Digitale Regelungen

Beiblatt zur Stabilität im Sinne von Lyapunov

Wir betrachten das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k\,, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1a}$$
$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{1b}$$

mit $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$, $y_k \in \mathbb{R}^q$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$.
Für SISO-Systeme gilt: $p = q = 1$.

D. 1 (Ruhelage) *Der Punkt $x^s \in \mathbb{R}^n$ für den gilt:*

$$x^s = Ax^s$$

heißt Ruhelage von (1).

Bem. 1 *Ist x^s Ruhelage von* (1)*, so ist $(x_k^s) = (x^s, x^s, x^s, \ldots)$* ***stationäre Lösung*** *des homogenen Teils von* (1) *mit Anfangswert $x_0 = x^s$.*

Bem. 2 *Sei (x_k^s) stationäre Lösung des homogenen Teil von* (1)*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} x_k^s &= x_{k+1}^s = Ax_k^s \\ (I - A)x_k^s &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $x^s = 0$ *ist stets Ruhelage von* (1).

- *Falls $\lambda = 1$ Eigenwert von A ist, so sind die zu λ zugehörigen Eigenvektoren $v \in \mathbb{R}^n$ (inkl. alle skalaren Vielfachen) Ruhelagen von* (1).

D. 2 (Stabilität) *Die Ruhelage $x^s = 0$ heißt stabil, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß gilt:*

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \qquad \Rightarrow \qquad \|x_k\| < \varepsilon, \quad \text{für alle} \quad k \geq 0.$$

D. 3 (Asymptotische Stabilität) *Die Ruhelage $x^s = 0$ heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und $\delta(\varepsilon) > 0$ so gewählt werden kann, daß gilt:*

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0.$$

D. 4 (Exponentielle Stabilität) *Die Ruhelage $x^s = 0$ heißt exponentiell stabil, wenn Konstanten $\gamma > 0$ und $0 \leq \lambda < 1$ existieren, so daß gilt:*

$$\|x_k\| \leq \gamma\lambda^k \|x_0\| \quad \text{für alle} \quad k \geq 0.$$

Bem. 3 *Für die hier betrachteten* ***linearen zeitinvarianten*** *Systeme* (1) *ist die Ruhelage $x^s = 0$* ***genau dann exponentiell*** *stabil, wenn sie* ***asymptotisch*** *stabil ist.*