TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. D. Kuske, Dr. F. Abu Zaid
SS 2018

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

1. Übung Automatentheorie

Aufgabe 1

(a) Sei Γ ein Alphabet. Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}(\Gamma^*)$ aller Sprachen über Γ zusammen mit der Vereinigung $\cup$ und der Konkatenation $\cdot$. Geben Sie $n, e \in \mathcal{P}(\Gamma^*)$ an, so dass $(\mathcal{P}(\Gamma^*), \cup, \cdot, n, e)$ ein Semiring ist.

(b) Wir betrachten die Menge $[0,1]$ mit der Minimumsfunktion min und der Multiplikation $\cdot$. Zeigen Sie, dass es keine Elemente $n, e \in [0,1]$ gibt, für die $([0,1], \min, \cdot, n, e)$ ein Semiring ist.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ ein kommutativer Semiring. Wir bezeichnen die Menge aller (univarianten) Polynome über $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{S}[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \geq 0, a_0, a_1, \ldots, a_n \in S, a_n \neq 0\}$. Die Operationen $+$ und $\cdot$ lassen sich auf natürliche Weise auf $\mathcal{S}[x]$ definieren (komponentenweise Addition bzw. ausmultiplizieren). Bestimmen Sie jeweils, ob $(\mathcal{S}[x], +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper, ein Ring, kommutativer Semiring oder ein Semiring ist, falls

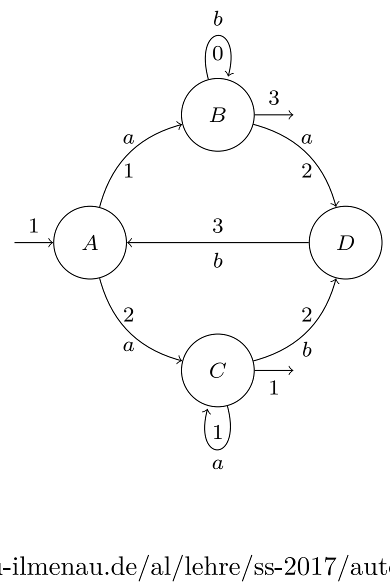
(a) $\mathcal{S}$ ein Körper ist.

(b) $\mathcal{S}$ ein Ring ist.

(c) $\mathcal{S}$ ein kommutativer Semiring ist.

Aufgabe 3

Betrachten Sie den folgenden gewichteten Automaten $\mathcal{A}$.



Berechnen Sie $||\mathcal{A}||(abba)$ über den folgenden Semiringen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die nicht gezeichneten Transitionen mit dem neutralen Element (der ersten Operation) gewichtet sind.

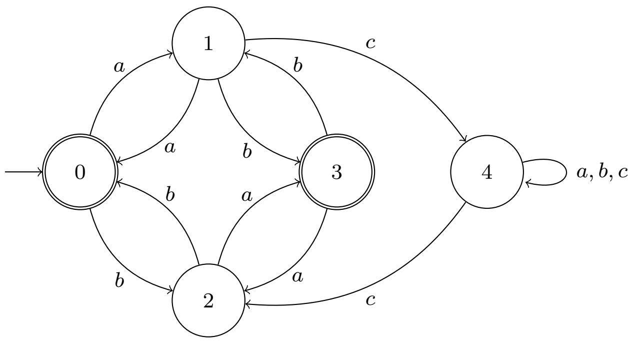
(a) $\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$.

(b) $\mathbb{N}_{\min,+} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, min, +, \infty, 0)$.

(c) $\mathbb{R}_{+,\cdot} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{A}$ der folgende NFA.



Sei $\mathcal{S} = (\{0,1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$ der Boolsche Semiring. Geben Sie einen gewichteten Automaten $\mathcal{B}$ über $\mathcal{S}$ an, so dass für alle $w \in \{a,b,c\}^*$ gilt:

$$||\mathcal{B}||(w) = \begin{cases} 0 & w \notin L(\mathcal{A}) \\ 1 & w \in L(\mathcal{A}). \end{cases}$$