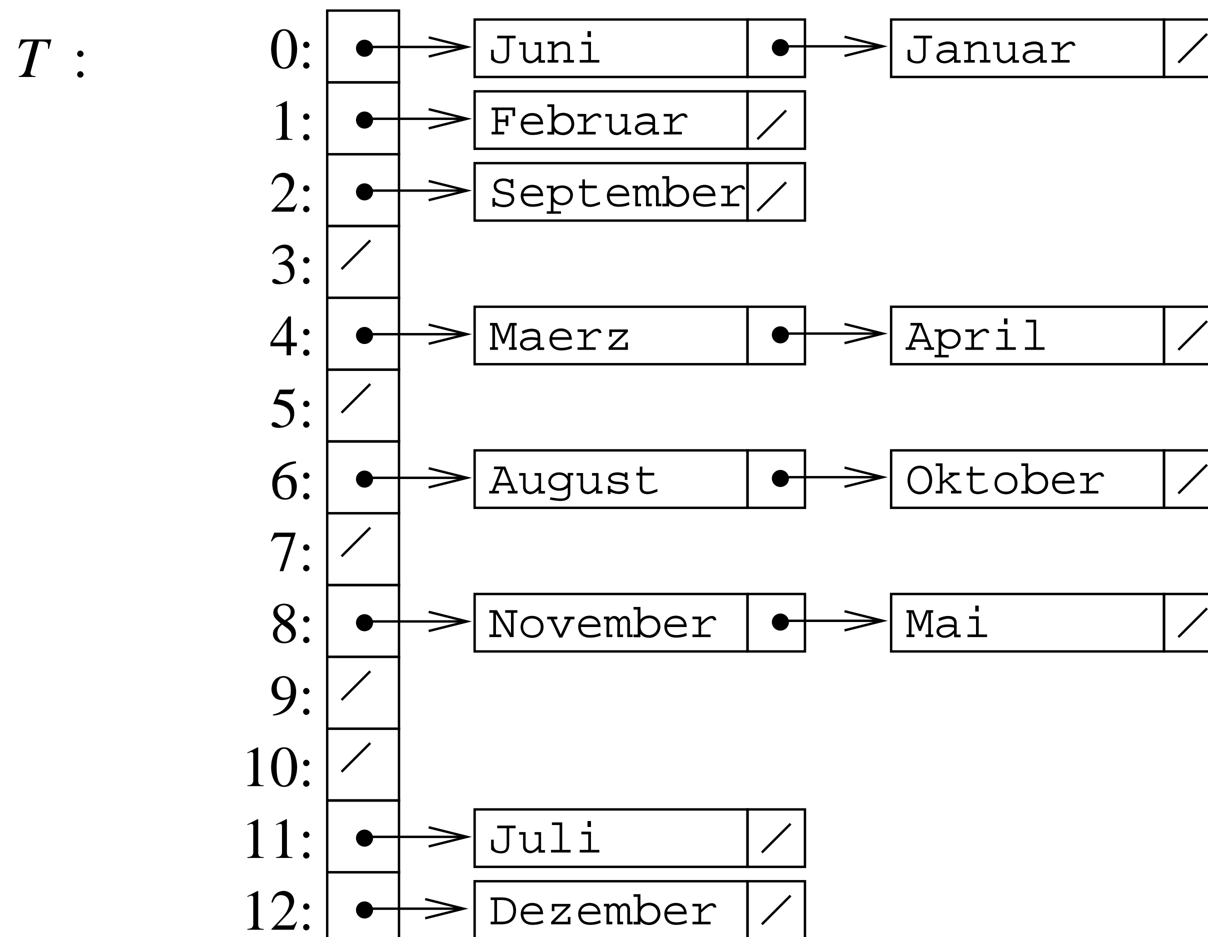
$$\textbf{Pr}(h \text{ injektiv auf } S) \leq e^{-\alpha_0(n-1)/2}.$$

Winzig für nicht ganz kleine n! D. h.: Falls h nicht auf S abgestimmt ist, kommen Kollisionen praktisch immer vor.

$\rightarrow$ **Kollisionsbehandlung** ist notwendig.

0.2 Hashing mit verketteten Listen

Beispiel:



0.2 Hashing mit verketteten Listen

engl.: **chained hashing**

Auch: **„offenes Hashing“**, weil man Platz außerhalb von T benutzt.

In `T`$[0..m-1]$: **Zeiger** auf die Anfänge
von m **einfach verketteten linearen Listen** $L_0, \ldots, L_{m-1}$.

Liste L_j enthält die Einträge mit Schlüsseln x aus Behälter/Bucket

$$\boldsymbol{B_j} = \{x \in S \mid h(x) = j\}.$$

Algorithmen(skizzen)

empty(m): Erzeugt Array `T[0..`$m-1$`]` mit m NULL-Zeigern/NULL-Referenzen **und legt $h\colon U \to [m]$ fest**.

Kosten: $\Theta(m)$.

Beachte: Man wählt h, ohne S zu kennen!

lookup(x): Berechne $j = h(x)$;
suche Schlüssel x in Liste L_j bei `T[`j`]`;
falls Eintrag (x, r) gefunden: **return** r;
// **erfolgreiche Suche**
sonst: **return** „*nicht vorhanden*“
// **erfolglose Suche**

Kosten/Zeit: $O(1 +$ Zahl der Schlüsselvergleiche „$x = y$?“$)$

... falls die Auswertung von $h(x)$
und ein Schlüsselvergleich Zeit $O(1)$ kostet.

Erfolglose Suche: Exakt $|B_j|$ Schlüsselvergleiche.

Erfolgreiche Suche: Höchstens $|B_j|$ Schlüsselvergleiche.

insert(x, r): Berechne $j = h(x)$;
suche Schlüssel x in Liste L_j bei `T[`j`]`;
falls gefunden: // **erfolgreiche Suche**
ersetze Daten bei x durch r;
sonst: // **erfolglose Suche, Normalfall!**
füge (x, r) in Liste `T[`j`]` ein.

delete(x): Berechne $j = h(x)$;
suche Schlüssel x in Liste L_j bei `T[`j`]`;
falls gefunden:
// **erfolgreiche Suche, Normalfall!**
lösche Eintrag $(x, f(x))$ aus L_j;
sonst: tue nichts. // **erfolglose Suche**

Kosten jeweils: wie bei *lookup*.

Ziel:

Analysiere „**erwartete Kosten**“ für *lookup*, *insert*, *delete*.

Hierfür genügt:

Analysiere „**erwartete Anzahl der Schlüsselvergleiche**“.

Vorausgesetzt: Irgendeine Quelle für „**Zufall**“. (Dazu später mehr.)

Pr(A): Wahrscheinlichkeit für **Ereignis** A.

E(X): Erwartungswert der **Zufallsvariablen** X.

Abgeschwächte „Uniformitätsannahme (UF$_2$)“:

Für je 2 Schlüssel $x \neq z$ in U gilt:

$$\mathbf{Pr}(h(x) = h(z)) \leq \frac{1}{m}$$

0.3 Lineares Sondieren

oder **„offene Adressierung“**: Kollisionsbehandlungs-Methode.

Idee: Für jeden Schlüssel $x \in U$ gibt es eine **Sondierungsfolge** $h(x,0), h(x,1), h(x,2), \ldots$ in $[m]$.

Beim **Einfügen** von x und **Suchen** nach x werden die Zellen von T in dieser Reihenfolge untersucht, bis eine leere Zelle oder der Eintrag x gefunden wird. – Günstig:

$(*)$ $h(x,0), h(x,1), \ldots, h(x,m-1)$ erreicht jede Zelle, d. h.: $(h(x,0), h(x,1), h(x,2), \ldots, h(x,m-1))$ ist eine **Permutation** von $[m]$.

Wenn $(*)$ gilt und mindestens eine Zelle in T leer ist, dann endet jede erfolglose Suche in einer leeren Zelle.

Lineares Sondieren

$h(x,k) = (h(x)+k) \bmod m,\ k = 0,1,2,\ldots$

Offensichtlich ist $(*)$ erfüllt.

Nächste Tabelle: „Wunschplätze“ für die Schlüssel.

