Kleines Matrix-ABC

1 Elementares

Eine $(n \times m)$-Matrix ist eine rechteckige Anordnung von reellen oder komplexen Zahlen a_{ij} (auch Skalare genannt) und besteht aus n Zeilen und m Spalten:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} . \end{bmatrix}$$

Die Skalare a_{ij} heißen **Einträge** oder **Elemente** der Matrix A. Eine Matrix heißt **quadratisch**, wenn $n = m$ ist. Der Raum der reellen $n \times m$-Matrizen wird mit $\mathbb{R}^{n \times m}$ bezeichnet.

Eine Matrix mit nur einer Spalte, also $m = 1$ heißt **Spaltenvektor**:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Die Einträge v_i des Vektors sind wieder Skalare und haben meist nur einen einstelligen Index. Eine Matrix mit nur einer Zeile heißt entsprechend **Zeilenvektor**. Um dies zu betonen werden Zeilenvektoren häufig als transponierte Spaltenvektoren geschrieben: v^T.

Zur Notation Manche Autoren verwenden spezielle Schriftsätze, um zwischen Matrizen, Vektoren und Skalaren zu unterscheiden. So werden Matrizen manchmal durch Großbuchstaben $(A, B, \ldots)$, Vektoren durch Kleinbuchstaben $(a, x, v, \ldots)$ und Skalare durch griechische Buchstaben $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ dargestellt. Andere verwenden fette Buchstaben **A,B,C** für Matrizen oder Pfeile über den Buchstaben $(\vec{a}, \vec{x}, \vec{v})$ für Vektoren. Leider gibt es keine einheitliche Konvention. Deshalb sollte man im Zweifelsfall stets selbst prüfen, um was es sich handelt.

Identität (Einheitsmatrix) $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Wenn sich die Dimension aus dem Zusammenhang ergibt, wollen wir den Index n weglassen.

Transponierte Beim Transponieren einer Matrix werden Spalten und Zeilen vertauscht. Wir notieren[1] die Transponierte einer Matrix A einem hochgestellten T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} .$$

[1] Manche Autoren schreiben A'.

Man beachte, dass sich für nicht-quadratische Matrizen auch die Dimension ändert.

Natürlich können auch Vektoren transponiert werden. Dabei wird aus dem Spaltenvektor v der Zeilenvektor v^T.

Bei Matrizen mit komplexwertigen Elementen wird beim Transponieren häufig auch gleich das Vorzeichen der Imaginärteile der Elemente gewechselt, also konjugiert.[2] Diese Operation heißt adjungieren, die Adjungierte der Matrix A wird mit A^* bezeichnet.[3]

Lineare Unabhängigkeit Die Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt **linear abhängig**, wenn es reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt, die *nicht alle* null sind, so dass für die Linearkombination gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0\,.$$

Wenn die *einzige* Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ ist, so heißt die Menge von Vektoren **linear unabhängig**.

Rang Der Rang einer Matrix bezeichnet die Anzahl ihrer linear unabhängigen Spalten (oder Zeilen). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(A) &\leq \min\{m, n\} \\ \operatorname{rang}(A) &= \operatorname{rang}(A^T)\,. \end{aligned}$$

Für *quadratische* Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

wenn $\operatorname{rang}(A) = n$, so heißt A **regulär** (oder nicht-singulär),
wenn $\operatorname{rang}(A) < n$, so heißt A **singulär** (oder nicht-regulär).

Addition Zwei Matrizen werden addiert, indem jedes Element addiert wird. Es können also nur Matrizen gleicher Größe addiert werden.

Multiplikation Zwei Matrizen werden multipliziert, indem die Skalarprodukte der Zeilen und Spalten ausgewertet werden. Genauer gesagt ergibt sich der Eintrag a_{ij} des Produkts zweier Matrizen aus dem Skalarprodukt der i-ten Zeile des ersten Faktors und der j-ten Spalte des zweiten Faktors. Beachten Sie, dass nur Matrizen geeigneter Dimension multipliziert werden können.

