Digitale Regelung - 4. Übung

Winter 2010/11

Aufgabe 1

Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \qquad x_0 = x^0 \in \mathbb{R}^2 \\ y_k &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} x_k\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass das System stabilisierbar ist.

b) Bestimmen Sie die Zustandsrückführung für das System (1) nach dem Satz von Ackermann, so dass der geschlossene Regelkreis Dead-Beat-Verhalten aufweist.

c) Seien $r_k = 0\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$ und $x_0 = [1\ 1]^T$. Berechnen Sie den Zustand x_k und die Stellgröße u_k im geschlossenen Regelkreis, bis diese stationär sind. Wieviele Abtastschritte müssen Sie maximal berechnen?

Aufgabe 2

Betrachtet Sie weiterhin das System (1).

a) Zeigen Sie, dass das System nicht vollständig beobachtbar ist, falls gilt: $\alpha = 0$.

b) Zeigen Sie, dass das System vollständig beobachtbar ist, falls gilt: $\alpha = \beta = 1$.

c) Seien $\alpha = \beta = 1$, die Stellfolge $u_0 = -3, u_1 = 2, u_k = 0$ für $k \geq 2$ und die gemessene Ausgangsfolge $y_0 = 2, y_k = 0$ für $k \geq 1$. Bestimmen Sie den Anfangszustand x_0.

d) Sei $\alpha = 1, \beta = 0$. Ist das System vollständig beobachtbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Anfangszustand x_0, wenn Stellfolge und Ausgangsfolge wie in c) gegeben sind.

e) Zusatz: Überlegen Sie sich einen Prozess, den das System (1) exemplarisch modellieren könnte. Interpretieren Sie die Eigenschaft der Beobachtbarkeit des Systems in diesem Kontext.

f) Zusatz: Für welche Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das System vollständig beobachtbar? Für welche Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das System auch vollständig rekonstruierbar?

Aufgabe 3

Betrachten Sie das System (1) mit $\beta = 0, \alpha \neq 0$.

Für die Realisierung einer Regelung soll ein *trivialer Beobachter* entworfen werden, welcher den nicht messbaren Zustand schätzt und so für eine Zustandsrückführung bereitstellt.

a) Zeigen Sie, dass unter den oben genannten Bedingungen ein Beobachter entworfen werden kann. Geben Sie das Zustandsraummodell des trivialen Beobachters (Simulators) an. Geht der Schätzfehler für beliebige Anfangswerte gegen Null?

b) Sei der Anfangswert des Prozesses $x_0 = [1\ 1]^T$ und der des Beobachters $\hat{x}_0 = [1\ \ 0.5]^T$. Bestimmen Sie den Schätzfehler $\hat{e}_k = \hat{x}_k - x_k$ und skizzieren Sie dessen Verlauf für 10 Abtastschritte.

c) Sei der Anfangswert des Prozesses $x_0 = [1\ 1]^T$ und der des Beobachters $\hat{x}_0 = [0.5\ \ 1]^T$. Bestimmen Sie den Schätzfehler $\hat{e}_k = \hat{x}_k - \hat{x}_k$ und skizzieren Sie dessen Verlauf für 10 Abtastschritte.

d) Erfüllt der Simulator die Bedingungen eines expliziten Beobachters?

Aufgabe 4

Betrachten Sie das System (1) mit $\alpha = 1, \beta = 0$.

Für die Realisierung einer Regelung soll ein *Luenberger Beobachter* entworfen werden, welcher den nicht messbaren Zustand schätzt und so für eine Zustandsrückführung bereitstellt.

a) Geben Sie das Zustandsraummodell des Luenberger Beochachters an. Entwerfen Sie den Luenberger Beobachter so, dass der Schätzfehler für beliebige Anfangszustände $x_0, \hat{x}_0$ spätestens nach zwei Abtastschritten verschwindet.

b) Sei der Anfangswert des Prozesses $x_0 = [1\ 1]^T$ und der des Beobachters $\hat{x}_0 = [1\ \ 0.5]^T$. Berechnen Sie den Schätzfehler $\hat{e}_k = \hat{x}_k - x_k$ für 2 Abtastschritte.

c) Sei der Anfangswert des Prozesses $x_0 = [1\ 1]^T$ und der des Beobachters $\hat{x}_0 = [0.5\ \ 1]^T$. Berechnen Sie den Schätzfehler $\hat{e}_k = \hat{x}_k - x_k$ für 2 Abtastschritte.

d) Erfüllt der Luenberger Beobachter die Bedingungen eines expliziten Beobachters?