Übernächste Tabelle: Einfügen gemäß linearem Sondieren.

$$h(c_1 \ldots c_r) = (\mathsf{num}(c_3) + 11) \bmod 13$$

j	x
0	`September`$^{(0)}$
1	`Maerz`$^{(1)}$ `April`$^{(1)}$
2	
3	
4	`August`$^{(4)}$ `Oktober`$^{(4)}$
5	
6	`Mai`$^{(6)}$ `November`$^{(6)}$
7	
8	
9	`Juli`$^{(9)}$
10	`Dezember`$^{(10)}$
11	`Januar`$^{(11)}$ `Juni`$^{(11)}$
12	`Februar`$^{(12)}$

Tabelle $\mathtt{T}[0..12]$:

Platz	Eintrag
0	Juni $^{(11)}$
1	Maerz $^{(1)}$
2	April $^{(1)}$
3	September $^{(0)}$
4	August $^{(4)}$
5	
6	Mai $^{(6)}$
7	
8	
9	Juli $^{(9)}$
10	
11	Januar $^{(11)}$
12	Februar $^{(12)}$

Tabelle $\texttt{T}[0..12]$:

Platz	Eintrag
0	Juni $^{(11)}$
1	Maerz $^{(1)}$
2	April $^{(1)}$
3	September $^{(0)}$
4	August $^{(4)}$
5	Oktober $^{(4)}$
6	Mai $^{(6)}$
7	November $^{(6)}$
8	
9	Juli $^{(9)}$
10	Dezember $^{(10)}$
11	Januar $^{(11)}$
12	Februar $^{(12)}$

empty(m): Lege leeres Array `T`$[0\,..\,m-1]$ an.
Arrayeintrag: (Schlüssel,Wert (in R)) oder *leer*.
Initialisiere alle Plätze `T`$[j]$ mit *leer*.
Initialisiere `load` mit 0, `maxload` mit Wert $< m$.

insert(x,r): $j \leftarrow h(x)$;
Finde erstes l in der Folge j, $(j+1) \bmod m$, $(j+2) \bmod m$, . . .
mit `T`$[l]$`.key` $= x$ **oder** `T`$[l]$ $=$ *leer*.
Im Fall `T`$[l]$`.key` $= x$: // **erfolgreiche Suche**
`T`$[l]$`.data` $\leftarrow r$;
Im Fall `T`$[l]$ $=$ *leer*: // **erfolglose Suche**
Falls `load` $=$ `maxload`: „Überlaufbehandlung“
(z. B. Verdopplung von `T`, Neustart von *insert*(x,r));
Sonst: `T`$[l] \leftarrow (x,r)$; `load++`.

lookup(x): $j \leftarrow h(x)$;

Finde erstes l in der Folge j, $(j+1) \bmod m$, $(j+2) \bmod m$, ...

mit `T[`l`].key` $= x$ **oder** `T[`l`]` $=$ *leer*.

Im Fall `T[`l`].key` $= x$: **return** `T[`l`].data`.

// **erfolgreiche Suche**

Im Fall `T[`l`]` $=$ *leer*: **return** „*nicht vorhanden*“.

// **erfolglose Suche**

Korrektheit der Suche: Bei *lookup*(x) werden genau dieselben Zellen von `T` untersucht wie beim Einfügen von x.

Da kein Element bewegt/gelöscht wird, wird auf diese Weise die Zelle, in der x sitzt, wieder erreicht, falls vorhanden

oder eine leere Zelle – wir müssen nur sicherstellen, dass **immer eine leere Zelle** vorhanden ist, also `load` $\leq m-1$ ist.

Erinnerung: (UF*): $h(x_1), \ldots, h(x_n)$ **rein zufällig**.

Proposition 0.3.1 Ohne Beweis.

Bei linearem Sondieren in einer Tabelle der Größe m mit Schlüsselmenge $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ gilt, mit $\boldsymbol{\alpha = \frac{n}{m}}$:

Die **erwartete** (nach (UF*)) Anzahl von Schlüsselvergleichen (besuchte Arrayzellen) bei **erfolgloser Suche** nach $y \notin S$ ist

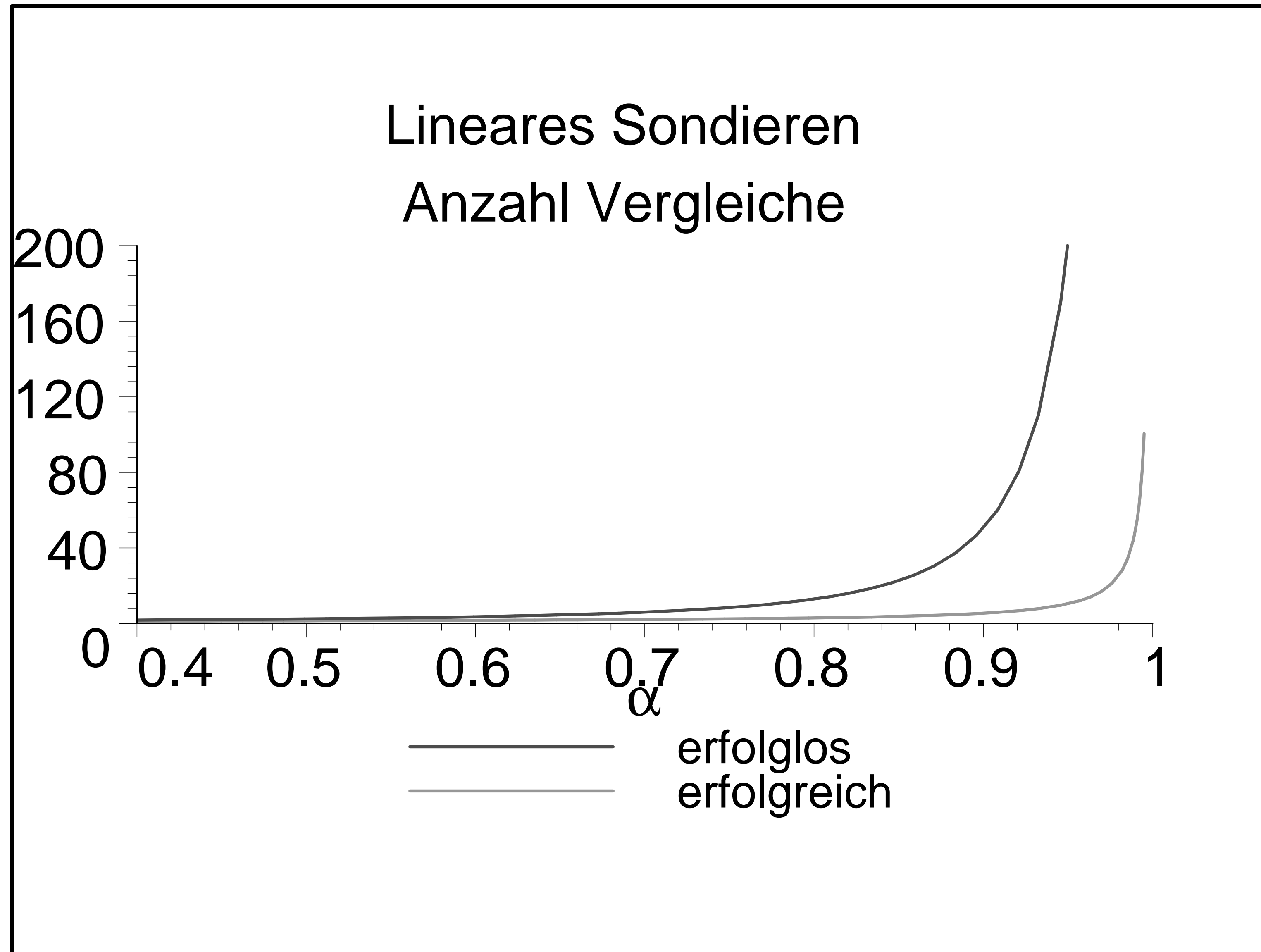
$$\approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right).$$

Die **erwartete** (nach (UF*)) **mittlere** (über $x_1, \ldots, x_n$) Anzahl von Schlüsselvergleichen bei **erfolgreicher Suche** nach

$y \in S$ ist

$$\approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right).$$

An der Tafel: Für $\alpha = \frac{1}{2}$ erwartete Einfügezeit: $O(1)$..


Lineares Sondieren
Anzahl Vergleiche
200
160
120
80
40
0
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
α
erfolglos
erfolgreich

Erwarteter Aufwand ist also $\boldsymbol{O(1)}$, falls $\boldsymbol{\alpha \leq \alpha_0}$ für eine Konstante $\alpha_0 < 1$.

Erwartete Anzahl von Schlüsselvergleichen bei linearem Sondieren:

	erfolglose Suche	erfolgreiche Suche
α	$\frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2})$	$\frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{1-\alpha})$
0,5	2,5	1,5
0,6	3,625	1,75
0,7	6,06	2,16
0,75	8,5	2,5
0,8	13	3
0,9	**50,5**	5,5
0,95	**200,5**	**20**

Ergebnisse für lineares Sondieren:

Eine einzelne erfolglose Suche wird z. B. bei zu 90% gefüllter Tabelle schon recht teuer.

