Digitale Regelung - 2. Übung

Sommer 2013

Aufgabe 1*

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \tag{1}$$

Mit der Zustandstransformation $\tilde{x}_k = T^{-1}x_k$ mit $T \in \mathbb{R}^{nxn}$, regulär, erhält man

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_k \tag{2}$$

mit $\tilde{A} = T^{-1}AT$ und $\tilde{B} = T^{-1}B$.

a) Zeigen Sie, dass für die Lösungen (x_k) und $(\tilde{x}_k)$ der jeweiligen Anfangswertprobleme mit $x_0 = x^o$ bzw. $\tilde{x}_0 = T^{-1}x^o$ und Eingangsfolge (u_k) gilt:

$$(x_k) = T(\tilde{x}_k)$$

Aufgabe 2*

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \qquad x_0 = x^o \in \mathbb{R}^n.$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein einfacher Eigenwert von A und x^o der Eigenvektor zu diesem Eigenwert ist.

a) Zeigen Sie, dass (x_k) mit $x_k = \lambda^k x_0$ Lösung des homogenen (freien) Systems ist.
(*Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwertgleichung*)

Aufgabe 3

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{3}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Geben Sie die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ an, die A durch Ähnlichkeitstransformation in Diagonalform $\tilde{A}$ überführt.

c) Bestimmen Sie die reelle Transitionsmatrix $\Psi(k) = T\tilde{A}^k T^{-1}$ von (3).

* Diese Aufgabe sollten Sie anhand des Vorlesungsstoffs selbst bearbeiten und zum Übungstermin vorbereiten.

Aufgabe 4*

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k, \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Psi(k)$.

b) Geben Sie die Jordannormalform J der Systemmatrix A an.

Aufgabe 5*

Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\Psi(k)$ der Abtastsysteme mit den Systemmatrizen A_i. Geben Sie die Matrizen $\Psi(k)$ für $k = 1, 2$ explizit an.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6*

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k$$

zweiter Ordnung, mit dem doppelten Eigenwert $\lambda_{1/2} = 1$.

a) Geben Sie alle möglichen Jordannormalformen J_i der Systemmatrix an.

b) Berechnen Sie jeweils die Lösungen in den Koordinaten der Jordannormalform $\tilde{x}_k = J_i^k \tilde{x}_0$ des Systems für $\tilde{x}_0 = (1 \;\; 1)^T$ und skizzieren Sie jeweils die Verläufe der beiden Zustände für zehn Abtastschritte.

c) Welchen Ruhelagen $\tilde{x}_s$ haben die Systeme in Jordannormalform?

d) Welche Stabilitätseigenschaft können Sie der Ruhelage $\tilde{x}_s = 0$ jeweils zuordnen?

Aufgabe 7

Gegeben ist das zeitkontinuierliche System

$$\dot{x} = Ax$$

vierter Ordnung, wobei die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\pi/2$ und $\lambda_{3/4} = -1 \pm i\pi$ sind. Das System werde mit den Tastzeiten $T_{a1} = 1$ und $T_{a2} = 4$ abgetastet.

a) Bestimmen Sie zu beiden Tastzeiten die Eigenwerte des abgetasteten Systems und Skizzieren Sie deren Lage in der komplexen z-Ebene.

b) Ist das abgetastete System für beliebige Abtastzeiten T_a exponentiell stabil?

Aufgabe 8

Gegeben ist das zeitkontinuierliche System

$$\dot{x} = Ax$$

zweiter Ordnung mit komplexen Eigenwerten $\lambda = \alpha \pm i\omega$, $\alpha = \omega \neq 0$. Skizzieren Sie qualitativ die Lage der Eigenwerte des Abtastsystems für die Abtastzeit T_a in der komplexen z-Ebene