TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. D. Kuske, Dr. F. Abu Zaid
SS 2018

7. Übung Automatentheorie

Für die Aufgaben auf diesem Übungsblatt verwenden wir die folgende Definition: Für einen Graphen $H = (I, R)$ und Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ für $i \in I$ definieren wir einen Graphen $\otimes_H\big((G_i)_{i\in I}\big) = (V, E)$ durch

$$V = \biguplus_{i\in I} V_i = \{(i,v) | i \in I, v \in V_i\}$$

und

$$\big\{(i,v),(j,w)\big\} \in E \quad\Longleftrightarrow\quad (i = j \text{ und } \{v,w\} \in E_i) \text{ oder } \{i,j\} \in R\,.$$

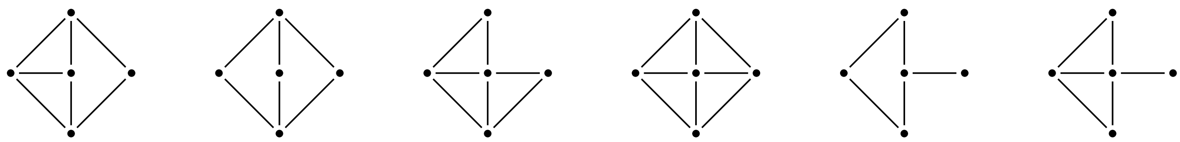
Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen sei $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ die Menge aller Graphen, die sich (bis auf Isomorphie) mittels der Operationen $\otimes_H$ für $H \in \mathcal{H}$ aus Graphen mit einem Knoten erzeugen lassen.

Aufgabe 1

Es sei $\mathcal{H} = \{H_1, H_2\}$ die Menge, die aus den Graphen H_1 und H_2 besteht.


H_1 H_2

Entscheiden Sie für die folgenden Graphen G_1 bis G_6 jeweils, ob sie in $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ enthalten sind.


G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6

Aufgabe 2

(a) Finden Sie eine möglichst kleine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen, so dass $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ die Menge aller P_4-freien Graphen ist.

(b) Es sei $\mathcal{H}_{\leq 3}$ die Menge aller Graphen, die höchstens 3 Knoten besitzen.

Zeigen Sie: Auch $\mathcal{G}(\mathcal{H}_{\leq 3})$ ist die Menge aller P_4-freien Graphen.

(c) Beweisen Sie: Wenn $\mathcal{H}$ eine Menge P_4-freier Graphen ist, dann ist jeder Graph in $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ ebenfalls P_4-frei.

Aufgabe 3

Es sei $\mathcal{H}$ eine endliche Menge von Graphen.

(a) Weisen Sie nach, dass es einen Graphen gibt, der nicht in $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ enthalten ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{\varphi \in \mathrm{MSO}_G | \varphi \text{ ist ein Satz mit } G \models \varphi \text{ für alle } G \in \mathcal{G}(\mathcal{H})\}$$

entscheidbar ist.