Bei vielen erfolglosen Suchen in einer nicht veränderlichen Tabelle (anwendungsabhängig!) sind diese Kosten nicht tolerierbar.
$\alpha \le 0{,}6$ oder $\alpha \le 0{,}7$ liefert jedoch akzeptable Kosten.

Die (über $y \in S$) **gemittelte** Einfüge-/Suchzeit ist dagegen sogar bei 90% gefüllter Tabelle noch erträglich.

!!! Lineares Sondieren passt perfekt zu **Cache-Architekturen** und ist deswegen auch in der Praxis sehr schnell.
(Bei einem Cachefehler wird eine ganze „Zeile“ in den Cache geholt, also mehrere aufeinanderfolgende Wörter aus `T`.)

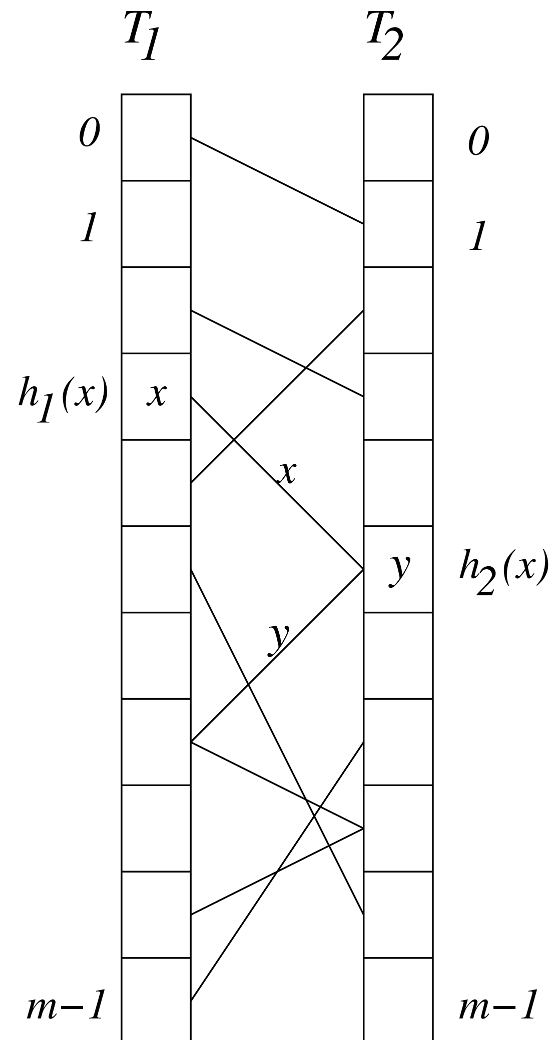
Verdoppelungsstrategie bei linearem Sondieren:

Verdopple die Tabelle, sobald der Auslastungsfaktor $\alpha = n/m$ einen Wert von α_0 übersteigt – z.B. $\alpha_0 = 0{,}75$ oder $\alpha_0 = 0{,}8$.

Empfehlung: Kombiniere lineares Sondieren mit einer guten universellen Hashklasse, z. B. Tabellenhashing.

Nicht auf die Zufälligkeit von S vertrauen!

0.4 Cuckoo Hashing [Pagh/Rodler 2001/04]



Implementierung eines dynamisches Wörterbuchs
Zwei Tabellen T_1, T_2, jeweils Größe m

$x \in S$
in $T_1[h_1(x)]$ oder
in $T_2[h_2(x)]$.

$\Rightarrow$ **Konstante Suchzeit** garantiert.

Auch *delete*(x) in $O(1)$ Zeit.

Cuckoo-Hashing

Definition 0.4.1

h_1, h_2 **passen zu** S, falls die Schlüssel aus S gemäß der Regel gespeichert werden können: man kann S in S_1 und S_2 partitionieren, so dass h_1 auf S_1 und h_2 auf S_2 injektiv ist.

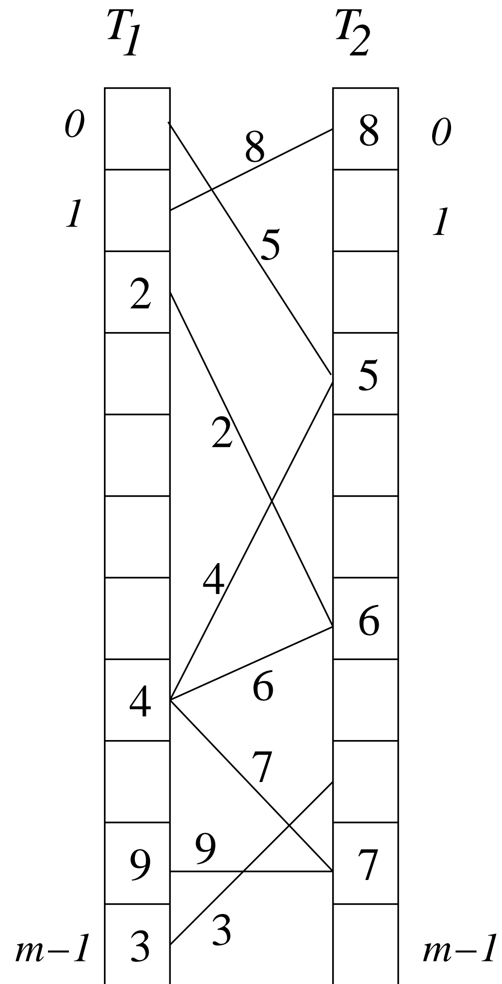
“Kuckucks-Hashing” wegen interessanter Einfügeprozedur:

Schlüssel x, der eingefügt werden soll, kann Schlüssel y, der in $T_1[h_1(x)]$ oder $T_2[h_2(x)]$ („im Nest“) sitzt,

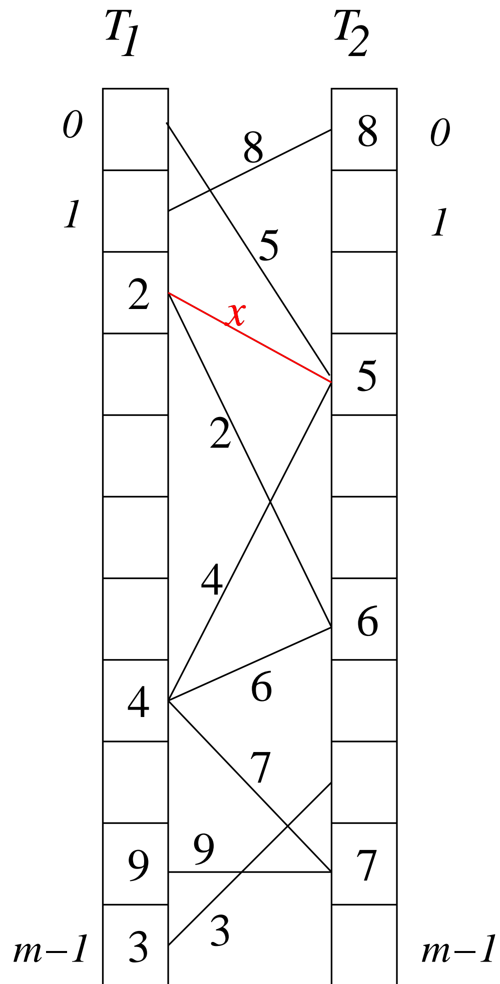
hinauswerfen (verdrängen).

Der verdrängte Schlüssel geht zu seinem alternativen Platz.

Cuckoo-Hashing



Cuckoo-Hashing

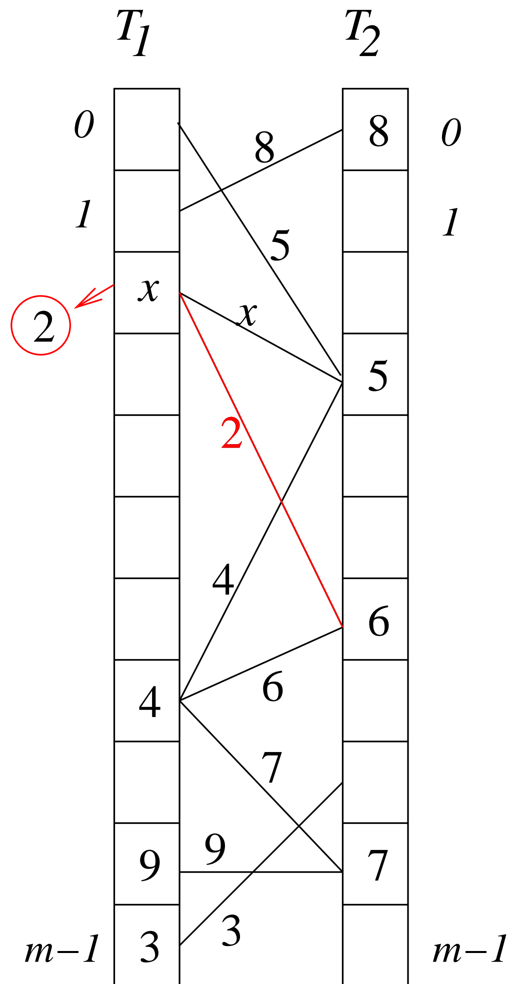


Füge x ein.

