TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. D. Kuske, Dr. F. Abu Zaid
SS 2018

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

2. Übung Automatentheorie

Aufgabe 1

Sei Γ eine Alphabet mit $|\Gamma| \geq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine realisierbare injektive Funktion $f : \Gamma^* \to \mathbb{N}$ über $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass es keine realisierbare injektive Funktion $g : \Gamma^* \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ über dem tropischen Semiring $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$ gibt.

Aufgabe 2

Sei Γ ein Alphabet und $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ ein Semiring. Zeigen Sie, dass die Funktion $s : \Gamma^* \to S$ mit $s(w) = 1$ für alle $w \in \Gamma^*$ über $\mathcal{S}$ realisierbar ist, aber nicht durch einen normalisierten gewichteten Automaten.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{S}$ ein endlicher Semiring und $L \subseteq \Gamma^*$ eine Sprache. Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_L$ genau dann über $\mathcal{S}$ realisierbar ist, wenn L regulär ist.

Hinweis: konstruieren Sie zu einem gewichteten Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \mathrm{in}, \mathrm{wt}, \mathrm{out})$ über $\mathcal{S}$ einen DFA $\mathcal{B} = (K, \Gamma, \kappa_0, \delta, F)$ mit $K = S^{Q \times Q}$ (die Menge der Funktionen von $Q \times Q$ nach S). Wählen Sie δ so, dass für alle $w \in \Gamma^*$ gilt $\delta(\kappa_0, w) = \kappa$ genau dann, wenn $\kappa(p, q) = \sum(\mathrm{wt}(\rho) \mid \rho : p \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q)$ für alle $p, q \in Q$.

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils einen Semiring $\mathcal{S}$ und $r_1, r_2 \in \mathcal{S}\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle$ an, sodass

(a) $\mathrm{supp}(r_1 + r_2) \subsetneq \mathrm{supp}(r_1) \cup \mathrm{supp}(r_2)$

(b) $\mathrm{supp}(r_1 \cdot r_2) \subsetneq \mathrm{supp}(r_1) \cdot \mathrm{supp}(r_2)$

(c) $\mathrm{supp}(r_1 \odot r_2) \subsetneq \mathrm{supp}(r_1) \cap \mathrm{supp}(r_2)$

Für welche Semiringe sind jeweils die obigen Ungleichungen nicht lösbar?