Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 2

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz[1] nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

7 Punkte

Gegeben ist der Abtastregelkreis mit zeitkontinuierlicher Regelstrecke

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 2 & 2 \\ 0 & 0,5 & 2 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die zeitdiskrete Beschreibung der Strecke mit Halteglied null-ter Ordnung (ZOH):

$$x_{k+1} = A_d x_k + b_d u_k\,,$$

wenn für die Abtastzeit gilt $T_a = 2$!

Aufgabe 2

6 Punkte

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ist das System vollständig erreichbar? Falls nicht, geben Sie die Dimension des erreichbaren Unterraums an!

b) Zeigen Sie, dass das System vollständig steuerbar ist!
Hinweis: Betrachten Sie die Eigenbewegung des Systems.

[1] In dieser Übungsklausur ist der freie Platz nicht enthalten.

Aufgabe 3 **8 Punkte**

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + bu_k \\ y_k &= c^T x_k \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass das System vollständig beobachtbar ist!

b) Warum ist ein trivialer Beobachter ungeeignet?

c) Entwerfen Sie einen Luenbergerbeobachter, so dass der Schätzfehler für beliebige Anfangszustände nach 2 Abtastschritten null ist!

d) Das Regelgesetz $u_k = k^T \hat{x}_k + g r_k$ mit $k^T = [-1,8 \;\; -1,2]$ stabilisiert den Regelkreis. Bestimmen Sie $g \in \mathbb{R}$, so dass die stationäre Verstärkung des geschlossenen Regelkreises 1 ist!

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Gegeben ist der Abtastregelkreis mit Regelstrecke mit Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{(1 + \tau s)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)},$$

wobei $\tau = 10, \zeta = 0,2$ und $\omega_0 = \pi$.

a) Welche obere Grenze T_a^* für die zu wählende Abtastzeit ergibt sich nach der Streifenbedingung?

b) Bestimmen Sie die Pole in Polarkoordinaten der zeitdiskreten Strecke im Abtastregelkreis mit Halteglied null-ter Ordnung (ZOH) für die Abtastzeit $T_a = \frac{\sqrt{6}}{5} T_a^*$!

Aufgabe 5

5 Punkte

Gegeben ist der Abtastregelkreis mit Regelstrecke mit Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau s)^2} .$$

Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ der Strecke des zeitdiskreten Regelkreises für ein Halteglied null-ter Ordnung (ZOH)!

Falls es für Ihre Lösung hilfreich ist, verwenden Sie folgende Korrespondenztabelle:

Laplace-Transformierte $F(s)$	zeitkontinuierl. Signal $f(t),\ t \geq 0$	zeitdiskretes Signal $(f_k),\ k \geq 0$	z-Transformierte $f_z(z)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}$	$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T_a}}$
$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$	$te^{\alpha t}$	$\left(kT_a e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{T_a e^{\alpha T_a}\, z}{(z-e^{\alpha T_a})^2}$
$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\left(\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{\sin(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\left(\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - \cos(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\frac{\omega_0}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\sin(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{e^{\alpha T_a}\sin(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$
$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\cos(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$