Versuche $T_1[h_1(x)]$.

Besetzt!

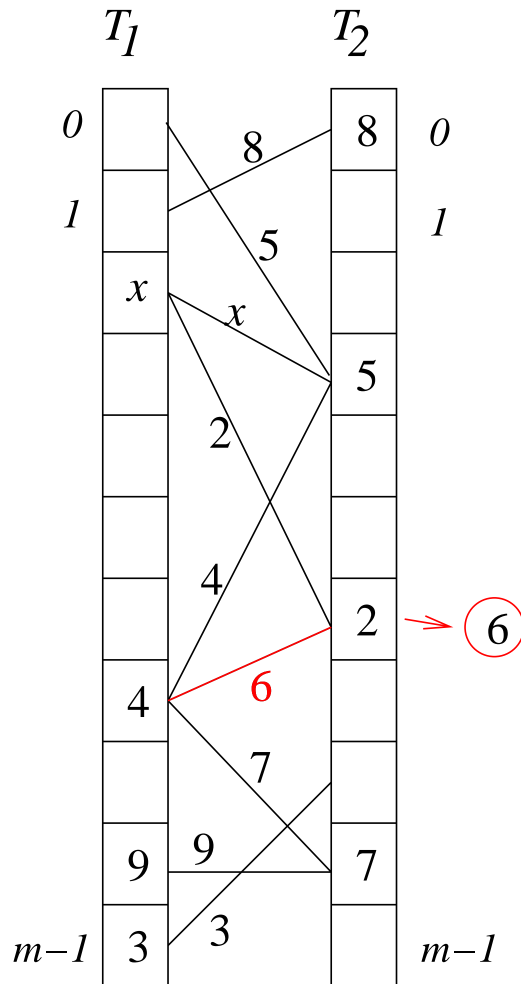
Cuckoo-Hashing



Schlüssel 2 aus T_1 hinauswerfen.

Schlüssel 2 geht zu T_2.

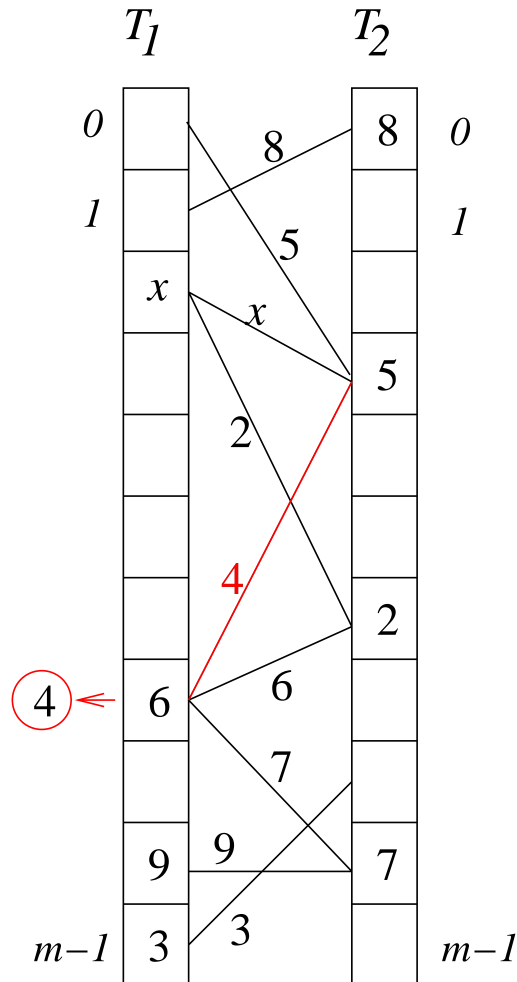
Cuckoo-Hashing



Schlüssel 6 aus T_2 hinauswerfen.

Schlüssel 6 geht zu T_1.

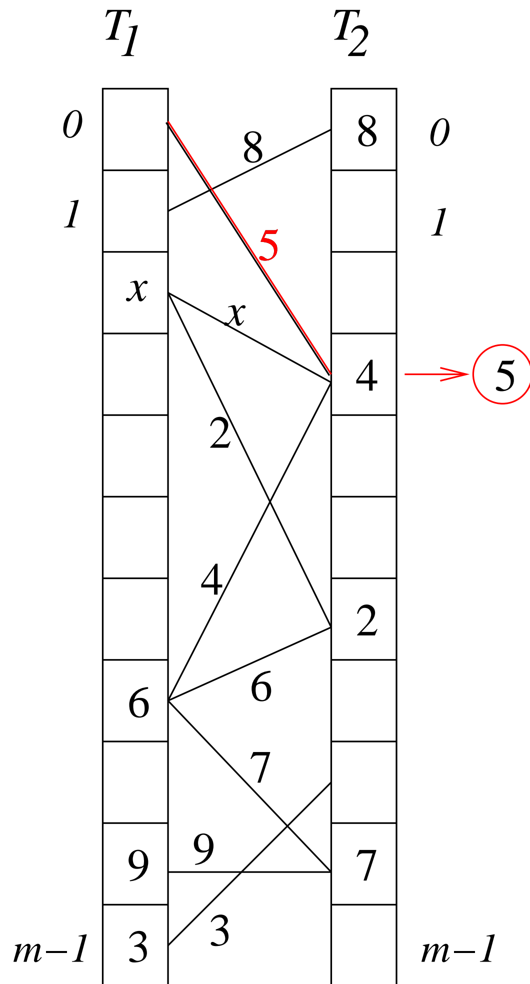
Cuckoo-Hashing



Schlüssel 4 aus T_1 hinauswerfen.

Schlüssel 4 geht zu T_2.

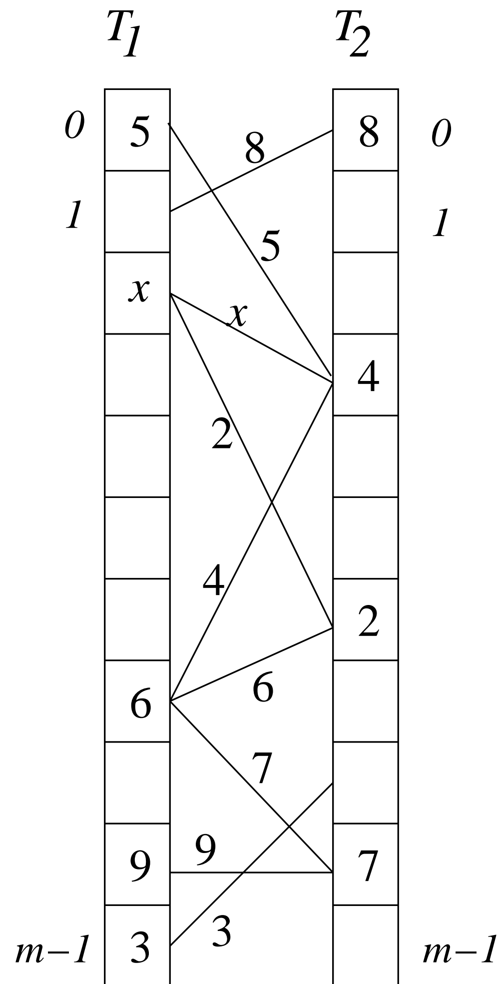
Cuckoo-Hashing



Schlüssel 5 aus T_2 hinauswerfen.

Schlüssel 5 geht zu T_1.

Cuckoo-Hashing



Schlüssel 5 in T_1 einfügen.

Fertig!

Cuckoo-Hashing: Analyse

Wann gehen die Einfügungen gut?

Wie lange dauert eine Einfügung?

Beobachtung 1 (trivial):

Wiederholte Anwendung der
Einfügeprozedur platziert alle Schlüssel aus S in T_1, T_2

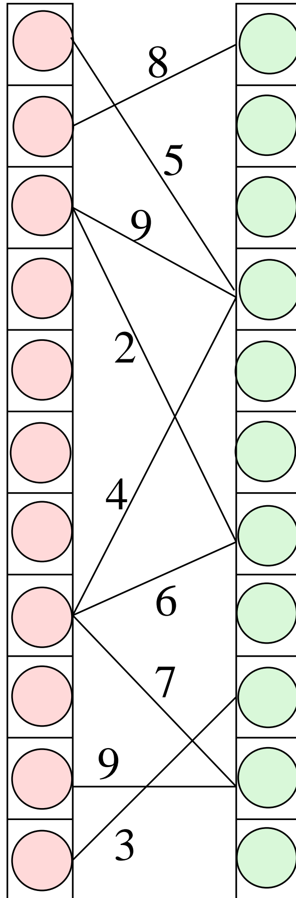
$\Rightarrow$

h_1, h_2 passen zu S.

