Digitale Regelung - Beiblatt

Winter 2011

Anwendung der z-Transformation in der Digitalen Regelung

1 Die z-Übertragungsfunktion einer zeitkontinuierlichen Strecke im Abtastregelkreis

Im Zusammenhang mit Abtastregelkreisen ist es von Interesse, die z-Übertragungsfunktion des zeitdiskreten Ein-Ausgangsverhaltens zu bestimmen, das durch Reihenschaltung von Halteglied, zeitkontinuierlicher Regelstrecke und Abtastung des Ausgangssignals gegeben ist (siehe Abb. 1). Gesucht ist also $G(z) = \frac{y(z)}{u(z)}$.

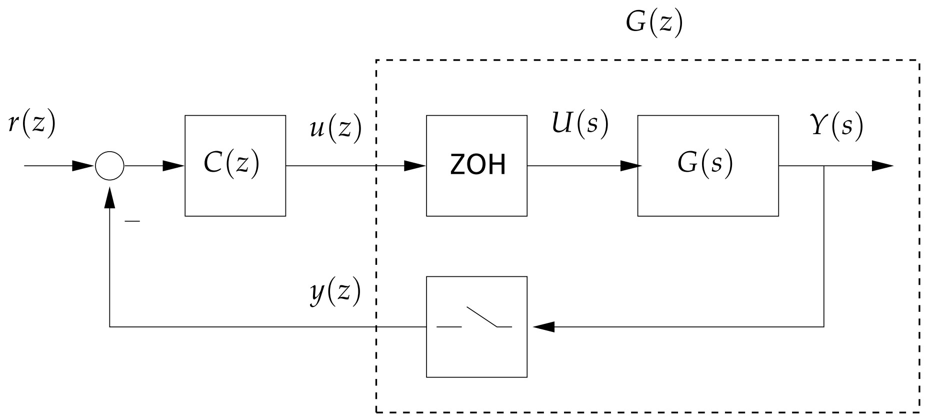

Abbildung 1: Blockbild des Abtastregelkreises mit Halteglied 0-ter Ordnung (ZOH)

Man beachte, dass die Herleitung nur für ein (ideales) **Halteglied 0-ter Ordnung** am Eingang der zeitkontinuierliche Strecke und einen (idealen) Abtaster am Ausgang der Strecke gilt. Halteglied und Abtaster sollen mit der Abtastzeit T_a synchronisiert sein.

Wir wählen für unsere Betrachtung exemplarisch die Eingangsfolge $(u_k) = \delta_k \quad \overset{\mathcal{Z}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad 1$. Das Halteglied 0-ter Ordnung erzeugt das zeitkontinuierliche Signal

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_a) \qquad \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \qquad \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT_a}\right) .$$

Für die Laplacetransformierte $Y(s)$ des zeitkontinuierlichen Ausgangssignals $y(t)$ ergibt sich damit:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT_a}\right) \qquad \overset{\mathcal{L}}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \qquad y(t) . \tag{1}$$

Das zeitkontinuierliche Signal $y(t)$ muss nun abgetastet, also an den Punkten $t = kT_a$ ausgewertet, und z-transformiert werden. Wir erhalten also

$$G(z) = \frac{y(z)}{1} = \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}\Big|_{t=kT_a} \right\} . \tag{2}$$

Zur vereinfachung der Notation führen wir den Operator Z ein, der inverse Laplacetransformation, Abtastung und z-Transformation beschreibt:

$$\mathsf{Z}\{\cdot\} := \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\{\,\cdot\,\}\Big|_{t=kT_a} \right\}$$

Setzen wir nun (1) in (2) ein, so erhalten wir

$$G(z) \quad = \quad \mathsf{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\left(1-e^{-sT_a}\right)\right\} = \mathsf{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} - \mathsf{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\,e^{-sT_a}\right\}.$$

Der Faktor e^{-sT_a} im letzten Term entspricht im Zeitbereich (der zeitkontinuierlichen Funktion) einer Totzeit der Dauer T_a. Nach Abtastung ergibt sich damit eine Verschiebung der entsprechenden Folge um genau einen Abtastschritt. Mit dem Verschiebungssatz der z-Transformation ergibt sich

$$G(z) \quad = \quad \mathsf{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} - \frac{1}{z}\,\mathsf{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\,\mathsf{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}.$$

Mit letzterem Ausdruck läßt sich die z-Übertragungsfunktion des zeitdiskreten Ein-Ausgangsverhaltens der Regelstrecke mit Hilfe einer Korrespondenztabelle (z. B. Tabelle 1) leicht bestimmen.

Z-Operator

Laplace-Transformation $\Longleftrightarrow$ Abtastung $\Longrightarrow$ z-Transformation $\Longleftrightarrow$

Laplace-Transformierte $F(s)$	zeitkontinuierl. Signal $f(t),\ t \geq 0$	zeitdiskretes Signal $(f_k),\ k \geq 0$	z-Transformierte $f_z(z)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}$	$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T_a}}$
$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{\alpha t}$	$\left((kT_a)^n e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}\left(\frac{z}{z-e^{\alpha T_a}}\right)$
$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\left(\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{\sin(\omega_0 T_a)\,z}{z^2-2\cos(\omega_0 T_a)\,z+1}$
$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\left(\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2-\cos(\omega_0 T_a)\,z}{z^2-2\cos(\omega_0 T_a)\,z+1}$
$\frac{\omega_0}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\sin(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{e^{\alpha T_a}\sin(\omega_0 T_a)\,z}{\left(z^2-2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\,z+e^{2\alpha T_a}\right)}$
$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\cos(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2-e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\,z}{\left(z^2-2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\,z+e^{2\alpha T_a}\right)}$

Tabelle 1: Korrespondenztabelle der z- und Laplace-Transformation abgetasteter Signale

2 Quellen

[1] G. Doetsch: *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z-Transformation*, Oldenbourg, München, 1967.

[2] F. Gausch, A. Hofer, K. Schlacher: *Digitale Regelkreise*, Oldenbourg, München, 1993.

[3] A. Kugi: *Skriptum zur Vorleseung: „Automatisierung“*, Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, 2007.