TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. D. Kuske, Dr. F. Abu Zaid
SS 2018

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

6. Übung Automatentheorie

Aufgabe 1

Es sei $\Sigma = (\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Rangalphabet. Für jeden Baum $t \in T_\Sigma$ sei $\text{yield}(t) \in \Sigma_0^+$ dasjenige Wort, das man erhält, wenn man die Blätter von t von links nach rechts liest. Seien zum Beispiel $f \in \Sigma_2$ und $a, b \in \Sigma_0$. Dann gilt $\text{yield}(f(a, f(b, b))) = f(f(a, b), b) = abb$. Für eine Baumsprache T sei $\text{yield}(T) = \{\text{yield}(t) \mid t \in T\}$.

(a) Definieren Sie $\text{yield}(t)$ formal durch strukturelle Induktion über t.

(b) Betrachten Sie die folgende kontextfreie Gammatik G mit Startsymbol S:

$$S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid ab \mid ba$$

Geben Sie einen Baumautomaten $\mathcal{A}$ mit $\text{yield}(L(\mathcal{A})) = L(G)$ an.

(c) Beweisen Sie: Für jede kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma_0^+$ gibt es eine reguläre Baumsprache $T \subseteq T_\Sigma$ (über einem geeigneten Rangalphabet Σ) mit $L = \text{yield}(T)$.

Aufgabe 2

Es seien Γ ein Alphabet, $A_1, \dots, A_n \subseteq \Gamma^*$ Sprachen über Γ und $\Sigma = (\Sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ das Rangalphabet mit $\Sigma_0 = \{A_1, \dots, A_n\}$, $\Sigma_1 = \{^-, ^*\}$, $\Sigma_2 = \{\cup, \cap, \setminus, \cdot\}$ und $\Sigma_m = \emptyset$ für $m > 2$. Jeder Baum in T_Σ kann als Mengenausdruck über den Sprachen $A_1, \dots, A_n$ aufgefasst werden, wobei die unären Operatoren $^-$ und * die Komplementbildung bzw. den Kleene-Stern bezeichnen. Die durch einen Baum $t \in T_\Sigma$ beschriebene Teilmenge von Γ^* sei mit $L(t)$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Die Menge aller $t \in T_\Sigma$ mit $\varepsilon \in L(t)$ ist regulär. Gilt dies auch, wenn wir ε durch ein beliebiges $w \in \Gamma^*$ ersetzen?

(b) Sei Σ' das Rangalphabet, welches wir durch Entfernen der Symbole $^-$, $\cap$ und $\setminus$ aus Σ erhalten. Dann ist die Menge aller $t \in T_{\Sigma'}$ mit $L(t) = \emptyset$ regulär.

(c) Ist die Menge aller $t \in T_\Sigma$ mit $L(t) = \emptyset$ regulär?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die regulären Baumsprachen unter Schnitt abgeschlossen sind. Konstruieren Sie hierzu aus zwei gegebenen Baumautomaten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ einen Baumautomaten $\mathcal{C}$ mit $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$.