D.h.: **Wenn** h_1, h_2 **nicht** zu S passen, **dann** muss die Einfügung eines Schlüssels **fehlschlagen**.

Wie sieht ein Fehlschlag aus?

Cuckoo-Hashing: Graph



Bipartiter

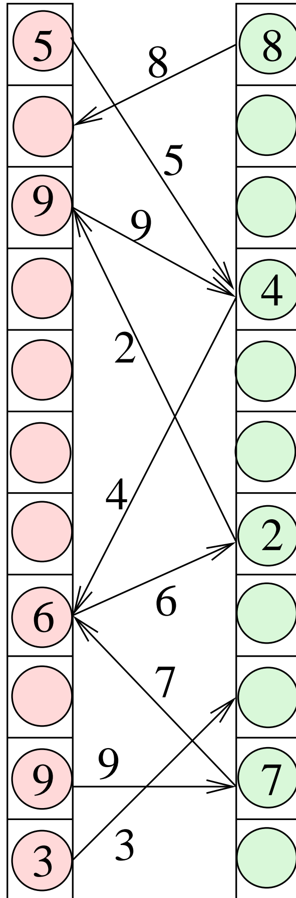
Cuckoo-Graph

$\boldsymbol{G(S, h_1, h_2)}$

$V = W = [m]$

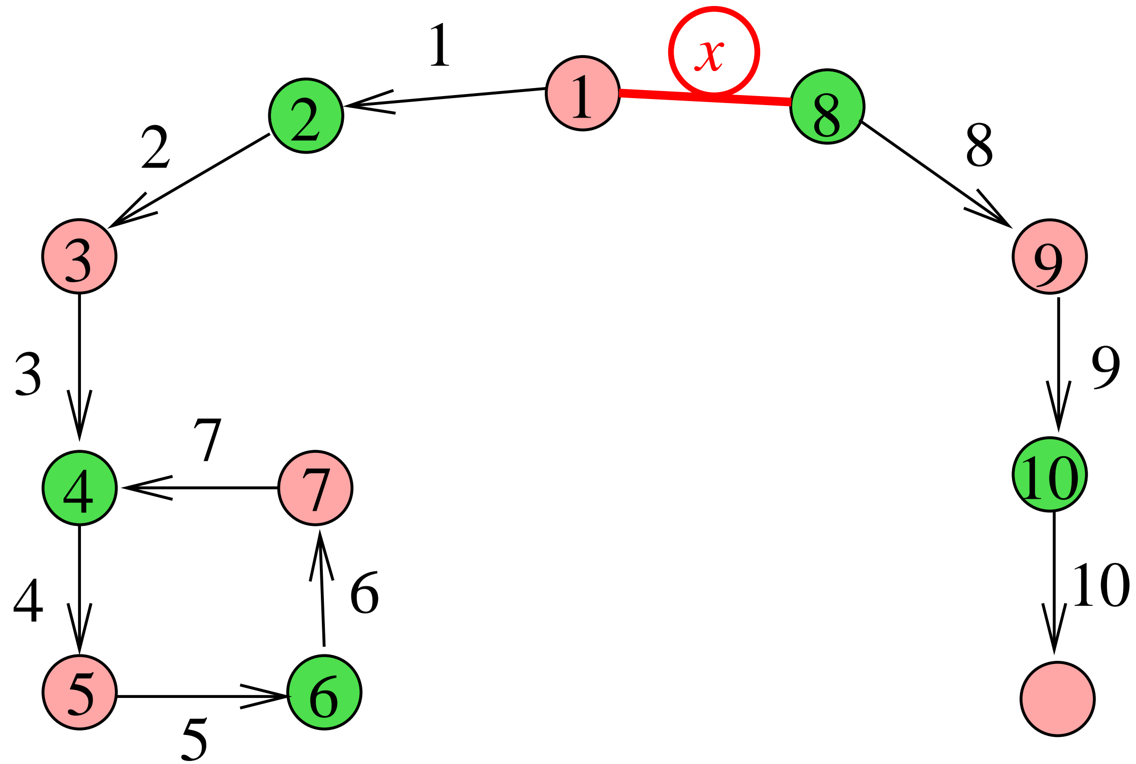
$E = \{(h_1(x), h_2(x)) \mid x \in S\}$

Cuckoo-Hashing: Graph



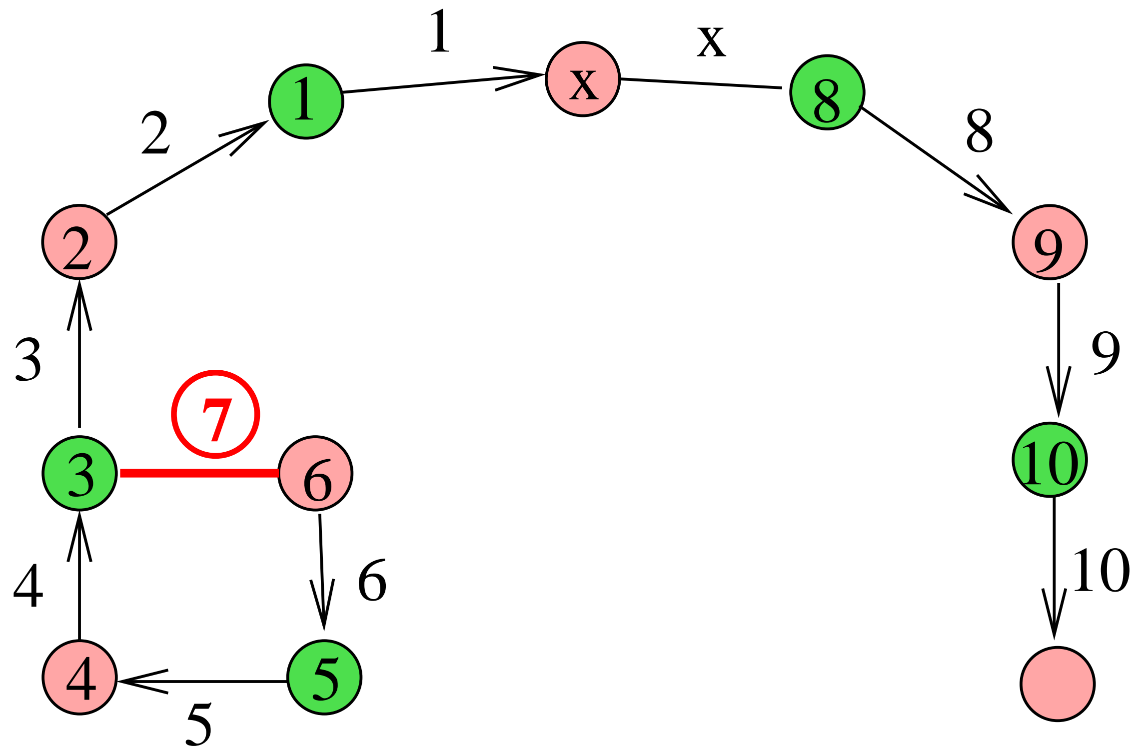
h_1, h_2 passen zu S
$\Leftrightarrow$
Man kann die Kanten
von $G(S, h_1, h_2)$
so richten,
dass jeder Knoten
Ausgrad ≤ 1 hat.

Cuckoo-Hashing: Fehlschlag?



