Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 1

Modalitäten

- Bearbeitungszeit: 90 Min.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz[1] nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

6 Punkte

Gegeben ist die homogene Differenzengleichung in Jordannormalform

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Eigenwerte λ_i von A mit deren jeweiligen algebraischer Vielfachheit μ_i an!

b) Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten ν_i der Eigenwerte λ_i an!

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\Psi(k)$ der homogenen Differenzengleichung (1) und berechnen Sie den Zustand x_{100}, für den Anfangswert x_0!

[1] In dieser Übungsklausur ist der freie Platz nicht enthalten.

Aufgabe 2

10 Punkte

Für das System mit Differenzengleichung

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + bu_k \\ y_k &= c^T x_k \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soll ein PI-Zustandsregler gemäß des Blockschaltbildes in Abbildung 1 entworfen werden.

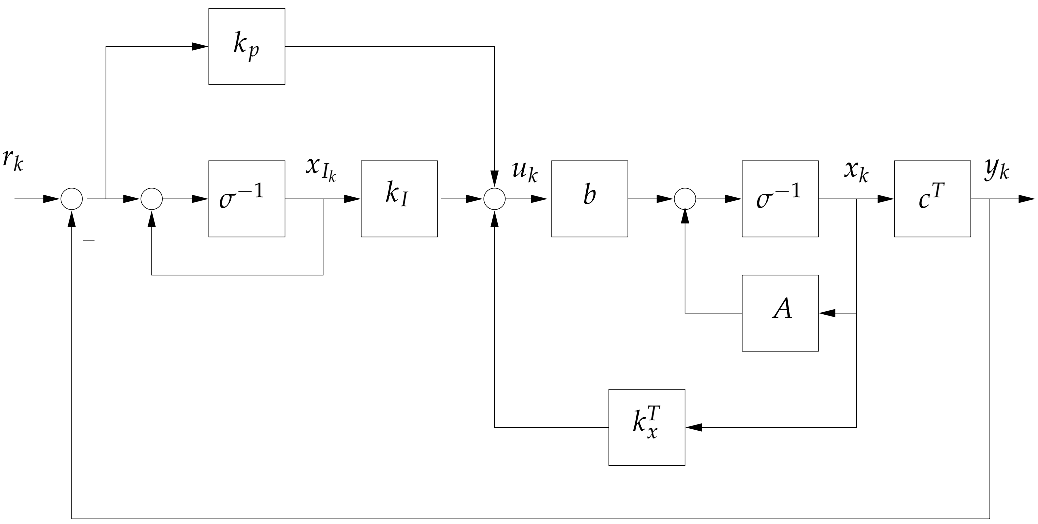

Abbildung 1: Regelkreisstruktur mit PI-Zustandsregler

a) Geben Sie die mit dem PI-Regler erweiterte Zustandsraumdarstellung der Form

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{b}u_k \\ y_k &= \tilde{c}^T \tilde{x}_k \end{aligned} \tag{2}$$

mit dem Zustandsvektor $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_I \end{pmatrix}$ an!

b) Entwerfen Sie den Zustandsregler $u_k = \tilde{k}^T \tilde{x}_k$ für das *erweiterte* Zustandsraummodell (2), so dass der geschlossenen Regelkreis Dead-beat-Verhalten aufweist!

c) Bestimmen Sie die Parameter $k_x^T \in \mathbb{R}^2$, $k_p, k_I \in \mathbb{R}$ des PI-Zustandsreglers (vgl. Abbildung 1), so dass für die Stellgröße (u_k) bei sprungförmigen Führungssignal (r_k) gilt: $u_0 = \lim_{k\to\infty} u_k$!

Hinweis:
Falls Sie in Aufgabenteil b) kein Ergebnis erhalten haben, so verwenden Sie: $\tilde{k}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
(Dies ist *nicht* das Ergebnis aus Aufgabenteil b!)

Aufgabe 3 **6 Punkte**

Gegeben ist das System mit Differenzengleichung

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + bu_k \\
y_k &= c^T x_k\,.
\end{aligned} \tag{3}
$$

a) Skizzieren Sie das Blockschaltbild des Differenzengleichungssystems mit *vollständigem* Beobachter! Beschriften Sie die Signale!

b) Geben Sie die Differenzengleichung des vollständigen Beobachters für das System (3) an!

c) Geben Sie die Schätzfehlerdynamik des vollständigen Beobachters an!

d) Seien $\lambda_1 = -0{,}5$ und $\lambda_2 = -2$ Eigenwerte von A. Unter welchen Voraussetzungen ist die Schätzfehlerdynamik exponentiell stabil? Unter welchen Bedingungen kann dies erreicht werden?

Aufgabe 4 **7 Punkte**

a) Gegeben ist die z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z-3}{z^4 + 2z^2 - z + 1} = \frac{Y(z)}{U(z)}\,.$$

Geben Sie die minimale Zustandsraumrealisierung von $G(z)$ in Regelungsnormalform an!

b) Gegeben ist die Zustandsraumdarstellung mit Differenzengleichung

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + bu_k \\
y_k &= c^T x_k
\end{aligned}
$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 24 & -26 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 24 & -14 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist die Realisierung des Ein-Ausgangsverhaltens minimal? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis zur Übungsklausur:
Die Übertragungsfunktion braucht zur Lösung der Aufgabe nicht bestimmt zu werden.