Digitale Regelung - Beiblatt

Winter 2011

Zur z-Transformation

Die z-Transformation ist eine **eineindeutige** Zuordnung der Folgenwerte (f_k) zu der komplexwertigen Funktion $f_z : C_\gamma \to \mathbb{C}$. C_γ heißt Konvergenz- oder Existenzbereich der z-Transformierten f_z, die im Folgenden definiert ist.[1]

Definition 1 (z-Transformation) *Wir nehmen an, dass die Folgenwerte $(f_k), k = 0, 1, \ldots$ der Ungleichung*

$$|f_k| < c\,\gamma^k$$

für geeignete positive Konstanten γ und c genügen. Dann ist die Summe (Laurent-Reihe)

$$f_z(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \tag{1}$$

für alle z mit $|z| > \gamma$ absolut konvergent. Man nennt die Funktion $f_z(z)$ die z-Transformierte von (f_k) und das Gebiet $C_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| > \gamma\}$ den Existenzbereich von $f_z(z)$.

1 Beispiele

Einheitssprungfolge:

Sei (f_k) die Einheitsprungfolge: $(f_k) = (1^k)$. Nach (1) gilt:

$$f_z(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^k$$

Offenbar ist dies die geometrische Reihe mit Quotienten $q = z^{-1}$. Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und ist dann $(1-q)^{-1}$. Also existiert die z-Transformierte der Einheitssprungfolge für $z \in \{z \in \mathbb{C} \big| |z| > 1\}$ ist gegeben durch:

$$f_z(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Exponentialfolge

Sei $(f_k) = e^{\alpha k T_a}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}, T_a > 0$. Nach (1) gilt:

$$f_z(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k T_a} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{\alpha T_a} z^{-1}\right)^k$$

Wir erhalten wieder eine geometrische Reihe mit Quotienten $q = e^{\alpha T_a} z^{-1}$. Für die Konvergenz müssen wir wieder fordern, dass gilt: $|q| < 1$, es muss also gelten:

$$\begin{aligned} \left| e^{\alpha T_a} z^{-1} \right| = \left| \frac{e^{\alpha T_a}}{z} \right| = \frac{e^{\mathrm{Re}(\alpha) T_a}}{|z|} &< 1 \\ |z| &> e^{\mathrm{Re}(\alpha) T_a} \end{aligned}$$

Für $|z| > e^{\mathrm{Re}(\alpha) T_a}$ erhalten wir somit die z-Transformierte:

$$f_z(z) = \frac{1}{1 - e^{\alpha T_a} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha T_a}}$$

[1] Wir betrachten hier lediglich Folgen (f_k) mit $k \geq 0$ (sog. einseitige z-Transformation). Sollten Folgewerte für $k < 0$ benötigt werden, so gelte für diese Folgewerte: $f_k = 0$.

2 Rücktransformation

Die Rücktransformation der z-Transformierten $f_z(z)$ in den Folgenbereich (f_k) erfolgt über die Theorie der Laurent-Reihe. Es kann gezeigt werden, dass $f_z(z)$ in ihrem Existenzbereich C_γ eine holomorphe Funktion ist. Dann ist $f_z(z)$ in jedem Punkt $z \in C_\gamma$ durch die Reihe der Form (1) mit

$$f_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma f_z(z) z^{k-1} dz \quad =: \quad \mathcal{Z}^{-1}\{f_z(z)\} \tag{2}$$

entwickelbar. Das Wegintegral entlang des Kreises Γ mit Radius $r \geq \gamma$ wird im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) durchlaufen.[2]

In der Praxis wird häufig anstelle der Auswertung des Integrals (2) die Zerlegung der z-Transformierten in **Partialbrüche** und Abgleich mit einer **Korrespondenztabelle** bevorzugt.

3 Korrespondenztabelle

Nachfolgend finden Sie eine Zusammenstellung von häufig auftretenden Signalen bei linearen Systemen. Für die Parameter gilt: $T_a, \omega_0 > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Zeitbereich (f_k)	Bildbereich $f_z(z)$
$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$	1
$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z - e^{\alpha T_a}}$
$\left((kT_a)^n e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}\left(\frac{z}{z - e^{\alpha T_a}}\right)$
$\left(\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{\sin(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\left(\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - \cos(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\left(e^{\alpha k T_a} \sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{e^{\alpha T_a} \sin(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$
$\left(e^{\alpha k T_a} \cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - e^{\alpha T_a} \cos(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$

[2] Das Wegintegral kann auch für jede andere geschlossene Kontour Γ gebildet werden, solang Γ vollständig in C_γ liegt und den Ursprung $z = 0$ umschliesst.