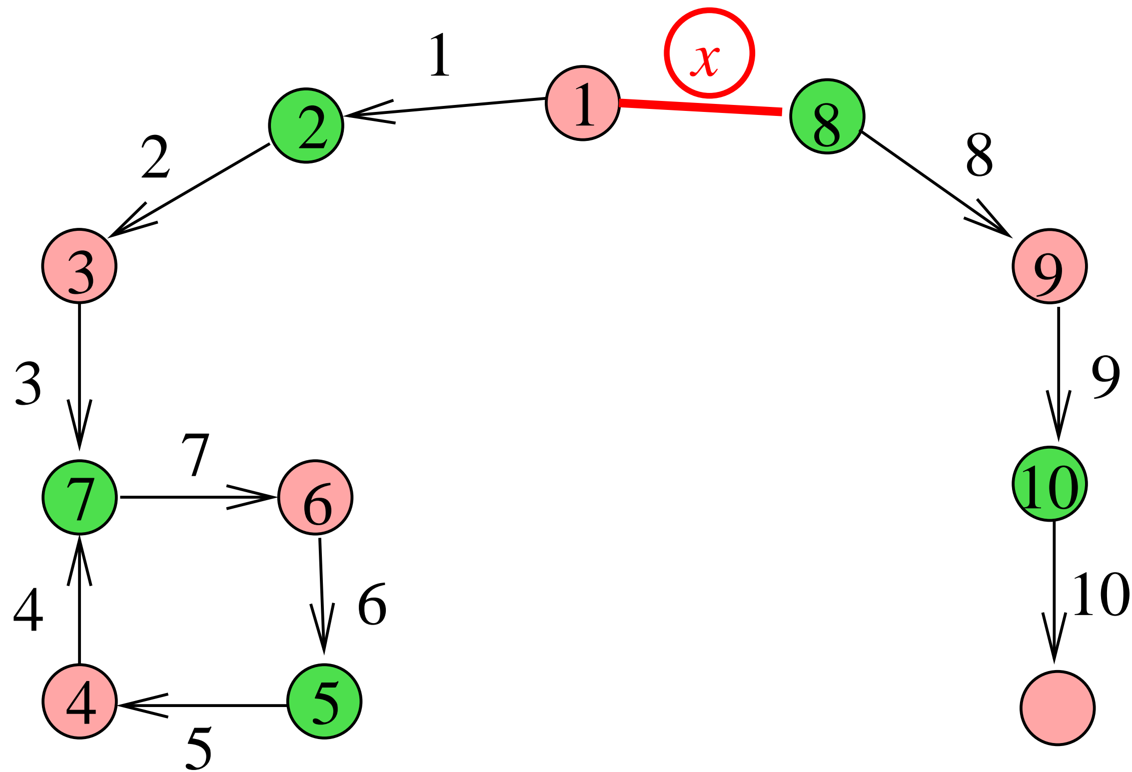
Neuer Schlüssel x.

Cuckoo-Hashing: Fehlschlag?



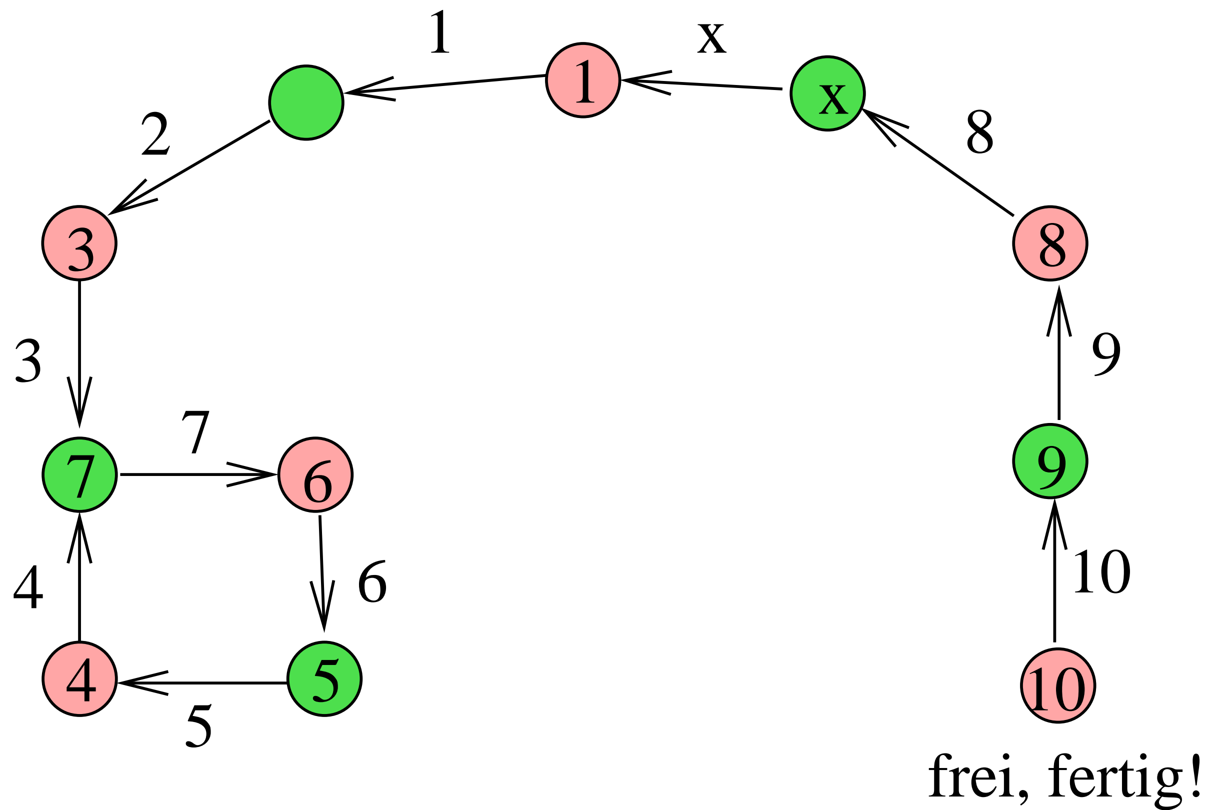
Nach 6 Runden. Schlüssel 7 ist draußen.

Cuckoo-Hashing: Fehlschlag?

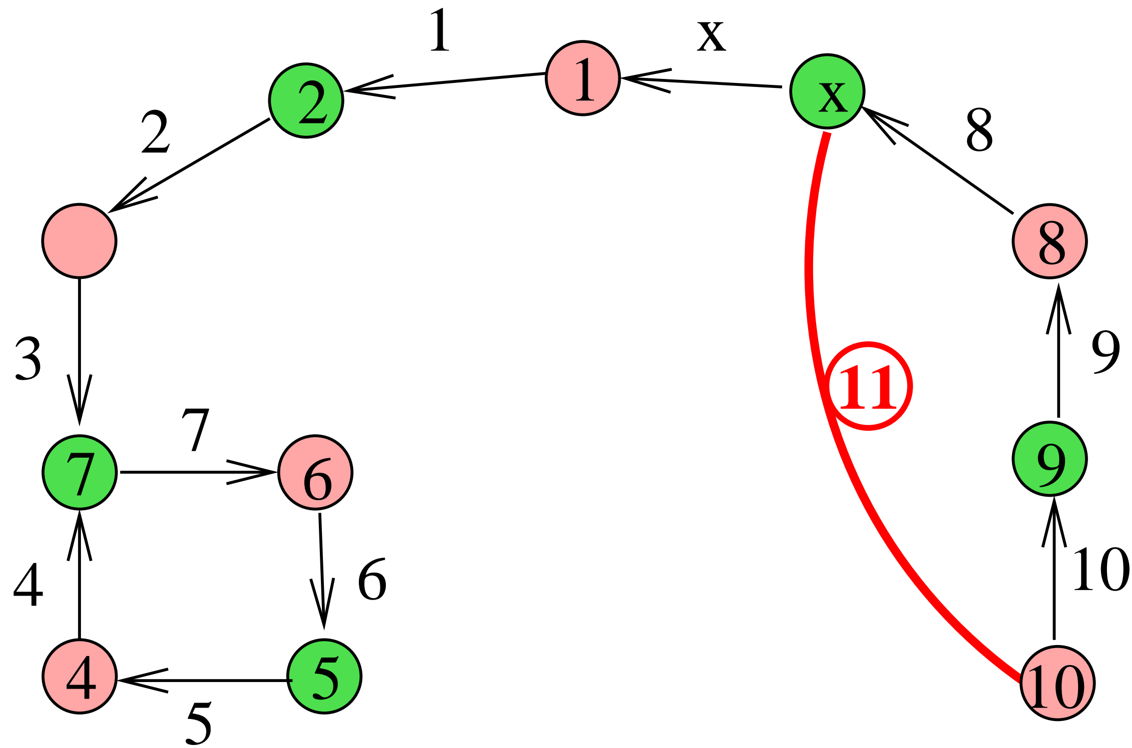


Nach weiteren 4 Runden.

