Rev. 1, 09.04.2018
TU Ilmenau, Fakultät für Informatik und Automatisierung
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Univ.-Prof. Dr. M. Dietzfelbinger, M. Sc. P. Schlag
http://www.tu-ilmenau.de/iti/lehre/lehre-ss-2018/ra/

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Randomisierte Algorithmen SS 2018 – Übung 1

Besprechung: Montag, 16. April 2018

Hinweis: Für das erfolgreiche Vorrechnen einer mit „*“ gekennzeichneten Aufgabe wird ein Bonuspunkt vergeben, es gibt maximal zwei Bonuspunkte pro Studierendem im Semester. Bitte geben Sie Ihren Lösungsvorschlag bis zum Vortag der Übung (Sonntag), 13:00 Uhr, per E-Mail an philipp.schlag@tu-ilmenau.de oder bis Freitag, 15:00 Uhr, direkt in meinem Büro (Z 1048) ab.

Aufgabe 1 (BasicMinCut) *

Betrachten Sie die Analyse der Fehlerwahrscheinlichkeit des Algorithmus BasicMinCut aus der Vorlesung (Abschnitt 1.1). Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Der Algorithmus wählt in $n-2$ Runden jeweils eine Kante, die der Menge R hinzugefügt wird.

(a) Beweisen Sie sorgfältig: Wenn $C_0 \subseteq E$ ein Schnitt in G von minimaler Kardinalität ist, dann gibt es eine Teilmenge $S_0 \subseteq V$ mit $S_0 \notin \{\emptyset, V\}$, so dass S_0 und $V - S_0$ in $(V, E - C_0)$ zusammenhängend sind und so dass $C_0 = \{(v, w) \in E \mid v \in S_0, w \in V - S_0\}$ gilt.

(b) Für einen Schnitt C_0 wie in (a) gilt die für die Analyse wichtige Behauptung:

BasicMinCut liefert die Ausgabe C_0 $\iff$ In keiner Runde wird eine Kante aus C_0 gewählt.

Beweisen Sie diese Behauptung sorgfältig, anhand der in der Vorlesung gegebenen Skizze!

Hinweis: Es sind zwei Richtungen zu zeigen. Die Richtung „ $\Longrightarrow$ “ ist ganz einfach. Für die Richtung „ $\Longleftarrow$ “ beginnen Sie mit dem induktiven Beweis folgender Aussage:

„Für alle i mit $0 \leq i \leq n-2$ gilt: Wenn in den ersten i Runden keine Kante aus C_0 gewählt wurde, so gilt nach Runde i für jede Zusammenhangskomponente von (V, R), dass sie entweder vollständig in S_0 oder vollständig in $V - S_0$ enthalten ist.“

Benutzen Sie dann die Tatsache, dass der Algorithmus eine Menge $R \subseteq E$ liefert, für die (V, R) genau zwei Zusammenhangskomponenten S und $V - S$ hat, um zu sehen, dass $\{S_0, V - S_0\} = \{S, V - S\}$ gilt. Daraus folgt dann, dass der Algorithmus die Menge C_0 ausgibt.

Aufgabe 2 (MinCut) *

Wenden Sie sich erneut der Beschreibung des randomisierten MinCut-Algorithmus aus der Vorlesung, Abschnitt 1.1, zu. Graph G und die aufzubauende Kantenmenge R ist wie in Aufgabe 1.

(a) Beim BasicMinCut-Algorithmus ist die Wahrscheinlichkeit, in den ersten Runden eine Kante aus C_0 zu wählen, eher gering. Geben Sie eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass nach $n-L$ Runden noch keine Kante aus C_0 gewählt worden ist, wobei $2 \le L \le n-1$ ist.

(b) Wir lassen den BasicMinCut-Algorithmus einmal für $n-L$ Runden laufen. Der resultierende Graph $G_{n-L} = (V, R_{n-L})$ hat L Zusammenhangskomponenten. Startend mit (immer demselben) G_{n-L} (und der entsprechenden Union-Find-Datenstruktur) lassen wir den BasicMinCut-Algorithmus K-mal bis zum Ende, also noch $L-2$ Runden, laufen und wählen den kleinsten sich dabei ergebenden Schnitt als Ausgabe. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit nach oben ab (in Abhängigkeit von K, L, n), dass dieser Algorithmus nicht den minimalen Schnitt C_0 ausgibt. (Es gibt $(n-L)+K(L-2) \le n+KL$ Algorithmenrunden. Die Versagenswahrscheinlichkeit für einen Durchlauf im zweiten Teil hat dieselbe Schranke wie der Originalalgorithmus auf einem Graphen mit L Knoten.)

(c) Nun lassen wir den Algorithmus aus (b) c-mal ablaufen, und geben den kleinsten dabei entstehenden Schnitt aus. Die Gesamtrundenanzahl ist höchstens $c(n+KL)$. Wählen Sie K, L und c geschickt, um mit möglichst wenigen Runden eine konstante Fehlerwahrscheinlichkeit zu erzielen. Wie viele Runden benötigen Sie? (Streben Sie eine Schranke der Form $O(n^\alpha)$ an, für eine Konstante $\alpha > 1$.)

Aufgabe 3 (Glücksspiel) *

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben und **geben Sie zusätzlich** jeweils einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) an.

(a) Wir betrachten eine vereinfachte Version des Spiels „Lotto k aus n“. Ein Spieler tippt k verschiedene Zahlen aus $\{1,2,\dots,n\}$, anschließend werden k Zahlen aus $\{1,2,\dots,n\}$, ohne Zurücklegen, gezogen. Zieht man eine Zahl, sind alle wählbaren Zahlen gleichwahrscheinlich.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau r Zahlen richtig getippt zu haben, für $0 \le r \le k$?

(b) Es wird wiederholt eine Münze geworfen, mit Wahrscheinlichkeit 0,5 für „Kopf“ und für „Zahl“, bis das Ereignis „Kopf“ eintritt oder die Münze maximal n mal geworfen wurde. Ergibt der k-te Münzwurf „Kopf“, wird ein Gewinn in Höhe von $\frac{2^k}{k}$ ausgezahlt. Tritt das Ereignis „Kopf“ nie ein, wird kein Gewinn ausgezahlt.

Wie hoch sollte man die Teilnahmegebühr wählen, damit der erwartete Gewinn 0 ist?

(c) Wir betrachten eine Roulette-Spielstrategie. Der Spieler setzt auf rot oder schwarz, beide Ereignisse sind gleichwahrscheinlich. Fällt die Roulette-Kugel auf die gewählte Farbe, erhält er den doppelten Einsatz, ansonsten bekommt er kein Geld. Der Spieler verfährt wie folgt: Nach $k-1$ in Folge verlorenen Runden setzt er 2^{k-1} Euro in der k-ten Runde, $k \ge 1$. Der Spieler hört auf zu spielen, wenn er das erste Mal gewinnt.

- **(i)** Wie groß ist der erwartete Gewinn?
- **(ii)** Ist diese Strategie sinnvoll?
  (**Hinweis:** Betrachten Sie den mittleren Einsatz vor dem ersten Gewinn.)
- **(iii)** Wie groß ist der erwartete Gewinn, wenn das Spiel nach einer endlichen, festen Anzahl von Runden abgebrochen wird?