Rev. 1, 18.05.2018

TU Ilmenau, Fakultät für Informatik und Automatisierung
FG Komplexitätstheorie und Effiziente Algorithmen
Univ.-Prof. Dr. M. Dietzfelbinger, M. Sc. P. Schlag
http://www.tu-ilmenau.de/iti/lehre/lehre-ss-2018/ra/

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Randomisierte Algorithmen SS 2018 – Übung 4

Besprechung: Montag, 28. Mai 2018

Hinweis: Für das erfolgreiche Vorrechnen einer mit „*“ gekennzeichneten Aufgabe wird ein Bonuspunkt vergeben, es gibt maximal zwei Bonuspunkte pro Studierendem im Semester. Bitte geben Sie Ihren Lösungsvorschlag bis zum Vortag der Übung (Sonntag), 13:00 Uhr, per E-Mail an philipp.schlag@tu-ilmenau.de oder bis Freitag, 15:00 Uhr, direkt in meinem Büro (Z 1048) ab.

Aufgabe 1 (Erzeugen einer Zufallspermutation) *

Wir möchten eine zufällige Permutation von $\{1,2,\ldots,n\}$ generieren, jede mögliche Permutation soll dabei gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Dazu betrachten wir folgende Algorithmen, die die Permutation im Array $\mathtt{I}[1..n]$ speichern:

Algorithmus 1 : Permutation naiv

Eingabe : Ganze Zahl $n \geq 1$.
Ausgabe : Permutation von $\{1,2,\ldots,n\}$ im Array $\mathtt{I}[1..n]$.
Datenstruktur : Arrays $\mathtt{I}[1..n]$ und $\mathtt{H}[1..n]$.

for $\mathtt{i} = 1,2,\ldots,n$ **do** $\mathtt{H}[\mathtt{i}] \leftarrow 0$;
for $\mathtt{i} = 1,2,\ldots,n$ **do**
  repeat
    $\mathtt{j} \leftarrow$ eine uniform zufällig gezogene Zahl aus $\{1,2,\ldots,n\}$;
  until $\mathtt{H}[\mathtt{j}] = 0$;
  $\mathtt{I}[\mathtt{i}] \leftarrow \mathtt{j}$; $\mathtt{H}[\mathtt{j}] \leftarrow 1$;
end
return $\mathtt{I}$;

Algorithmus 2 : Permutation clever

Eingabe : Ganze Zahl $n \geq 1$.
Ausgabe : Permutation von $\{1,2,\ldots,n\}$ im Array $\mathtt{I}[1..n]$.
Datenstruktur : Array $\mathtt{I}[1..n]$.

1 **for** $\mathtt{i} = 1,2,\ldots,n$ **do** $\mathtt{I}[\mathtt{i}] \leftarrow \mathtt{i}$;
2 **for** $\mathtt{i} = n,n-1,\ldots,2$ **do**
3   $\mathtt{j} \leftarrow$ eine uniform zufällig gezogene Zahl aus $\{1,2,\ldots,\mathtt{i}\}$;
4   Tausche $\mathtt{I}[\mathtt{i}]$ und $\mathtt{I}[\mathtt{j}]$;
5 **end**
6 **return** $\mathtt{I}$;

(a) Begründen Sie, dass Algorithmus 1 korrekt ist und bestimmen Sie die erwartete Laufzeit.

(b) Zeigen Sie, dass Algorithmus 2 korrekt ist und geben Sie die Laufzeit an.

Hinweis: Formulieren und beweisen Sie eine geeignete Schleifeninvariante für die Schleife 2–5.

(c) Wie würde man eine zufällige (genau) k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n\}$ erzeugen?

Hinweis: Hierauf gibt es keine geschlossene Antwort. Es kommt darauf an, wie groß k ist und welche Laufzeiten akzeptabel sind. Finden Sie möglichst ein Verfahren mit erwarteter Laufzeit $O(k)$.

Aufgabe 2 (Kreise und Permutationen) *

Man kann eine Permutation π von $V = \{1,2,\dots,n\}$ als gerichteten Graph $G_\pi = (V, E_\pi)$ darstellen: Für jeden Knoten $i \in V$ gibt es eine Kante von i nach $\pi(i)$, d. h. $E_\pi = \{(i, \pi(i)) \mid i \in V\}$. Wir betrachten nun einen solchen Graphen, der aus einer uniform zufällig gewählten Permutation π entsteht. Der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum ist also (Ω, p) mit

$$\Omega = \{\pi \mid \pi \text{ ist Permutation von } \{1,2,\dots,n\}\} \quad \text{und} \quad p(\pi) = 1/|\Omega| = 1/n! \text{ für alle } \pi \in \Omega.$$

Eine Folge $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v_0)$ von verschiedenen Knoten aus G_π mit $(v_i, v_{i+1}) \in E_\pi$ für $0 \le i < k$ heißt *(einfacher) Kreis*. Die Folgen $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i)$, $0 \le i < k$, beschreiben denselben Kreis. Wir wollen zeigen, dass

$$\mathbf{E}(\text{Anzahl Kreise in } G_\pi) = \Theta(\log n)$$

gilt, für $n \to \infty$.

(a) Seien $1 \le k \le n$ sowie $v_0, v_1, \dots, v_{k-1} \in V$ mit $v_i \ne v_j$ für $0 \le i < j < k$ beliebig. Für die Folge $p = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$ sei I_p eine Indikatorzufallsvariable mit $I_p := [p \text{ ist Kreis in } G_\pi]$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}(I_p = 1) = \mathbf{Pr}(p \text{ ist Kreis in } G_\pi)$.

(b) Für eine nicht-leere Knotenmenge $W \subseteq V$ gebe die Zufallsvariable C_W die Anzahl an Kreisen in G_π an, die genau aus den Knoten in W bestehen. (Mögliche Werte von C_W sind natürlich nur 0 und 1.) Drücken Sie C_W mit Hilfe der in (a) eingeführten Indikatorzufallsvariablen aus. Achten Sie dabei darauf, denselben Kreis nicht mehrfach zu zählen. Bestimmen Sie anschließend $\mathbf{E}(C_W)$.

(c) Sei C die Anzahl aller Kreise in G_π. Drücken Sie diese Zufallsvariable mit Hilfe der in (b) verwendeten Zufallsvariablen aus und bestimmen Sie ihren Erwartungswert $\mathbf{E}(C)$.