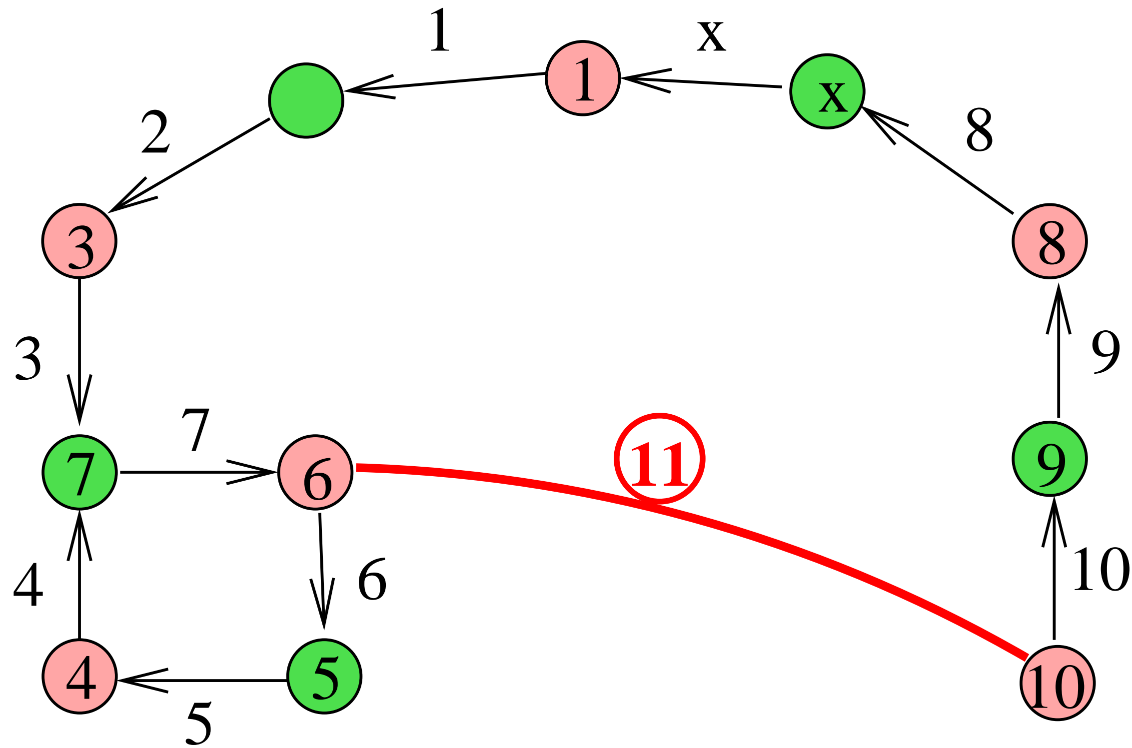
Cuckoo-Hashing: Fehlschlag?



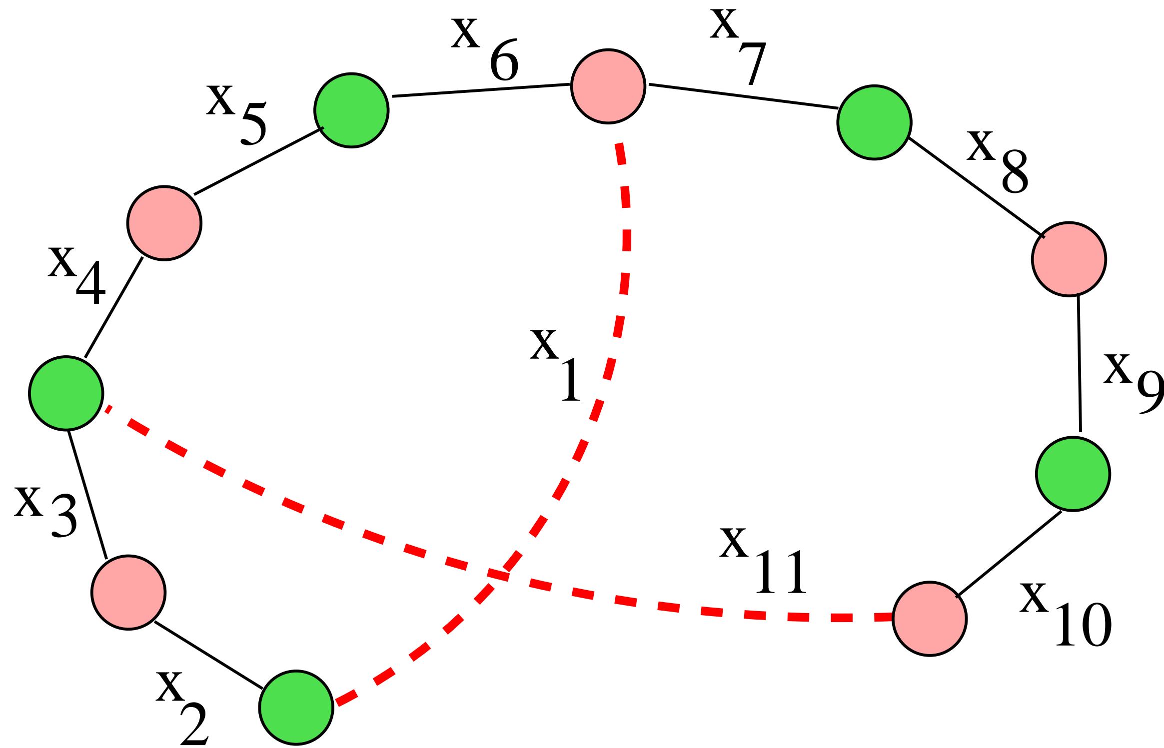
Cuckoo-Hashing: Fehlschlag!



Cuckoo-Hashing: Fehlschlag!

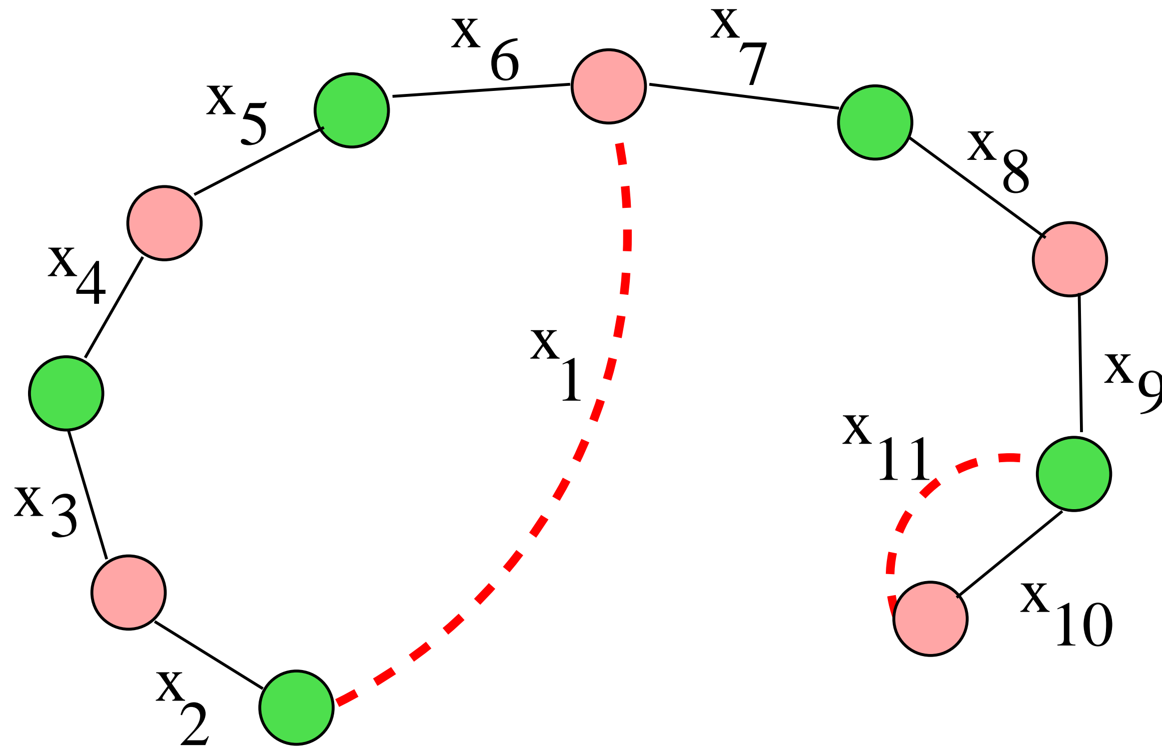


Cuckoo-Hashing: Fehlschlag



„**Sperrstruktur**“

Cuckoo-Hashing: Fehlschlag



„**Sperrstruktur**“

Cuckoo-Hashing: Analyse

Beobachtung 2: Aus dem Ablauf der Einfügung folgt:
Wenn h_1, h_2 **nicht** zu S passen, **dann** existiert in $G(S, h_1, h_2)$ eine **Sperrstruktur**, d. h. es gibt eine Folge von Schlüsseln $x_1, \ldots, x_k$ in S, deren Hashwerte wie folgt kollidieren (z. B., falls k ungerade):

