Rev. 1, 23.04.2018
TU Ilmenau, Fakultät für Informatik und Automatisierung
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Univ.-Prof. Dr. M. Dietzfelbinger, M. Sc. P. Schlag
http://www.tu-ilmenau.de/iti/lehre/lehre-ss-2018/ra/

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
**ILMENAU**

# Randomisierte Algorithmen SS 2018 – Übung 2

Besprechung: Montag, 30. April 2018

**Hinweis:** Für das erfolgreiche Vorrechnen einer mit „*“ gekennzeichneten Aufgabe wird ein Bonuspunkt vergeben, es gibt maximal zwei Bonuspunkte pro Studierendem im Semester. Bitte geben Sie Ihren Lösungsvorschlag bis zum Vortag der Übung (Sonntag), 13:00 Uhr, per E-Mail an philipp.schlag@tu-ilmenau.de oder bis Freitag, 15:00 Uhr, direkt in meinem Büro (Z 1048) ab.

## Aufgabe 1 (MinCut) *

Wenden Sie sich erneut der Beschreibung des randomisierten MinCut-Algorithmus aus der Vorlesung, Abschnitt 1.1, zu. Graph $G$ und die aufzubauende Kantenmenge $R$ ist wie in Aufgabe 1 von Übung 1.

**(a)** Beim BasicMinCut-Algorithmus ist die Wahrscheinlichkeit, in den ersten Runden eine Kante aus $C_0$ zu wählen, eher gering. Geben Sie eine untere Schranke (in Abhängigkeit von $L$, $n$) für die Wahrscheinlichkeit an, dass nach $n-L$ Runden noch keine Kante aus $C_0$ gewählt worden ist, wobei $2 \leq L \leq n-1$ ist.

**(b)** Wir lassen den BasicMinCut-Algorithmus einmal für $n-L$ Runden laufen. Der resultierende Graph $G_{n-L} = (V, R_{n-L})$ hat $L$ Zusammenhangskomponenten. Startend mit (immer demselben) $G_{n-L}$ (und der entsprechenden Union-Find-Datenstruktur) lassen wir den BasicMinCut-Algorithmus $K$-mal bis zum Ende, also noch $L-2$ Runden, laufen und wählen den kleinsten sich dabei ergebenden Schnitt als Ausgabe. Es gibt also insgesamt $(n-L)+K(L-2) \leq n+KL$ Algorithmenrunden. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit nach oben ab (in Abhängigkeit von $K$, $L$, $n$), dass dieser Algorithmus nicht den minimalen Schnitt $C_0$ ausgibt.

**Hinweis:** Die Versagenswahrscheinlichkeit für einen Durchlauf im zweiten Teil hat dieselbe Schranke wie der Originalalgorithmus auf einem Graphen mit $L$ Knoten.

**(c)** Nun lassen wir den Algorithmus aus (b) $c$-mal ablaufen, und geben den kleinsten dabei entstehenden Schnitt aus. Die Gesamtrundenanzahl ist höchstens $c(n+KL)$. Wählen Sie $K$, $L$ und $c$ geschickt, um mit möglichst wenigen Runden eine konstante Fehlerwahrscheinlichkeit zu erzielen. Wie viele Runden benötigen Sie? (Streben Sie eine Schranke der Form $O(n^\alpha)$ an, für eine Konstante $\alpha > 1$.)

**Aufgabe 2** (Bälle auf Körbe) *

Seien $n, m \in \mathbb{N}$, mit $n, m \geq 1$. Wir betrachten das Zufallsexperiment, $n$ Bälle auf $m$ Körbe zu werfen, wobei jeder Korb bei einem einzelnen Wurf mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/m$ getroffen wird.

**(a)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Korb Nr. $j$, für $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, leer bleibt?
Geben Sie sowohl für den Fall $n = m$ als auch für den allgemeineren Fall $n = \alpha m$, $\alpha > 0$ konstant, eine Näherung dieser Wahrscheinlichkeit an.

**Hinweis:** Hier wird die Unabhängigkeit gewisser Ereignisse benutzt.

**(b)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in Korb Nr. $j$, für $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, genau ein Ball landet?
Geben Sie für den Fall $n = m$ und den Fall $n = \alpha m$ eine Näherung dieser Wahrscheinlichkeit an.

**(c)** Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl $Y$ leerer Körbe?

**Hinweis:** Benutzen Sie $Y = \sum_{1 \leq j \leq m} [\text{Korb } j \text{ ist leer}]$.

**(d)** Es sei nun $c > 0$ und $n = \lceil (c + \ln m) m \rceil$.

**(i)** Man berechne eine obere Schranke für

$$\mathbf{Pr}(\text{es gibt einen leeren Korb}).$$

**Hinweis:** Aufgabenteil (a), union bound (Fakt 2.1.6(c)).

**(ii)** Was ergibt sich für $c = \ln m$, das heißt für $n = 2m \ln m$?

**Aufgabe 3** (Chebychev-Cantelli-Ungleichung)

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, d. h. $\mathbf{Var}(X)$ existiert. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Chebychev-Cantelli-Ungleichung

$$\mathbf{Pr}(X \geq \mathbf{E}(X) + t) \leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{\mathbf{Var}(X) + t^2} \qquad (*)$$

für alle $t \geq 0$ ohne Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zu beweisen. Zeigen Sie dazu die folgenden Behauptungen:

**(a)** Für alle $c > 0$ und $t \geq 0$ gilt:

$$\mathbf{Pr}(X \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}((X + c)^2)}{(t + c)^2}.$$

**(b)** Sei $\mathbf{E}(X) = 0$. Dann gilt die Ungleichung (*) für alle $t \geq 0$.

**(c)** Die Ungleichung (*) gilt für alle $t \geq 0$.