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, so ist $C = AB \in \mathbb{R}^{n\times r}$:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}\, b_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m} a_{mj}\, b_{jr} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{nj}\, b_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m} a_{nj}\, b_{jr} \end{bmatrix}$$

[2] Achtung: Matlab macht dies beim Transponieren von komplexen Matrizen automatisch.
[3] Nicht zu verwechseln mit der Adjunkten, die weiter unter betrachtet wird.

2 Quadratische Matrizen

Quadratische Matrizen haben die gleiche Anzahl von Spalten wie Zeilen.

Spur Die Spur einer Matrix ist die Summe der Diagonalelemente:

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Kofaktor und Minor Die Kofaktoren γ_{ij} berechnen sich mit Hilfe der Minoren oder Unterdeterminanten. Es gilt:

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})\,,$$

wobei $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ diejenige Untermatrix von A ist, die nach Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte bleibt. Deren Determinante $\det(M_{ij})$ heißt **Minor** oder **Unterdeterminante**.

Als **Hauptminoren**, **Hauptunterdeterminanten** oder auch **Hauptabschnittsdeterminanten** werden diejenigen Minoren bezeichnet, die zu denjenigen Untermatrizen gehören, die durch sukzessives Streichen der letzten Spalte und untersten Zeile hervorgehen (manchmal auch als „nordwestliche Untermatrizen“ oder Hauptabschnitt bezeichnet). Es gibt also stets n Hauptminoren.

Determinante Die Determinante einer Matrix kann iterativ über ihre Unterdeterminanten gebildet werden. Dafür gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{ij}\,,$$

wobei der Index i beliebig gewählt werden kann und γ_{ij} der (i,j)-Kofaktor von A ist.

Beispiele: Entwicklung entlang der ersten Zeile:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\,d - b\,c\,, \qquad \text{(die Kofaktoren sind: } \gamma_{11} = d,\ \gamma_{12} = -c)$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Adjunkte Die Adjunkte[4] setzt sich aus den Kofaktoren zusammen. Sei $C(A) = \{\gamma_{ij}\}$ eine Matrix deren Elemente die Kofaktoren von A sind. Dann ergibt sich die Adjungierte durch Transponieren:

$$\text{adj}(A) = C(A)^T$$

Beispiel: Für eine (3×3)-Matrix ergibt sich also:

$$\text{adj}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} b & c \\ h & i \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} a & c \\ g & i \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a & b \\ g & h \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T$$

[4] Adjunkte nicht zu verwechseln mit der Adjungierten (konjugiert-komplexe Transposition)

Inverse Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\,.$$

Beispiel: Besonders einfach ist das bei (2×2) Matrizen:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \det(A) \neq 0 \\ A^{-1} &= \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Inverse einer Transponierten Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(A^T\right)^{-1} &= \left(A^{-1}\right)^T \\ \text{weil:} \qquad \left(A^T\right)^{-1} A^T &= \left(A^{-1}\right)^T A^T \\ I &= AA^{-1} \end{aligned}$$

Äquivalente Eigenschaften Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rang}(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist singulär} \quad \Leftrightarrow A \text{ ist nicht-regulär} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist nicht invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ hat (mind.) einen Eigenwert } \lambda = 0. \end{aligned}$$

Ähnlichkeitstransformation Sei $A, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und T regulär:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT\,.$$

$\tilde{A}$ und A heißen ähnlich. $\tilde{A}$ und A haben den gleichen *Rang*, die gleiche *Determinante*, die gleiche *Spur*, die gleichen *Eigenwerte* (mit jeweils gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten).

Kommutierende Matrizen Bis auf Ausnahmefälle gilt:

$$AB \neq BA$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{aber:} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Man sagt: die Matrizen A und B kommutieren, wenn gilt: $AB = BA$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Man kann sogar zeigen, dass Matrizen, die in oberer Dreiecksform sind, immer kommutieren.