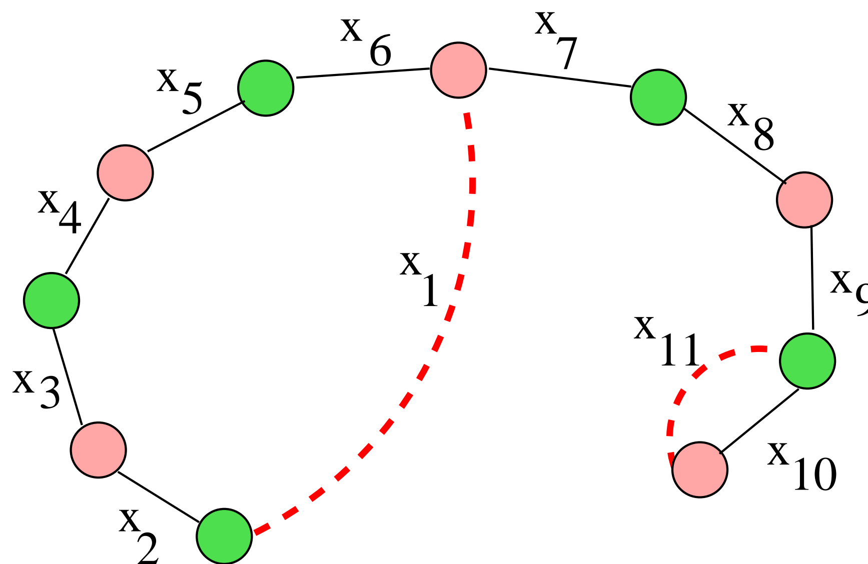
$$
\begin{aligned}
h_2(x_1) &= h_2(x_2), & h_1(x_2) &= h_1(x_3),\\
h_2(x_3) &= h_2(x_4), & h_1(x_4) &= h_1(x_5),\\
&\vdots & &\vdots\\
h_2(x_{k-2}) &= h_2(x_{k-1}), & h_1(x_{k-1}) &= h_1(x_k),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_1(x_1) &\in \{h_1(x_3), \ldots, h_1(x_k)\},\\
h_2(x_k) &\in \{h_2(x_2), \ldots, h_2(x_{k-1})\}.
\end{aligned}
$$

Cuckoo-Hashing: Analyse

Beobachtung 2': Sogar Äquivalenz!

Wenn in $G(S, h_1, h_2)$ eine **Sperrstruktur** existiert,
dann passen h_1, h_2 nicht zu S.



Mehr Kanten/Schlüssel als Knoten/Tabellenplätze!

Cuckoo-Hashing: Analyse

Sei $n/m \le 1 - \beta$. Dann gilt:

$$\mathbf{Pr}(h_1, h_2 \text{ passen nicht zu } S)$$

$$\le \sum_{3 \le k \le n} n^k \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{k}{2m}\right)^2$$

$$< \frac{1}{2m} \cdot \sum_{k \ge 3} k^2 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^k$$

$$\le \frac{1}{2m} \cdot \sum_{k \ge 3} \cdot k^2 \cdot (1-\beta)^k = O\left(\frac{1}{\beta^3 \cdot m}\right).$$

Cuckoo-Hashing: Analyse

(Es gibt $\leq n^k$ Folgen $(x_1, \ldots, x_k)$ von Schlüsseln.
Die erste Kante kann einen h_1- oder einen h_2-Endpunkt haben.
Dass die Hashwerte entlang des Weges übereinstimmen, hat Wahrscheinlichkeit $1/m^{k-1}$.
Die Anzahl der möglichen Trefferknoten für jede der beiden „zurückschlagenden“ Kanten ist $\leq k/2$.)

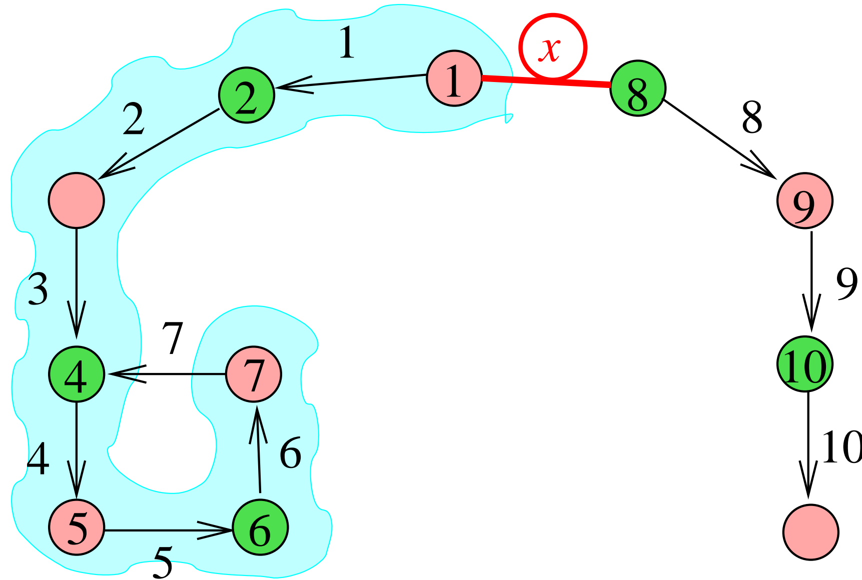
Cuckoo-Hashing: Analyse

Benötige: Mechanismus, um Endlosschleifen (Einfügung, die Sperrstruktur erzeugt) abzubrechen.

Lasse Einfügezyklus für **maximal** $C \log n$ Schritte laufen,
C eine Konstante.
Danach: „Rehash“ (neue Hashfunktion, Neuaufbau).

Will aber keine erfolgreiche Einfügung verlieren, nur weil sie lange dauert!

Cuckoo-Hashing: Analyse



Beobachtung 3:
Wenn die **erfolgreiche** Einfügung von x mindestens t Verdrängungen durchführt, dann gibt es in $G(S, h_1, h_2)$ einen einfachen Weg der Länge $\geq \lceil (t-1)/3 \rceil$, der an Knoten $h_1(x)$ oder $h_2(x)$ beginnt.

Cuckoo-Hashing: Analyse

$$\textbf{Pr}(\geq t \text{ Verdrängungsschritte})$$
$$\leq 2 \cdot n^{\lceil (t-1)/3 \rceil} \left(\frac{1}{m}\right)^{\lceil (t-1)/3 \rceil}$$
$$\leq 2 \cdot (1-\beta)^{(t-1)/3}$$
$$\leq 2^{c-t/d} \text{, für Konstante } c, d.$$

$\Rightarrow$ $\textbf{Pr}(\geq C \log n$ Verdrängungsschritte für $x) = O(1/m^3)$ für Konstante $C \geq \frac{3 \ln 2}{\beta}$ $[\geq 3/\log(1/(1-\beta))]$.

$\Rightarrow$ $\textbf{Pr}(\exists x \in S\colon \geq C \log n$ Verdrängungsschritte für $x) = O(1/m^2)$.

Cuckoo-Hashing: Analyse

Einfügung von x kostet:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\text{Anzahl Verdrängungsschritte}) \\
&\quad \stackrel{*}{\leq} \sum_{t \geq 1} \mathbf{Pr}(\geq t \text{ Verdrängungsschritte}) \\
&\quad \leq \sum_{t \geq 1} 2^{c - t/d} \\
&\quad = O(1).
\end{aligned}$$

* Standardformel für Erwartungswerte.

Cuckoo-Hashing: Zusammenfassung

Mitteilung 0.4.2

Vorausgesetzt: Hashfunktionen verteilen Schlüssel rein zufällig.

Wenn man Cuckoo-Hashing mit n Schlüsseln in zwei Tabellen mit je m Plätzen durchführt, wobei

$$\boldsymbol{n/m \leq 1 - \beta} \qquad \textbf{(essenziell!!)},$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass h_1, h_2 zur Schlüsselmenge passen, $1 - O(1/m)$.

Falls h_1, h_2 passen, ist die erwartete Einfügezeit $O(1/\beta^3)$.

Cuckoo-Hashing: Zusammenfassung

Bei Auftreten eines Fehlers
(z. B. Einfügung nach $10 \log n$ Runden nicht beendet):
„Rehash“ (neue Hashfunktionen wählen)
mit erwarteten Kosten $O(n)$.

„Amortisierte“ erwartete Einfügezeit: $O(1)$.

Auslastungsfaktor: $\frac{1}{2}(1-\beta) < \frac{1}{2}$.

Nachteil: Auslastung der Tabelle **unter 50%**.
Abhilfe: Mehr als 2 Hashfunktionen oder größere Behälter.
(Details: später.)

Praktisch sehr effizient (auch mit Tabellenhashing).

Multiplikative/lineare Hashfunktionen nicht benutzen!