TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. D. Kuske, Dr. F. Abu Zaid
SS 2018

TECHNISCHE UNIVERSITÄT **ILMENAU**

4. Übung Automatentheorie

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{S}$ ein *endlicher* Semiring. Geben Sie Algorithmus an, welcher folgendes Problem entscheidet:

Eingabe: gewichtete Automaten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ über $\mathcal{S}$
Frage: $||\mathcal{A}|| = ||\mathcal{B}||$?

Begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Hinweis: Geben Sie zunächst ein Verfahren an, welches aus einem gewichteten Automaten $\mathcal{A}$ und einem $a \in S$ einen DFA $\mathcal{A}_a$ konstruiert mit $L(\mathcal{A}_a) = \{w \in \Gamma^* \mid ||\mathcal{A}||(w) = a\}$. Verwenden Sie hierzu die Konstruktion aus Aufgabe 3 auf Übungsblatt 2 und passen Sie die Endzustände in geeigneter Weise an.

Aufgabe 2

Sei Γ ein Alphabet und sei $\mathcal{S}$ ein Semiring. Ein *lineares Gleichungssystem* über $\mathcal{S}\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle$ ist ein Tupel von Gleichungen der Form

$$\left(X_i = r_i + \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} \cdot X_j\right)_{1 \le i \le n}.$$

Dabei sind $X_1, \ldots, X_n$ Variablen, $r_1, \ldots, r_n \in \mathcal{S}\langle\Gamma^*\rangle$ und $s_{1,1}, s_{1,2}, \ldots, s_{n,n} \in \mathcal{S}\langle\Gamma^*\rangle$ mit $s_{i,j}(\varepsilon) = 0$. Eine *Lösung* des Gleichungssystems ist ein Tupel $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathcal{S}\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle)^n$ mit

$$t_i = r_i + \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} \cdot t_j$$

für alle $i \le n$. Beispiel: Sei G das Gleichungssystem $X_1 = 1\varepsilon + (2a + 1b) \cdot X_1$ über der einzigen Variablen X_1. Dann ist $t_1 = \sum_{w \in \{a,b\}^*} 2^{|w|_a} w$ eine Lösung von G, denn

$$1\varepsilon + \left(\underbrace{(2a + 1b) \cdot \sum_{w \in \{a,b\}^*} 2^{|w|_a} w}_{t_1}\right) = 1\varepsilon + \sum_{w \in \{a,b\}^+} 2^{|w|_a} w = \sum_{w \in \{a,b\}^*} 2^{|w|_a} w = t_1.$$

Wir wollen zeigen, dass eine Potenzreihe genau dann realisierbar ist, wenn sie die erste Komponente einer Lösung eines linearen Gleichungssystems ist.

(a) Für die Richtung von Gleichungssystemen zu realisierbaren Potenzreihen sei G ein beliebiges lineares Gleichungssystem. Beweisen Sie, dass G die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) G besitzt höchstens eine Lösung.
Nehmen Sie hierzu an G besitze Lösungen $(t_1, \dots, t_n)$ und $(t'_1, \dots, t'_n)$. Zeigen Sie mittels Induktion über die Wortlänge $|w|$, dass $t_i(w) = t'_i(w)$ für alle $w \in \Gamma^*$ und alle $i \leq n$ gilt.

Hinweis: Beachten Sie, dass $s_{i,j}(\varepsilon) = 0$ für alle $i, j \leq n$ gilt!

(ii) G besitzt eine Lösung aus realisierbaren Potenzreihen.
Konstruieren Sie aus G ein Tupel von gewichteten Automaten $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$, so dass $(||\mathcal{A}_1||, \dots, ||\mathcal{A}_n||)$ eine Lösung von G ist.

Hinweis: Orientieren Sie sich bei Ihren Beweis an dem analogen Ergebnis für reguläre Sprachen (siehe z.B. Vorlesung ASK WS 2016/17, Folien 118ff). Verwenden Sie bei der Übertragung die Analogie zwischen endlichen Sprachen über Γ und Polynomen aus $\mathcal{S}\langle\Gamma^*\rangle$.

(b) Für die Richtung von realisierbaren Potenzreihen zu Gleichungssystemen zeigen wir, dass jede realisierbare Potenzreihe die erste Komponente einer Lösung eines linearen Gleichungssystems ist.
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \mathrm{in}, \mathrm{wt}, \mathrm{out})$ ein *initial-normalisierter* gewichteter Automat. Konstruieren Sie aus $\mathcal{A}$ ein geeignetes lineares Gleichungssystem G über den Variablen $(X_q)_{q \in Q}$.