3 Produkte von Matrizen

In manchen Fällen ist es hilfreich, das Produkt zweier Matrizen nicht unmittelbar durch seine Elemente auszudrücken, sondern durch seine Zeile oder Spalten.

Beispiele: Seien dabei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Sei weiter a_i die i-te Spalte von A und b_j^T die j-te Zeile von B.

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{bmatrix} = a_1 b_1^T + a_2 b_2^T + \ldots + a_m b_m^T .$$

Man beachte: auf der rechten Seite steht eine Summe von Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times r}$.
Seien weiter $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{r\times p}$. Dann kann das Produkt auch spaltenweise:

$$CA = C \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ca_1 & Ca_2 & \cdots & Ca_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l\times m}$$

oder zeilenweise aufgeschrieben werden:

$$BD = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_1^T D \\ b_2^T D \\ \vdots \\ b_m^T D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

Transponierte eines Produkts Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Rang eines Produkts Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

$$\operatorname{rang}(AB) = \min\left\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\right\}$$

Determinante eines Produkts Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Inverse eines Produkts Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, regulär:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

4 Eigenwertgleichung

Als Eigenwertgleichung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird folgender Zusammenhang bezeichnet:

$$Av = \lambda v\,. \tag{1}$$

Dabei heißen

$$\begin{array}{ll} \lambda \in \mathbb{C} & \text{Eigenwert von } A \text{ und} \\ v \in \mathbb{C}^n & \text{zu } \lambda \text{ zugehöriger Eigenvektor von } A. \end{array}$$

Wir können die Eigenwerte von A finden, wenn wir Av auf die rechte Seite bringen und v ausklammern:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda v - Av \\ 0 &= \underbrace{(\lambda I - A)}_{M} v\,. \end{aligned}$$

Das Ergebnis läßt sich nun wiederum als Eigenwertgleichung interpretieren: v ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_M = 0$ von der Matrix $M = \lambda I - A$. Also ist die Matrix M singulär und es gilt:

$$\det(M) \;=\; \det(\lambda I - A) \;=\; 0 \tag{2}$$

Jedes $\lambda \in \mathbb{C}$, für das diese Gleichung erfüllt ist, löst die Eigenwertgleichung.

Die Determinante $\det(\lambda I - A)$ ist ein Polynom n-ten Grades in λ und wird **charakteristisches Polynom** genannt:

$$p(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_1\lambda + a_0$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$ solange A ausschließlich reelle Elemente besitzt.

Die Nullstellen (Wurzeln) des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ sind also die Eigenwerte von A.

Sind alle Eigenwerte verschieden, so findet man genau n Stück. Tritt ein Eigenwert λ_i mehrfach auf, so bezeichnet $\mu(\lambda_i)$ die **algebraische Vielfachheit**. Es gilt dann aber auch: $\sum_i \mu(\lambda_i) = n$. Für reelle Matrizen A treten nicht-reelle Eigenwerte stets in konjugiert-komplexen Paaren auf.

Zu jedem Eigenwert λ kann man mindestens einen linear unabhängigen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ finden, höchstens aber $\mu(\lambda)$. Die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren heißt **geometrische Vielfachheit** $\nu(\lambda)$. Es gilt also:

$$1 \le \nu(\lambda) \le \mu(\lambda)$$

Der Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit $\mu(\lambda) > 1$ heißt **halb-einfach**, wenn gilt $\mu(\lambda) = \nu(\lambda)$.

Für die Eigenwerte gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \;=\; \mathrm{Spur}(A) \qquad \text{und} \qquad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \;=\; \det(A)$$

Achtung: Hier treten die Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit auf.

Caylay-Hamilton Theorem Sei

$$p(\lambda) \;=\; \det(\lambda I - A) \;=\; \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

$$p(A) \;=\; A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I \;=\; 0\,. \tag{3}$$