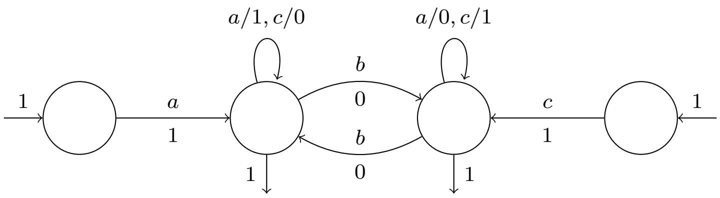
TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. D. Kuske, Dr. F. Abu Zaid
SS 2018

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

3. Übung Automatentheorie

Aufgabe 1

Wir betrachten den folgenden gewichteten Automaten $\mathcal{A}$ über $\mathbb{N}_{\max,+}$:



Berechnen Sie gewichtete Automaten $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ mit

(a) $||\mathcal{B}|| = ||\mathcal{A}|| + ||\mathcal{A}||$,

(b) $||\mathcal{C}|| = ||\mathcal{A}|| \cdot ||\mathcal{A}||$ und

(c) $||\mathcal{D}|| = ||\mathcal{A}||^*$.

Aufgabe 2

Sei Γ ein Alphabet und $\mathcal{S}$ ein Semiring . Für $v \in \Gamma^*$ und $r \in \mathcal{S}\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle$ sei $v^{-1}r$ die Potenzreihe mit $(v^{-1}r)(w) = r(vw)$ für alle $w \in \Gamma^*$. Sei Beispielsweise $r(w) = |w|$. Dann ist $(a^{-1}r)(w) = r(aw) = |w| + 1$. Zeigen Sie, dass zu jedem gewichteten Automaten $\mathcal{A}$ und jedem $v \in \Gamma^*$ ein gewichteter Automat $\mathcal{B}$ mit $||\mathcal{B}|| = v^{-1}||\mathcal{A}||$ existiert.

Aufgabe 3

Erinnerung: Für Potenzreihen $r, s \in \mathcal{S}\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle$ ist $(r \odot s)(w) = r(w)s(w)$, d.h. $\odot$ entspricht der komponentenweisen Multiplikation auf Potenzreihen.

(a) Sei $\Gamma = \{a, b\}$ und sei $\mathcal{S} = \big(\mathcal{P}(\Gamma^*), \cup, \cdot, \emptyset, \{\varepsilon\}\big)$. Zeigen sie, dass die Menge der realisierbaren Funktionen über $\mathcal{S}$ nicht unter dem Hadamard-Produkt $\odot$ abgeschlossen ist.

Hinweis: Betrachten Sie die realisierbare Potenzreihe s mit $s(w) = \{w\}$ für alle $w \in \Gamma^*$. Nehmen Sie an $s \odot s$ ist durch einen gewichteten Automaten $\mathcal{A}$ realisiert und führen Sie die Annahme mittels eines Pumpingarguments zu einem Widerspruch: für geeignetes $N \in \mathbb{N}$ gilt $||\mathcal{A}||(ab^N a) \neq (s \odot s)(ab^N a)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der realisierbaren Potenzreihen über $\mathbb{N}_{+,\cdot}$ unter $\odot$ abgeschlossen ist. Welche Eigenschaft muss ein Semiring S haben, damit dies gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.