4 Eigenschaften und Sätze der z-Transformation

Bezeichnung	Zeitbereich	Bildbereich	Bemerkung
Linearität	$c_1(f_k) + c_2(g_k)$	$c_1 f_z(z) + c_2 g_z(z)$	$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
Verschiebungssatz 1	$(f_{k-n}), \quad n \in \mathbb{N}^+$	$z^{-n}\left(f_z(z) + \sum_{j=1}^{n} f_{-j} z^j\right)$	(Rechtsverschiebung)
Verschiebungssatz 2	$(f_{k+n}), \quad n \in \mathbb{N}^+$	$z^{n}\left(f_z(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^{-j}\right)$	(Linksverschiebung)
Dämpfungssatz	$(c^k f_k), \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$f_z\left(\frac{z}{c}\right)$	
Vorwärtsdifferenz	$(f_{k+1} - f_k)$	$(z-1) f_z(z) - z f_0$	
Rückwärtsdifferenz	$(f_k - f_{k-1})$	$\frac{z-1}{z} f_z(z) - f_{-1}$	
Summenbildung	$\left(\sum_{j=0}^{k} f_j\right)$	$\frac{z}{z-1} f_z(z)$	
Faltungssatz	$(f_k) * (g_k) = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j}\, g_j$	$f_z(z) g_z(z)$	
Anfangswertsatz	$f_0 = \lim_{z\to\infty} f_z(z)$	Nur anwendbar, falls Grenzwert existiert!	
Endwertsatz	$\lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{z\to 1}(z-1) f_z(z)$	Nur anwendbar, falls Grenzwert existiert!	

5 Zusammenhang zur Laplace-Transformation

Vor allem in der älteren Literatur wird die z-Transformation auch häufig als „diskrete Laplace-Transformation“ bezeichnet. Diese Begrifflichkeit wird plausibel, wenn man die Folge (f_k) als Folge von Abtastwerten der Funktion $f(t)$ zu den Zeitpunkten kT_a betrachtet. Schreibt man diese nun in Form einer Impulsfolge, so erhält man

$$(f_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_a)\delta(t - kT_a)\,.$$

Läßt man nun die Laplace-Transformation des Dirac-Impulses[3] zu, ergibt sich:

$$\mathcal{L}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, e^{-kT_a s} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(e^{sT_a}\right)^{-k}\,.$$

Durch die Substitution $z := e^{sT_a}$ erhält man unmittelbar die Definition der z-Transformierten in (1).

[3] Vgl. Abschnitt 5 in: Kai Wulff, *Beiblatt zur Laplace-Transformation*, Regelungs- und Systemtechnik 1, TU Ilmenau.

6 Anwendung der z-Transformierten auf Differenzengleichungen

Wir betrachten die skalare Differenzengleichung

$$y_k + a_{n-1}y_{k-1} + \ldots + a_1 y_{k-n+1} + a_0 y_{k-n} = b_n u_k + b_{n-1}u_{k-1} + \ldots + b_1 u_{k-n+1} + b_0 u_{k-n}\,. \tag{3}$$

Setzen wir nun für die Eingangsfolge (u_k) und die Ausgangsfolge (y_k) voraus, dass gilt:

$$u_k = 0 = y_k\,, \qquad k < 0\,,$$

so erhalten wir mit dem Verschiebungssatz 1:

$$y(z) + a_{n-1}z^{-1}y(z) + \ldots + a_1 z^{-n+1}y(z) + a_0 z^{-n}y(z) = \tag{4}$$

$$= b_n u(z) + a_{n-1}z^{-1}u(z) + \ldots + a_1 z^{-n+1}u(z) + a_0 z^{-n}u(z) \tag{5}$$

und nach Ausklammern, Quotientenbildung und Erweiterung mit z^n die z-Übertragungsfunktion des Einausgangsverhaltens

$$G(z) := \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}\,.$$

7 Quellen

[1] G. Doetsch: *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z-Transformation*, Oldenbourg, München, 1967.

[2] F. Gausch, A. Hofer, K. Schlacher: *Digitale Regelkreise*, Oldenbourg, München, 1993.

[3] A. Kugi: *Skriptum zur Vorleseung: „Automatisierung“*, Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, 2007.